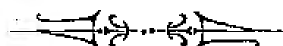
Дмитрій Граве

Ординарный Профессоръ Императорскаго Университета Св. Владиміра.

ЭЛЕМЕНТЫ

ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ.



Цѣна 5 рублей.

КІЕВЪ.

Типографія Императорскаго Университета св. Владиміра

Акц. О-ва печатн. и изд. дѣла Н. Т. Корчакъ-Новицкаго, Меринговская, 6.

1914.

Предисловіе.

Уже давно, преподавая высшую алгебру въ Университетѣ Св. Владиміра по обычной для русскихъ университетовъ программѣ общаго курса этого предмета, я ощущалъ извѣстную неловкость, состоявшую какъ бы въ сознаніи того, что я дѣйствовалъ не согласно съ моими внутренними убѣжденіями. Въ самомъ дѣлѣ, если отнести къ курсу введенія въ анализъ многіе отдѣлы, часто излагаемые въ учебникахъ высшей алгебры, какъ то: опредѣлители, разложеніе раціональныхъ дробей на простѣйшія, числа комплексныя и т. д., то остается обычный конгломератъ теоремъ и свойствъ, относящихся къ цѣлымъ функціямъ большею частью отъ одного перемѣннаго независимаго, теоремъ быть можетъ интересныхъ и даже иногда важныхъ, но не связанныхъ никакою объединяющею мыслью, а главное, не имѣющихъ никакого опредѣленнаго raison d'être и приложеній. Говорится, напримѣръ, о предѣлахъ корней, о задачѣ отдѣленія корней, какъ будто главною цѣлью курса является приближенное рѣшеніе уравненій, однако всѣмъ извѣстно въ настоящее время, что лучшимъ въ практическомъ отношеніи способомъ приближеннаго рѣшенія уравненій является способъ Gräffe, не требующій абсолютно предварительнаго отдѣленія корней. Среди этихъ излагаемыхъ по извѣстной рутинѣ теоремъ сиротливо высится колоссъ — теорема Sturm'a. Но и тутъ изложенію часто придается такой характеръ, какъ будто главное значеніе теоремы Sturm'a состоитъ въ ея приложеніи къ отдѣленію корней.

Меня уже давно мучила мысль, что обычная программа курса высшей алгебры есть не то, что нужно излагать, а что главное дѣло

состоитъ какъ разъ въ томъ, что не излагаются, т. е. въ теоріи группъ, теоріи подстановокъ, теоріи Galois и т. п.

Что, въ самомъ дѣлѣ, долженъ говорить профессоръ, выходящій изъ аудиторіи и слышащій вопросъ студента: „Вы говорили, что буквенныя уравненія выше 4-ой степени не рѣшаются въ радикалахъ,—а какъ это доказать?".

Я пробовалъ различнымъ образомъ уклоняться отъ отвѣта на этотъ вопросъ. Сначала я говорилъ, что радикалъ есть знакъ неудачный, а потому и теорія рѣшеній уравненій при помощи этого знака есть теорія, не имѣющая практическаго значенія. Я чувствовалъ при этомъ, конечно, что обычный способъ разговора двухъ математиковъ, когда одинъ критикуетъ предметъ, которымъ занимается другой, совершенно недопустимъ между профессоромъ и учениками. Да кромѣ того, профессору трудно будетъ защитить свою точку зрѣнія, ибо студентъ ни за что не повѣритъ, что теорія, которой занимались Lagrange, Gauss, Abel и Galois, теорія, незаслуживающая вниманія.

Затѣмъ наступилъ періодъ, когда я сталъ давать обычныя, такъ называемыя краткія, доказательства теоремы Abel'а о невозможности алгебраическаго рѣшенія уравненій выше 4-ой степени. Сознавая неубѣдительность этихъ доказательствъ, я готовъ былъ презирать себя за недобросовѣстность. Наконецъ, я поставилъ себѣ ребромъ вопросъ, почему я не желаю излагать какъ слѣдуетъ теорію Galois? Я не видѣлъ другого объясненія, кромѣ дурной привычки и рутины. Все говорило за введеніе теоріи Galois въ элементарный курсъ высшей алгебры: и абсолютная необходимость основъ теоріи группъ для приличнаго преподаванія чистой математики, и достаточная разработанность теоріи Galois, позволяющая простое и ясное изложеніе, и важность этой теоріи для высшихъ частей алгебры, гдѣ этотъ предметъ сливается съ теоріей чиселъ въ гармоническое цѣлое. Такимъ образомъ я излагаю послѣдніе нѣсколько лѣтъ теорію Galois въ общемъ курсѣ высшей алгебры.

Изданіе этой книги, уже давно задуманное, было отложено на нѣсколько лѣтъ въ ожиданіи появленія малаго изданія алгебры H. Weber'а. Судя по доходившимъ до меня свѣдѣніямъ о программѣ и характерѣ этого изданія, я думалъ въ немъ найти какъ разъ то, что по моему мнѣнію необходимо для русскихъ университетовъ. Я думалъ, что можно будетъ взять это сокращенное изданіе, какъ

нормальный учебникъ, стоящій на высотѣ современнаго положенія предмета.

Появившаяся книга H. Weber'а разочаровала меня въ сильной степени.

Оказалось, что въ теоріи алгебраическаго рѣшенія уравненій Weber ограничивается только уравненіями простой степени. Остались недосказанными буквально лишь нѣсколько словъ, между тѣмъ, какъ рядъ важныхъ результатовъ остался за бортомъ. Такъ, напримѣръ, я считаю совершенно классическою теорему Abel'a-Galois объ импримитивности разрѣшимаго уравненія, въ степень котораго входятъ два различныхъ простыхъ числа. Эта теорема въ книгѣ не разсматривается.

Затѣмъ разочаровали меня самыя сокращенія по сравненію съ большимъ изданіемъ. Можно судить, на сколько эти сокращенія удачны, хотя бы по тому факту, что въ одномъ мѣстѣ желаніе сократить доказательство привело къ грубой ошибкѣ (стр. 215, три верхнія строки).

Благоговѣя передъ памятію знаменитаго автора, котораго я всегда себѣ ставилъ образцомъ для подражанія, я отношу отвѣтственность за эту ошибку на трехъ молодыхъ ученыхъ, которые, судя по предисловію, принимали дѣятельное участіе въ чтеніи корректуръ.

Итакъ, я вернулся опять къ мысли издать собственный курсъ алгебры. Планъ книги и всѣ детали ея выполненія были у меня давно уже готовы, поэтому приведеніе моей мысли въ исполненіе не встрѣтило затрудненія и не потребовало много времени.

Считаю необходимымъ болѣе подробно познакомить читателя съ наиболѣе характерными особенностями моего изложенія.

Первыя четыре главы книги заключаютъ, такъ сказать, азбуку алгебры.

Первый серьезный вопросъ трактуется въ пятой главѣ, посвященной теоріи подстановокъ. Будучи убѣжденнымъ сторонникомъ возможно ранняго введенія въ университетское преподаваніе основъ общей теоріи группъ, я начинаю главу съ подробно разобраннаго опредѣленія понятія о группѣ.

Чтобы еще болѣе подчеркнуть мою мысль, я сдѣлалъ первые три параграфа главы, заключающіе опредѣленіе понятія группы,

точнымъ воспроизведенiемъ такого же изложенiя изъ моей книги „Элементарный курсъ теорiи чиселъ“.

Переходя далѣе къ разсмотрѣнiю *конкретныхъ* группъ подстановокъ, я отсылаю читателя, желающаго познакомиться съ теорiей *абстрактныхъ* группъ, къ книгѣ моего многоуважаемаго ученика О. Ю. Шмидта, подъ заглавiемъ „Абстрактная теорiя группъ“, удостоенной Физико-математическимъ факультетомъ Университета Св. Владимiра премiи Рахманинова.

Я прошу читателя обратить особенное вниманiе въ этой главѣ на теоремы о томъ, что при $n > 4$ знакопеременная группа простая и что симметрическая группа не имѣетъ другихъ инварiантныхъ подгруппъ, кромѣ знакоперемѣнной.

Изъ конца книги читатель увидитъ, что въ этихъ теоремахъ заключается полное доказательство теоремы о невозможности алгебраическаго рѣшенiя буквенныхъ уравненiй выше 4-ой степени.

Глава шестая заключаетъ изложенiе элементарныхъ свойствъ инварiантовъ. Между прочимъ я обращаю вниманiе на очень важный вопросъ нахожденiя конечныхъ группъ ортогональныхъ линейныхъ преобразованiй многомѣрнаго пространства. Этотъ вопросъ служилъ предметомъ занятiй моего семинара по алгебрѣ въ осеннемъ семестрѣ 1913 года. Въ этомъ семинарѣ принимали участiе наиболѣе сильные изъ моихъ учениковъ и мы догадались, что, начиная съ пяти измѣренiй, дѣло исчерпывается группами, которыя я въ текстѣ обозначаю символами Y и Y'. Намъ не удалось однако доказать справедливости найденнаго по интуицiи рѣшенiя.

Далѣе я прошу читателя обратить вниманiе на главу восьмую, въ которой излагаются свойства цѣлыхъ функцiй, отъ многихъ перемѣнныхъ независимыхъ. Центромъ тяжести этой главы является доказательство теоремы о единственности разложенiя цѣлыхъ функцiй на неприводимые множители въ связи съ приложенiемъ Эвклидова алгориѳма нахожденiя общаго наибольшаго дѣлителя при помощи послѣдовательнаго дѣленiя. Какъ извѣстно, эта теорема служитъ основанiемъ всей Kronecker'овской ариѳметической теорiи алгебраическихъ величинъ.

Одиннадцатая глава содержитъ изложенiе теоремы Sturm'а.

Доказавъ теорему Sturm'а и пояснивъ её на примѣрахъ, я обращаюсь къ связи теоремы Sturm'а съ непрерывными дробями. Я начинаю съ замѣчательныхъ изслѣдованiй академика А. Маркова.

Изъ формулъ Маркова я получаю формулы Sylvester'а, а уже отсюда прихожу къ изслѣдованіямъ Hermite'а, указавшимъ связь съ квадратичными формами. Переходя далѣе къ отдѣленію мнимыхъ корней, я излагаю замѣчательную теорію индексовъ Cauchy, которая въ свою очередь переходитъ въ болѣе широкую теорію характеристикъ Kronecker'а. Я заканчиваю главу приложеніемъ характеристикъ къ доказательствамъ теоремы Hurwitz'а объ уравненіяхъ, всѣ корни которыхъ имѣютъ отрицательныя вещественныя части. Здѣсь я долженъ упомянуть кстати, что въ первомъ томѣ второго изданія алгебры Weber'а находится § 99 подъ заглавіемъ „Formulirung der Aufgabe durch Hurwitz"; въ той части этого параграфа, гдѣ дѣло идетъ о связи съ квадратичными формами, я ничего не вижу выходящаго изъ круга идей и результатовъ Hermite'а, теоремы же 3 и 4 вытекаютъ изъ теоріи Маркова, какъ частные случаи.

Двѣнадцатая глава трактуетъ о приближенномъ вычисленіи корней. Отсылая къ книгѣ проф. А. И. Крылова „Лекціи о приближенномъ вычисленіи" лицъ, желающихъ научиться вычислять съ удобствомъ по семизначнымъ логариѳмамъ какъ вещественные, такъ и мнимые корни уравненій по способу Gräffe, я излагаю классическіе пріемы приближеннаго вычисленія главнымъ образомъ вещественныхъ корней. Излагая способъ Gauss'а вычисленія корней трехчленныхъ уравненій, я показываю мой способъ вычисленія вещественныхъ корней подобныхъ уравненій при помощи алгориѳма, представляющаго нѣкоторое обобщеніе алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Тринадцатая глава посвящена двухчленнымъ уравненіямъ.

Изложивъ подробно свойства первообразныхъ корней, я даю большое число разнообразныхъ пріемовъ доказательства неприводимости уравненія, которымъ удовлетворяютъ только первообразные корни. Попутно я подчеркиваю очень важное понятіе о взаимной приводимости уравненій.

Начиная съ четырнадцатой главы весь конецъ книги заключаетъ мое изложеніе теоріи Galois.

Глава четырнадцатая посвящена общей теоріи полей (Körper). Эта глава представляетъ почти полную копію съ подобной же главы моей книги „Элементарный курсъ теоріи чиселъ". Въ ней я дѣлаю существенное добавленіе, принадлежащее Steinitz'у и котораго не было въ упомянутой моей книгѣ, а именно, что въ поляхъ съ от-

личной отъ нуля характеристикой неприводимыя функціи могутъ имѣть кратные корни. Однако это добавленіе въ настоящей книгѣ не получаетъ приложенія, ибо я въ ней разсматриваю исключительно поля съ характеристикой нуль.

Переходя къ слѣдующимъ главамъ, я долженъ обратить вниманіе читателя на то, почему я видоизмѣнилъ изложеніе теоріи Galois, встрѣчающееся у моихъ предшественниковъ.

Я оставлю въ сторонѣ критику изложенія теоріи Galois, даннаго авторами, у которыхъ изложеніе имѣетъ такой характеръ, что можно съ большой вѣроятностью предполагать, что самъ авторъ не достаточно понимаетъ излагаемаго предмета.

Но даже правильныя изложенія предмета, изъ которыхъ однимъ изъ лучшихъ является изложеніе Weber'a, грѣшатъ по моему мнѣнію въ смыслѣ строгости, простоты и ясности.

Не строгимъ является такой способъ изложенія. Разсматриваются сначала численныя уравненія, коэффиціенты которыхъ суть опредѣленныя числа, принадлежащія къ нѣкоторому заданному числовому полю; а далѣе безъ особенныхъ обоснованій предполагается, что теорія, получаемая для численныхъ уравненій, годится также для буквенныхъ уравненій, когда всѣ корни, а, значитъ, и всѣ коэффиціенты перемѣнныя независимыя величины. Предполагается также, что теорія сохраняетъ свою силу для случая промежуточнаго, случая алгебраическихъ функцій отъ одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Если изложеніе Weber'a и возможно защитить отъ упрека въ нестрогости, то придется сдѣлать такое большое число подстрочныхъ примѣчаній и оговорокъ, для защиты читателя отъ неправильнаго пониманія излагаемаго, что во всякомъ случаѣ остается признать изложеніе не достаточно яснымъ.

Что касается отсутствія простоты у моихъ предшественниковъ, то достаточно сослаться хотя бы на второй томъ Weber'a, гдѣ при изученіи уравненій сложной степени въ полномъ ходу теорема Jordan'a о рядѣ индексовъ данной группы, между тѣмъ какъ для тѣхъ же самыхъ цѣлей, съ которыми Weber употребляетъ теорему Jordan'a, никакой надобности въ этой теоремѣ нѣтъ.

Читатель увидитъ въ моей книгѣ, что достаточно доказать такую простую теорему: *всякая разрѣшимая группа имѣетъ отличнаго*

отъ единицы коммутативнаго нормальнаго дѣлителя. Изъ этой теоремы сразу получается все, что нужно для элементарнаго изложенія.

Я уже не упоминаю о томъ, что существуетъ цѣлый рядъ болѣе мелкихъ пунктовъ, гдѣ разсужденія моихъ предшественниковъ не достаточно просты. Напримѣръ, когда при переходѣ къ линейнымъ группамъ доказываютъ, что подстановки можно представить аналитически системами сравненій по простому модулю, то прибѣгаютъ къ методу индукціи, тогда какъ для произвольной подстановки можно написать сравненія сразу въ явномъ видѣ.

Основные принципы моего изложенія теоріи Galois приведены мною въ статьѣ „Объ основныхъ положеніяхъ теоріи Galois". Матем. Сборн. Москва 1914 года.

Лучше всего я резюмирую ихъ, если скажу нѣсколько словъ о каждой изъ слѣдующихъ главъ моей настоящей книги.

Глава пятнадцатая озаглавлена „теорія Lagrange'а". Этимъ я хотѣлъ подчеркнуть то обстоятельство, что я считаю Lagrange'а родоначальникомъ и творцомъ приложенія теоріи группъ къ изслѣдованію алгебраическихъ уравненій. Lagrange'у принадлежитъ весьма важное раздѣленіе уравненій на буквенныя и численныя. Уравненія будутъ буквенными если ихъ корни независимыя перемѣнныя, между которыми не можетъ существовать никакихъ соотношеній, кромѣ тождественныхъ. Численныя уравненія я характеризую какъ такія, у которыхъ существуютъ не тождественныя соотношенія

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

между корнями. Глава пятнадцатая посвящена исключительно уравненіямъ буквеннымъ.

Слѣдующая шестнадцатая глава посвящена изложенію теоріи Galois. Эта теорія оказывается самой общей, въ которой, какъ буквенныя, такъ и численныя уравненія входятъ какъ частные случаи.

Вмѣсто *буквенной неизмѣняемости* вида раціональныхъ функцій отъ корней, при подстановкахъ этихъ корней, которыя разсматривались въ теоріи Lagrange'а, приходится разсматривать *численную неизмѣнность* функцій, хотя бы видъ функцій и мѣнялся.

Всѣ теоремы Lagrange'а, приведенныя въ пятнадцатой главѣ, возстановляются для численныхъ уравненій, если разсматривать только такія подстановки корней, которыя входятъ въ нѣкоторую опредѣленную группу, называемую *группой Galois* даннаго уравненія.

Я даю такое опредѣленіе группы Galois: „группа *всѣхъ* подстановокъ, изъ которыхъ *каждая* не нарушаетъ *всякаго раціональнаго* соотношенія $\Pi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ между корнями“.

Такъ какъ между корнями буквеннаго уравненія могутъ существовать только тождественныя соотношенія, которыя не нарушаются отъ любой подстановки, то группа Galois для этихъ уравненій будетъ всей симметрической.

При помощи одного пріема, заимствованнаго мною у Kronecker'а, я свожу численныя уравненія къ теоріи Lagrange'а.

Въ семнадцатой главѣ я даю изложенію болѣе частный характеръ, а именно, предполагаю крайній случай численной опредѣленности уравненія, а именно, случай опредѣленныхъ численныхъ коэффиціентовъ. Черезъ это не происходитъ ограниченія общности разсужденія, ибо въ предыдущемъ изложеніи показана независимость законовъ теоріи отъ характера уравненія, причемъ играютъ роль лишь свойства его группы.

Тутъ я подчеркиваю наиболѣе важные по приложеніямъ пункты: зависимость неприводимости уравненія отъ транзитивности группы, понятіе объ импримитивности и т. д.

Глава восемнадцатая трактуетъ о наиболѣе важныхъ видахъ уравненій, рѣшаемыхъ въ радикалахъ, главнымъ образомъ объ уравненіяхъ абелевыхъ. Здѣсь удѣлено много мѣста теоріи двучленныхъ уравненій и ея приложеніямъ. Я руководился при этомъ особенно важнымъ для науки значеніемъ теоріи полей, связанной съ дѣленіемъ круга. Я приведу здѣсь слова Hilbert'а „Es ist diese Theorie offenbar auf der Höhe des heutigen arithmetischen Wissens die äusserste erreichte Spitze, und man übersieht von ihr aus in weitem Rundblick das ganze durchforschte Gebiet, da fast jeder wesentliche Gedanke und Begriff aus der Körpertheorie, zum wenigsten in spezieller Fassung bei dem Beweise der höheren Reciprocitätsgesetze seine Anwendung findet“.

Глава девятнадцатая посвящена моему изложенію вопроса о рѣшеніи уравненій въ радикалахъ.

Въ двадцатой главѣ я разсматриваю уравненія пятой степени, показываю связь ихъ теоріи съ группой икосаэдра и разсматриваю резольвенту 6-ой степени. Тутъ представляется особенно важной резольвента, вычисленная въ первый разъ Cayley, отличіе которой отъ Lagrange'овской состоитъ въ томъ, что взята натуральная ирраціональность вмѣсто побочной.

Резольвента Cayley замѣчательна тѣмъ, что на ней удалось Cayley продѣлать всѣ выкладки до конца, благодаря замѣчательному по остроумію пріему вычисленія.

Вотъ въ краткихъ словахъ содержаніе моей книги. Насколько я достигъ тѣхъ цѣлей, которыя мною руководили, судить конечно не мнѣ.

Среди замѣченныхъ мною самимъ недостатковъ изложенія одинъ долженъ быть указанъ, а именно, на страницѣ 439 строки 13, 14, 15 сверху должны быть уничтожены, какъ заключающія неправильную мысль. Фраза эта вкралась по недосмотру изъ прежняго литографированнаго изданія.

Мнѣ пришлось отступить при печатаніи книги отъ публикованнаго проспекта въ нѣсколькихъ пунктахъ. Между прочимъ я не излагаю связи рѣшенія уравненій пятой степени съ эллиптическими функціями и гипергеометрическимъ рядомъ, ибо книга и безъ того достигла большого объема.

Если я буду жить и сохраню трудоспособность, то объ этомъ я скажу въ пятомъ томѣ проектируемаго сочиненія подъ заглавіемъ „Ариѳметическая теорія алгебраическихъ величинъ“, первый томъ котораго выпущенъ въ литографированномъ видѣ, второй же томъ, подъ заглавіемъ „Теорія идеаловъ“, находится въ печати.

Печатаніе настоящей книги проходило при крайне доброжелательномъ къ ней отношеніи моихъ учениковъ, которые чѣмъ могли старались мнѣ помочь, за что я и выражаю здѣсь всѣмъ имъ мою признательность. Особенно долженъ поблагодарить студента Царевскаго за составленіе Index'a nominum et rerum.

Профессоръ *Дмитрій Граве.*

Харьковъ. Университетъ. 5 мая 1914.

Оглавленіе.

ПОПРАВКИ.

Я не указываю замѣченныхъ опечатокъ, которыя по своей очевидности не вліяютъ на пониманіе изложенія, которыя читатель самъ замѣтитъ и поправитъ.

Обращу вниманіе лишь на двѣ опечатки, которыя, какъ мнѣ кажется, могутъ затруднить читателя.

На страницѣ 114, 10 строка сверху, напечатана буква ∂ вмѣсто буквы σ.

На страницѣ 264 верхняя формула должна имѣть видъ

$$\frac{a_1xy+b_1x+c_1y+d_1}{a_2xy+b_2x+c_2y+d_2}=\frac{a_3xy+b_3x+c_3y+d_3}{a_4xy+b_4x+c_4y+d_4}$$

ГЛАВА I.

О цѣлыхъ функціяхъ.

Понятіе о цѣлой функціи и ея степени.

§ 1.

Опредѣленіе. Цѣлой функціей отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ называется всякій полиномъ вида

$$\sum Ax^{\lambda}y^{\mu}z^{\nu}\ldots t^{\tau},$$

показатели $\lambda, \mu, \nu, \ldots \tau$ суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа или нули, сумма $\sum$ распространяется на конечное число членовъ, а коэффиціенты произвольныя числа. Сумма

$$\lambda+\mu+\nu+\ldots+\tau$$

называется *степенью члена.* Наибольшая изъ степеней отдѣльныхъ членовъ представляетъ *степень функціи.*

Однородныя цѣлыя функціи.

§ 2.

Возьмемъ цѣлую функцію степени n отъ m перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$. Пусть эта функція будетъ

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m).$$

Введемъ еще одну перемѣнную независимую x_{m+1} и составимъ слѣдующее выраженіе

$$(1)\qquad x_{m+1}^{n} f\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \frac{x_2}{x_{m+1}}, \ldots \frac{x_m}{x_{m+1}}\right).$$

Выраженіе (1) представляетъ цѣлую функцію отъ $m+1$ буквъ x_1, x_2, x_3, ... x_m, x_{m+1}. Эта функція обладаетъ такимъ свойствомъ, что всѣ ея члены имѣютъ одну и ту же степень n. Если мы для сокращенія обозначимъ функцію (1) черезъ $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1})$, то этотъ знакъ будетъ выражать, такъ называемую, *однородную* цѣлую функцію степени n отъ $m+1$ буквъ. Такія однородныя функціи мы будемъ для краткости называть *формами*, такъ что функцію φ можно будетъ назвать формою степени n отъ $m+1$ буквъ.

§ 3.

Формы 2-ой и 3-ьей степени называются соотвѣтственно *квадратичными* и *кубичными* формами; формы отъ двухъ и отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ называютъ соотвѣтственно *бинарными* и *тройничными*. Такъ, напримѣръ,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

есть бинарная квадратичная форма, а

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

есть тройничная кубичная форма.

Число членовъ цѣлой функціи.

§ 4

Разсмотримъ цѣлую функцію

(1) $$f(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

степени n отъ m буквъ. Предположимъ, что эта функція задана въ самомъ общемъ видѣ, т. е. въ составъ ея входятъ всевозможнаго вида члены, степени которыхъ не превосходятъ числа n; коэффиціенты же при этихъ членахъ мы будемъ предполагать буквенными, т. е. каждый изъ этихъ коэффиціентовъ будемъ предполагать обозначеннымъ нѣкоторой буквой, которой не придаемъ никакого опредѣленнаго численнаго значенія. Поставимъ себѣ задачей найти число членовъ функціи (1), если предположить, что въ функціи нѣтъ подобныхъ членовъ по отношенію къ независимымъ перемѣннымъ

Если мы перейдемъ отъ функціи (1) къ соотвѣтствующей ей формѣ той же степени n отъ $m+1$ буквъ, какъ это было сдѣлано въ параграфѣ 2, то нетрудно видѣть, что получимъ самаго общаго вида форму степени n съ $m+1$ перемѣнными независимыми, а потому обратимся къ счету

числа членовъ въ общаго вида формѣ

(2) $$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1})$$

отъ $m+1$ буквъ. Каждый членъ такой формы имѣетъ видъ

$$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_{m+1}^{\alpha_{m+1}},$$

причемъ

(3) $$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{m+1}=n$$

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующей задачѣ: найти сколькими способами можно представить заданное цѣлое число n въ видѣ суммы $m+1$ цѣлыхъ слагаемыхъ. *Сколько будетъ такихъ представленій, столько и будетъ различныхъ членовъ въ формѣ* φ. Послѣдняя задача есть частный случай ряда задачъ, разсматривавшихся въ XVIII столѣтіи подъ названіемъ partitio numerorum. У насъ имѣется тотъ случай этихъ задачъ, когда среди слагаемыхъ мы допускаемъ равныя между собою, а также равныя нулю. Въ этомъ случаѣ задача рѣшается совершенно элементарно. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ формулировать задачу иначе, а именно можно сказать, что число членовъ въ формѣ (2) равняется числу сочетаній изъ $m+1$ перемѣнныхъ независимыхъ по n, причемъ допускаются повторяющіеся элементы.

Для нахожденія числа такихъ сочетаній поступимъ такъ: выпишемъ всѣ эти сочетанія и обозначимъ ихъ совокупность черезъ B. При выписываніи каждаго изъ этихъ сочетаній будемъ держаться правила, чтобы значекъ всякаго элемента былъ не меньше значка непосредственно предшествующаго ему элемента слѣва, такъ что всякое сочетаніе будетъ имѣть такой видъ

(4) $$\underbrace{x_1x_1\ldots x_1}_{\alpha_1}\underbrace{x_2x_2\ldots x_2}_{\alpha_2}\ldots\underbrace{x_{m+1}x_{m+1}\ldots x_{m+1}}_{\alpha_{m+1}}.$$

Параллельно съ выписанными нами сочетаніями B выпишемъ всѣ сочетанія по n элементовъ изъ $m+n$ буквъ

$$x_1, x_2, \ldots x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_{m+n},$$

но уже безъ повторенія элементовъ. Назовемъ совокупность всѣхъ такихъ сочетаній черезъ C. Предположимъ, что эти новыя сочетанія такъ выписаны, что значекъ каждаго элемента больше значка каждаго предыдущаго слѣва. Мы убѣждаемся сразу, что число сочетаній совокупности B равно числу сочетаній C. Въ самомъ дѣлѣ, если мы прибавимъ соотвѣтственно къ каждому изъ ряда значковъ

$$\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, 2, \ldots 2}_{\alpha_2}, \ldots \underbrace{m+1, m+1, \ldots m+1}_{\alpha_{m+1}}$$

числа ряда

(5) $$0, 1, 2, \ldots n-1,$$

то получимъ нѣкоторое сочетаніе изъ совокупности C, и обратно, если мы вычтемъ тотъ же самый рядъ чиселъ (5) изъ значковъ какого-нибудь сочетанія совокупности C, то получимъ непремѣнно одно изъ сочетаній совокупности B, а такъ какъ отъ прибавленія чиселъ ряда (5) или отъ вычитанія этихъ чиселъ не можетъ изъ одного члена одной изъ группъ B, C получиться два различныхъ члена другой группы, то мы приходимъ къ убѣжденію, что число членовъ группы B равно числу членовъ группы C, и мы получаемъ для числа членовъ формы φ выраженіе

$$C_{m+n}^n = \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{\Pi(m+n)}{\Pi(n)\Pi(m)},$$

гдѣ $\Pi(n) = 1.2.3\ldots n$.

Отсюда получаемъ, что число членовъ цѣлой функціи степени n отъ m буквъ равно C_{m+n}^n.

§ 5.

Дадимъ еще другой выводъ числа членовъ цѣлой функціи. Обозначимъ черезъ N_m^n число членовъ функціи f степени n отъ m перемѣнныхъ независимыхъ.

Группируя члены функціи f по степенямъ, мы представимъ ее въ видѣ суммы формъ различныхъ степеней

$$f = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \cdots + \varphi_1 + \varphi_0,$$

гдѣ φ_k будетъ форма самаго общаго вида степени k отъ нашихъ m перемѣнныхъ независимыхъ.

Такъ, напримѣръ,

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

$$\varphi_2 = ax^2 + bxy + cy^2,\ \varphi_1 = dx + ey,\ \varphi_0 = f.$$

На основаніи соображеній предыдущаго параграфа заключаемъ, что число членовъ формы φ_k есть N_{m-1}^k.

Имѣемъ

(1) $$N_m^n = N_{m-1}^n + N_{m-1}^{n-1} + N_{m-1}^{n-2} + \cdots + N_{m-1}^0.$$

Требуется доказать, что

(2) $$N_k^n = C_{k+n}^n.$$

Формула, очевидно, справедлива при $k=1$, ибо общій видъ цѣлой функціи степени n отъ одной независимой перемѣнной есть

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

и мы имѣемъ

$$N_1^n = n + 1 = C_{n+1}^1 = C_{n+1}^n .$$

Допустимъ справедливость формулы при $k = m - 1$ и выведемъ ея справедливость для $k = m$. Мы имѣемъ

$$N_{m-1}^n + N_{m-1}^{n-1} + \ldots + N_{m-1}^0 = C_{m+n-1}^{m-1} + C_{m+n-2}^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-1},$$

но на основаніи извѣстной теоремы элементарной алгебры имѣемъ

$$C_{m+n-1}^{m-1} + C_{m+n-2}^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} = C_{m+n}^m$$

и получаемъ, сравнивая съ формулой (1), окончательно

$$N_m^n = C_{m+n}^m ,$$

но формула (2) была доказана въ случаѣ $k=1$, слѣдовательно, она будетъ справедлива при $k = 2, 3, 4, \ldots$

Возвышеніе въ степень полинома.

§ 6

Будемъ разсматривать выраженіе

(1) $$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n .$$

Это выраженіе есть, очевидно, форма степени n отъ m буквъ. Въ частномъ случаѣ, если число буквъ равняется двумъ, получаемъ

(2) $$(x_1 + x_2)^n = x_1^n + C_n^1 x_1^{n-1} x_2 + C_n^2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots = \sum C_n^{\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

гдѣ $\alpha_1 + \alpha_2 = n$. Перепишемъ формулу (2) еще такъ

(3) $$(x_1 + x_2)^n = \sum \frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

Покажемъ, что послѣдняя формула (3) можетъ быть обобщена на случай какого-угодно числа m слагаемыхъ, т. е. докажемъ справедливость

слѣдующей формулы

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n = \sum \frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_m)} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_m^{\alpha_m}.$$

Сумма во второй части формулы (4) распространяется на всевозможныя значенія показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, удовлетворяющія равенству

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n. \tag{5}$$

Формулу (4) надо понимать такъ, что, если какой-нибудь изъ показателей, напримѣръ, α_1, равенъ нулю, то надо считать соотвѣтствующій въ знаменателѣ множитель $\Pi(\alpha_1)$ равнымъ 1, т. е. $\Pi(0)=1$. Изъ Теоріи Чиселъ извѣстно, что выраженіе

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_m)}$$

при всякомъ n и при всякихъ α, удовлетворяющихъ равенству (5), есть число цѣлое.

Для доказательства справедливости формулы (4) покажемъ, что, если она справедлива для нѣкотораго показателя n, то она будетъ справедлива и для показателя $n+1$. Итакъ, умножимъ обѣ части равенства (4) на $x_1+x_2+\ldots+x_m$; тогда въ первой части получимъ $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^{n+1}$, а во второй части получимъ

$$\sum A x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_m^{\beta_m}, \tag{6}$$

гдѣ показатели β удовлетворяютъ равенству

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m=n+1.$$

Посмотримъ, чему равенъ коэффиціентъ A въ новой формулѣ. Этотъ коэффиціентъ составляется отъ сложенія коэффиціентовъ формулы (4), соотвѣтствующихъ членамъ съ такими буквенными выраженіями

$$\begin{array}{c} x_1^{\beta_1-1}x_2^{\beta_2}\ldots x_m^{\beta_m}, \\ x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2-1}\ldots x_m^{\beta_m}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_m^{\beta_m-1}, \end{array} \tag{7}$$

ибо отъ умноженія буквенныхъ выраженій (7) послѣдовательно на буквы $x_1, x_2, \ldots x_m$ получится одно и то же буквенное выраженіе, стоящее

въ формулѣ (6) подъ знакомъ суммы, значитъ выходитъ

$$A = \frac{\Pi(n)}{\Pi(\beta_1 - 1)\Pi(\beta_2)\ldots\Pi(\beta_m)} +$$

$$+ \frac{\Pi(n)}{\Pi(\beta_1)\Pi(\beta_2 - 1)\ldots\Pi(\beta_m)} + \ldots + \frac{\Pi(n)}{\Pi(\beta_1)\Pi(\beta_2)\ldots\Pi(\beta_m - 1)},$$

или, такъ какъ

$$\Pi(\beta) = \beta\Pi(\beta - 1),$$

то получаемъ

$$A = \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m)\Pi(n)}{\Pi(\beta_1)\Pi(\beta_2)\ldots\Pi(\beta_m)} = \frac{\Pi(n+1)}{\Pi(\beta_1)\Pi(\beta_2)\ldots\Pi(\beta_m)},$$

и, слѣдовательно,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^{n+1} = \sum \frac{\Pi(n+1)}{\Pi(\beta_1)\Pi(\beta_2)\ldots\Pi(\beta_m)} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_m^{\beta_m},$$

т. е. формула (4) остается справедливой и для показателя $n+1$.

Нужно теперь убѣдиться только, что формула (4) справедлива для $n=1$. Въ самомъ дѣлѣ, если $n=1$, то изъ показателей α одинъ долженъ равняться единицѣ, а всѣ остальные нули.

Выраженіе

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_m)}$$

обращается въ единицу, и формула (4) удовлетворяется. Итакъ, формула (4) есть дѣйствительно формула, дающая цѣлую степень многочлена.

Пусть, напримѣръ, требуется написать коэффиціентъ въ выраженіи $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^{17}$ при членѣ, буквенное выраженіе котораго есть $x_1^5\ x_2^5\ x_3^4\ x_4^3$. По формулѣ (4) получимъ

$$A = \frac{\Pi(17)}{\Pi(5)\Pi(5)\Pi(4)\Pi(3)} = 2.3.7\ 11\ 13\ldots17.$$

§ 7.

Дадимъ еще другое доказательство формулы возвышенія полинома въ степень.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая $x_2 + x_3 + \ldots + x_m = X_1$, получимъ

$$(x_1 + X_1)^n = \sum \frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(n-\alpha_1)} x_1^{\alpha_1} X_1^{n-\alpha_1},$$

но

$$X_1^{n-\alpha_1} = (x_2 + X_2)^{n-\alpha_1} = \sum \frac{\Pi(n-\alpha_1)}{\Pi(\alpha_2)\Pi(n-\alpha_1-\alpha_2)} x_2^{\alpha_2} X_2^{n-\alpha_1-\alpha_2},$$

гдѣ $X_2 = x_3 + x_4 + \ldots + x_m$. Подставляя второе выраженіе въ первое, получимъ

$$(x_1 + x_2 + X_2)^n = \sum \frac{\Pi(n)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\Pi(n-\alpha_1-\alpha_2)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} X_2^{n-\alpha_1-\alpha_2}.$$

Продолжая разсужденіе далѣе придемъ къ требуемой формулѣ

Формула Taylor'a для цѣлыхъ функцій.

§ 8

Разсмотримъ цѣлую функцію $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ отъ m перемѣнныхъ независимыхъ. Поставимъ себѣ задачею разсмотрѣть приращенное значеніе функціи

(1) $$f(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots x_m + \xi_m)$$

гдѣ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ произвольно взятыя приращенія.

Приращенное значеніе (1) будетъ, очевидно, нѣкоторою цѣлою функціею отъ приращеній $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$, коэффиціенты которой будутъ, очевидно, цѣлыми функціями отъ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, другими словами, будетъ имѣть мѣсто слѣдующая формула

(2) $$f(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots x_m + \xi_m) = \sum \frac{\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_m^{\alpha_m}}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_m)} D_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m} f,$$

гдѣ знакомъ $D_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m} f$ обозначена нѣкоторая цѣлая функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. *Покажемъ* теперь, какъ вычислить функцію

(3) $$D_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m} f.$$

Знакъ $D_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m}$, поставленный передъ знакомъ функціи f, обозначаетъ нѣкоторую операцію, которую надо произвести надъ заданной функціей f, чтобы получить функцію (3). Будемъ называть *характеристикой* операціи (3) рядъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$. Если насъ не интересуетъ характеристика въ операціи, то мы будемъ обозначать операцію просто знакомъ D. Тождество (2) опредѣляетъ, очевидно, всѣ свойства операціи D. Прежде всего нужно замѣтить, что операція D обладаетъ слѣдующими двумя замѣчательными свойствами

$$D(f+\varphi)=Df+D\varphi, \tag{4}$$
$$Dcf=cDf.$$

Отсюда мы видимъ, что достаточно умѣть производить операцію D только надъ буквеннымъ выраженіемъ каждаго члена функціи. Разсмотримъ поэтому выраженіе

$$Dx_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m}.$$

На основаніи бинома Newton'а мы имѣемъ

$$(x_1+\xi_1)^{\lambda_1}=\sum\frac{\Pi(\lambda_1)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\lambda_1-\alpha_1)}\xi_1^{\alpha_1}x_1^{\lambda_1-\alpha_1};$$

отсюда приращенное значеніе выраженія

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m}$$

выразится по формулѣ

$$(x_1+\xi_1)^{\lambda_1}(x_2+\xi_2)^{\lambda_2}\ldots(x_m+\xi_m)^{\lambda_m}=\sum\frac{\Pi(\lambda_1)}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\lambda_1-\alpha_1)}\cdot \tag{5}$$
$$\frac{\Pi(\lambda_2)}{\Pi(\alpha_2)\Pi(\lambda_2-\alpha_2)}\cdots\frac{\Pi(\lambda_m)}{\Pi(\alpha_m)\Pi(\lambda_m-\alpha_m)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_m^{\alpha_m}x_1^{\lambda_1-\alpha_1}\ldots x_m^{\lambda_m-\alpha_m}.$$

На основаніи формулы (2) мы замѣчаемъ, что будемъ имѣть равенство

$$D_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots\alpha_m}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m}= \tag{6}$$
$$=\frac{\Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_m)}{\Pi(\lambda_1-\alpha_1)\Pi(\lambda_2-\alpha_2)\ldots\Pi(\lambda_m-\alpha_m)}x_1^{\lambda_1-\alpha_1}x_2^{\lambda_2-\alpha_2}\ldots x_m^{\lambda_m-\alpha_m}$$

Нетрудно убѣдиться, что на основаніи формулы (6) операція D есть не что иное какъ производная взятая отъ функціи $f(x_1, x_2\ldots x_m)$ α_1 разъ по буквѣ x_1, α_2 разъ по буквѣ x_2, ... α_m разъ по буквѣ x_m. Для того, чтобы убѣдиться въ сказанномъ достаточно показать справедливость слѣдующей формулы

$$D_{\beta_1,\,\beta_2,\ldots\beta_m}D_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots\alpha_m}=D_{\alpha_1+\beta_1,\,\alpha_2+\beta_2,\ldots\alpha_m+\beta_m}. \tag{7}$$

Перепишемъ символически это равенство такъ

$$D_\beta D_\alpha=D_{\beta+\alpha}=D_{\alpha+\beta}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ операцію $D_{\beta_1,\,\beta_2,\ldots\beta_m}$ отъ обѣихъ частей формулы (6), получимъ

$$D_\beta D_\alpha = \frac{\Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_m)}{\Pi(\lambda_1-\alpha_1)\Pi(\lambda_2-\alpha_2)\ldots\Pi(\lambda_m-\alpha_m)} D_{\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots\beta_m} x_1^{\lambda_1-\alpha_1} x_2^{\lambda_2-\alpha_2}\ldots x_m^{\lambda_m-\alpha_m}$$

или

$$D_\beta D_\alpha =$$

$$= \frac{\Pi(\lambda_1)\Pi(\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_m)}{\Pi(\lambda_1-\alpha_1-\beta_1)\Pi(\lambda_2-\alpha_2-\beta_2)\ldots\Pi(\lambda_m-\alpha_m-\beta_m)} x_1^{\lambda_1-\alpha_1-\beta_1} x_2^{\lambda_2-\alpha_2-\beta_2}\ldots x_m^{\lambda_m-\alpha_m-\beta_m} =$$

$$= D_{\alpha+\beta},$$

т. е. формула (7) оказывается справедливой.

Формула (7) убѣждаетъ насъ въ томъ, что операціи D съ произвольными характеристиками перестановочны, т. е.

(8) $$D_{\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots\beta_m} D_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\alpha_m} = D_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\alpha_m} D_{\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots\beta_m}.$$

Кромѣ того формулы (5) и (6) убѣждаютъ насъ, что будетъ имѣть мѣсто равенство

(9) $$D_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\alpha_m} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m} = 0$$

всякій разъ, когда элементъ α_i характеристики сдѣлается больше соотвѣтственнаго показателя λ_i.

Свойства (8) и (9) операціи D показываютъ, что всякую операцію съ произвольной характеристикой $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ можно получить, если произвести слѣдующій рядъ простѣйшихъ операцій: α_1 разъ операцію съ характеристикой $1, 0, 0, \ldots 0$; α_2 разъ операцію съ характеристикой $0, 1, 0, \ldots 0$ и т. д., и наконецъ α_m разъ операцію съ характеристикой $0, 0, 0, \ldots 1$. Что же касается этихъ простѣйшихъ операцій, то онѣ представляютъ не что иное какъ простое дифференцированіе по одной изъ перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ,

$$D_{1,0,0,\ldots 0} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m} = \frac{\Pi(\lambda_1)}{\Pi(\lambda_1-1)} x_1^{\lambda_1-1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m} =$$

$$= \lambda_1 x_1^{\lambda_1-1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m},$$

т. е., другими словами, операція съ характеристикой $1, 0, 0, \ldots 0$ есть дифференцированіе по буквѣ x_1.

§ 9.

На основаніи изложеннаго можно для операціи D употреблять обычные знаки Дифференціальнаго Исчисленія, а именно можно писать

$$D_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\alpha_m} f = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} = f^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)}_{x_1^{\alpha_1},\, x_2^{\alpha_2},\,\ldots\, x_m^{\alpha_m}}(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

§ 10.

Формула (2) § 6, которую можно будетъ переписать слѣдующимъ образомъ

$$(1)\quad f(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, \ldots x_m+\xi_m)=\sum \frac{\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_m^{\alpha_m}}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_m)} f^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)}_{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_m^{\alpha_m}},$$

выражаетъ теорему Taylor'a въ приложенiи къ цѣлой функцiи.

Формула Maclaurin'a.

§ 11.

Если мы въ формулѣ (1) § 10 положимъ

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots x_m=0,$$

$$\xi_1=x_1,\ \xi_2=x_2,\ \ldots \xi_m=x_m,$$

то получимъ формулу Maclaurin'a для цѣлой функцiи

$$(1)\quad f(x_1, x_2, \ldots x_m)=\sum \frac{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_m^{\alpha_m}}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_m)} f^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)}_{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_m^{\alpha_m}}(0, 0, \ldots 0).$$

Формула Maclaurin'a даетъ возможность составить выраженiе любого коэффицiента цѣлой функцiи черезъ значенiя частныхъ производныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если заданная цѣлая функцiя имѣетъ видъ

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m)=\sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_m^{\alpha_m},$$

то коэффицiенты ея выражаются по формулѣ

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m}=\frac{1}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_m)} f^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)}_{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots x_m^{\alpha_m}}(0, 0, \ldots 0).$$

§ 12.

Особенно важное значенiе имѣютъ теоремы Taylor'a и Maclaurin'a въ случаѣ одной перемѣнной независимой. Въ этомъ случаѣ, если обозначимъ черезъ n степень цѣлой функцiи $f(x)$, то получимъ слѣдующую формулу Taylor'a

$$(1)\quad f(x+\xi)=f(x)+\xi f'(x)+\frac{\xi^2}{\Pi(2)}f''(x)+\frac{\xi^3}{\Pi(3)}f'''(x)+\ldots+\frac{\xi^n}{\Pi(n)}f^{(n)}(x),$$

и слѣдующую формулу Maclaurin'a

$$(2) \qquad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{\Pi(2)} f''(0) + \frac{x^3}{\Pi(3)} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{\Pi(n)} f^{(n)}(0),$$

Теорема Euler'a.

§ 13.

Примѣнимъ теорему Taylor'a къ нѣкоторой формѣ $\Phi(x_1, x_2, \ldots x_m)$ степени n. На основанiи однородности формы Φ будетъ существовать тождество

$$\Phi(tx_1, tx_2, \ldots tx_m) = t^n \Phi(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Прилагая формулу Taylor'a, будемъ разсматривать выраженiе

$$(1) \qquad \Phi(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots x_m + \xi_m).$$

Дадимъ приращенiямъ значенiя

$$\xi_1 = tx_1, \; \xi_2 = tx_2, \ldots \xi_m = tx_m;$$

тогда выраженiе (1) принимаетъ видъ

$$\Phi\{(1+t)x_1, (1+t)x_2, \ldots (1+t)x_m\} = (1+t)^n \Phi(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

Теорема Taylor'a дастъ, слѣдовательно,

$$(1+t)^n \Phi(x_1, x_2, \ldots x_m) = \sum \frac{(tx_1)^{\alpha_1}(tx_2)^{\alpha_2} \ldots (tx_m)^{\alpha_m}}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2) \ldots \Pi(\alpha_m)} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}\Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Раскладывая первую часть по степенямъ t по формулѣ бинома, приравняемъ въ обѣихъ частяхъ коэффицiенты при нѣкоторой опредѣленной степени t^λ. Получимъ

$$(2) \quad \frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda)\Pi(n-\lambda)} \Phi(x_1, x_2, \ldots x_m) = \sum \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2) \ldots \Pi(\alpha_m)} \cdot \frac{\partial^\lambda \Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Сумма въ послѣдней формулѣ распространяется на всѣ цѣлыя значенiя показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ положительныя или равныя нулю, дающiя въ суммѣ λ.

Перепишемъ формулу (2) въ болѣе удобномъ для запоминанiя видѣ умноженiемъ обѣихъ частей ея на $(\Pi\lambda)$. Получимъ

$$(3) \; n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)\Phi(x_1, x_2, \ldots x_m) = \sum \frac{\Pi(\lambda) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}}{\Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2) \ldots \Pi(\alpha_m)} \cdot \frac{\partial^\lambda \Phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Послѣднее тождество представляетъ весьма важную теорему, указанную въ первый разъ Euler'омъ и часто прилагаемую въ Алгебрѣ.

Особенно важенъ случай $\lambda = 1$. Въ этомъ случаѣ будетъ

$$(4) \qquad n\Phi(x_1, x_2, \ldots x_m) = x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + x_m \frac{\partial \Phi}{\partial x_m};$$

этотъ случай имѣетъ постоянное примѣненіе.

Обращеніе цѣлой функціи въ безконечность.

§ 14.

Разсмотримъ функцію вида

$$(1) \qquad f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n,$$

причемъ будемъ предполагать самый общій случай, что коэффиціенты $p_0, p_1, \ldots p_n$, а также и независимая перемѣнная z могутъ принимать какія угодно комплексныя значенія. Будемъ во всемъ дальнѣйшемъ модуль комплекснаго числа $z = x + iy$ обозначать знакомъ $|z|$, причемъ $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Нетрудно видѣть, что цѣлая функція (1) для всякаго конечнаго значенія z имѣетъ конечное численное значеніе.

Покажемъ теперь, что эта функція обращается въ безконечность при безконечно большомъ значеніи z. Болѣе точно можно формулировать указанное свойство цѣлой функціи такъ. *Сколь бы большимъ ни было задано положительное число C, всегда можно будетъ указать другое положительное число R такое, что будутъ имѣть мѣсто одновременно слѣдующія неравенства*

$$(2) \qquad |z| > R, \quad |f(z)| > C.$$

Обозначимъ для сокращенія модули коэффиціентовъ $p_0, p_1, \ldots p_n$ черезъ $a_0, a_1, \ldots a_n$, а черезъ ρ модуль перемѣнной независимой z. Тогда будемъ имѣть

$$f(z) = z^n \left\{ p_0 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \ldots + \frac{p_n}{z^n} \right\},$$

откуда

$$|f(z)| = \rho^n \left| p_0 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \ldots + \frac{p_n}{z^n} \right|.$$

Примѣняя теорему о томъ, что модуль суммы не больше суммы и не меньше разности модулей слагаемыхъ, можемъ написать слѣдующій рядъ неравенствъ

$$\left|p_0+\frac{p_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}+\ldots+\frac{p_n}{z^n}\right|\geqslant a_0-\left|\frac{p_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}+\ldots+\frac{p_n}{z^n}\right|$$

$$\geqslant a_0-\left(\frac{a_1}{\rho}+\frac{a_2}{\rho^2}+\ldots+\frac{a_n}{\rho^n}\right).$$

Нетрудно видѣть, что при достаточно большомъ значеніи ρ сумма

(3) $$\frac{a_1}{\rho}+\frac{a_2}{\rho^2}+\ldots+\frac{a_n}{\rho^n}$$

можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою, такъ что, напримѣръ, при нѣкоторомъ достаточно большомъ числѣ ρ, удовлетворяющемъ неравенству

(4) $$\rho>\rho_0,$$

гдѣ ρ_0 нѣкоторое соотвѣтственнымъ образомъ подобранное достаточно большое число, сумма (3) будетъ меньше $\frac{a_0}{2}$; тогда получается неравенство

$$\left|p_0+\frac{p_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}+\ldots+\frac{p^n}{z_n}\right|>a_0-\frac{a_0}{2}$$

$$>\frac{a_0}{2}.$$

Остается еще подобрать ρ такимъ образомъ, чтобы было

$$\rho^n\frac{a_0}{2}>C,$$

или

(5) $$\rho>\sqrt[n]{\frac{2C}{a_0}}.$$

Итакъ, если мы черезъ R обозначимъ наибольшее изъ чиселъ ρ_0 и $\sqrt[n]{\frac{2C}{a_0}}$, то мы замѣчаемъ, что неравенство $\rho=|z|>R$ повлечетъ, какъ слѣдствіе, неравенство

$$|f(z)|>C,$$

что и требовалось доказать.

Такъ какъ при возрастаніи числа C будетъ возрастать безпредѣльно также число R_1 то доказанное свойство цѣлой функціи можно кратко выразить такъ: *цѣлая функція обращается въ безконечность только при безконечно большомъ значеніи перемѣнной независимой.*

§ 15.

Существуютъ функціи транцедентныя, которыя обладаютъ свойствомъ обращаться въ безконечность только при безконечно большомъ значеніи независимаго перемѣннаго. Къ числу такихъ функцій принадлежатъ, напримѣръ,

$$\sin z\,,\ \cos z\,,\ e^z, \ldots$$

Такого рода функціямъ даютъ названіе *цѣлыхъ трансцедентныхъ иль голоморфныхъ*

Непрерывность цѣлой функціи.

§ 16.

Покажемъ, что цѣлая функція есть функція *непрерывная* при всякомъ значеніи z независимаго перемѣннаго

Дадимъ перемѣнному независимому приращеніе h, модуль котораго обозначимъ черезъ δ. Покажемъ, что модулю δ можно дать столь малое значеніе, чтобы имѣло мѣсто неравенство

(1) $$|f(z+h)-f(z)|<\varepsilon\,,$$

гдѣ ε произвольно взятое положительное число. По формулѣ Taylor'а имѣемъ

$$f(z+h)-f(z)=h\left\{f'(z)+\frac{h}{1\,.\,2}f''(z)+\ldots\right\}.$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, есть нѣкоторый многочленъ отъ двухъ перемѣнныхъ h и z Если мы будемъ предполагать модуль h меньше 1, то модуль этого многочлена будетъ, очевидно, меньше нѣкотораго положительнаго числа α, которое можно указать такъ: всѣ знаки въ многочленѣ замѣнимъ знакомъ $+$, h замѣнимъ единицей, а перемѣнную z замѣнимъ ея модулемъ ρ. Отсюда получаемъ

$$|f(z+h)-f(z)|<\delta\alpha\,.$$

Стоитъ только удовлетворить неравенству $\delta\alpha<\varepsilon$, какъ и получится искомое неравенство (1).

Непрерывность модуля цѣлой функціи.

§ 17.

Не только сама цѣлая функція, но и ея модуль *непрерывно измѣняется при непрерывномъ измѣненіи* z.

Въ самомъ дѣлѣ, написавъ формулу Taylor'а въ видѣ

$$f(z+h)-f(z)=A,$$

мы замѣчаемъ по предыдущему параграфу, что модуль числа A при достаточно маломъ модулѣ числа h можетъ быть сколь угодно малъ. Получаемъ

$$f(z+h)=f(z)+A$$

и два слѣдующихъ неравенства

$$|f(z)|-|A|\leqq|f(z+h)|\leqq|f(z)|+|A|,$$

$$-|A|\leqq|f(z+h)|-|f(z)|\leqq+|A|,$$

т. е. при безконечно маломъ h разность $|f(z+h)|-|f(z)|$ безконечно мала, и, слѣдовательно, $|f(z)|$ измѣняется непрерывно съ измѣненіемъ z, т. е., другими словами, этотъ модуль есть непрерывная функція отъ двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ x и y, входящихъ въ составъ перемѣнной z.

ГЛАВА II.

Корни цѣлой функціи отъ одной перемѣнной независимой.

Теорема Cauchy.

§ 1.

Пусть дана цѣлая функція

(1) $$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n,$$

коэффиціенты которой $p_0, p_1, \ldots p_n$ суть произвольныя дѣйствительныя или мнимыя числа, а первый изъ нихъ p_0 отличенъ отъ нуля. Всякое число α, которое, будучи подставлено вмѣсто z въ (1) обращаетъ функцію $f(z)$ въ нуль, называется *корнемъ* уравненія $f(z) = 0$; это число, слѣдовательно, удовлетворяетъ условію

$$f(\alpha) = 0.$$

Для краткости будемъ говорить, что α есть *корень функціи* $f(z)$. Разсмотримъ модуль цѣлой функціи $f(z)$. Этотъ модуль будетъ функція отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ, вещественной и мнимой части числа z, функція сохраняющая знакъ плюсъ при всевозможныхъ вещественныхъ значеніяхъ этихъ перемѣнныхъ. Очевидно, что эта функція имѣетъ нижнюю границу, которая не можетъ быть отрицательнымъ числомъ. Такъ какъ эта функція непрерывная, то по извѣстной теоремѣ Weierstrass'a эта функція должна достигать своей низшей границы, т. е., другими словами, эта низшая граница должна быть minimum'омъ разсматриваемаго модуля, или еще иначе нѣкоторымъ частнымъ значеніемъ этого модуля, соотвѣтствующимъ нѣкоторому опредѣленному частному значенію перемѣнной z.

Для доказательства существованія корня цѣлой функціи $f(z)$ достаточно показать, что minimum модуля этой функціи долженъ быть равенъ нулю. Это мы докажемъ, доказавъ теорему Cauchy о томъ, что minimum модуля не можетъ быть больше нуля.

Теорему Cauchy мы формулируемъ такъ.

Если модуль численнаго значенія $f(a)$ заданной функціи, соотвѣтствующаго численному значенію a перемѣннаго независимаго z, больше нуля, то этотъ модуль можно уменьшить прибавкой къ числу a нѣкотораго числа h.

Разсмотримъ самый общій случай, когда при значеніи a сама функція $f(z)$ не обращается въ нуль согласно формулировкѣ теоремы, а рядъ производныхъ

$$f'(z),\ f''(z),\ \ldots f^{(m-1)}(z)$$

обращается въ нуль при $z=a$. По формулѣ Taylor'а имѣемъ

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(a)\,\{1+Q\}, \tag{1}$$

гдѣ

$$Q=\frac{h}{m+1}\cdot\frac{f^{(m+1)}(a)}{f^{(m)}(a)}+\frac{h^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{f^{(m+2)}(a)}{f^{(m)}(a)}+\ldots$$

Подберемъ h удовлетворяющимъ равенству

$$\frac{h^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(a)=-\delta f(a), \tag{2}$$

гдѣ δ нѣкоторая положительная правильная дробь, величину которой можно взять сколь угодно малою. Равенство (1) можно переписать такъ

$$f(a+h)=f(a)-\delta f(a)+\frac{h^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(a)Q=(1-\delta)f(a)+\frac{h^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(a)Q;$$

отсюда

$$|f(a+h)|\leqslant(1-\delta)\,|f(a)|+\left|\frac{h^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(a)\right|.\,|Q|. \tag{3}$$

Такъ какъ Q можно сдѣлать сколь угодно малымъ при достаточно маломъ h, то можно будетъ удовлетворить достаточно малымъ значеніемъ h неравенству

$$|Q|<1,$$

а тогда на основаніи равенства (2) будетъ

$$\left|\frac{h^m}{\Pi(m)}f^{(m)}(a)\right|=\delta\,.\,|f(a)|,$$

или

$$\left|\frac{h^m}{\Pi(m)} f^{(m)}(a)\right| . \; Q \,| < \delta \,. \,|f(a)|\,.$$

Неравенство (3) обращается въ слѣдующее

$$|f(a+h)| < (1-\delta) . |f(a)| + \delta . |f(a)|\,,$$

или

$$|f(a+h)| < |f(a)|\,,$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, мы видимъ, что наименьшее значеніе модуля должно равняться нулю, т. е. *цѣлая функція должна имѣть, по крайней мѣрѣ, одинъ корень.*

Разложеніе цѣлой функціи на линейные множители.

§ 2.

Доказанная теорема Cauchy о существованіи корня цѣлой функціи влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, возможность разложенія цѣлой функціи степени n на n линейныхъ множителей.

Въ самомъ дѣлѣ, если α будетъ корнемъ цѣлой функціи

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n\,,$$

то, какъ извѣстно изъ Элементарной Алгебры, цѣлая функція $f(z)$ будетъ дѣлиться на разность $z-\alpha$, такъ что

$$f(z) = (z-\alpha) f_1(z)\,,$$

гдѣ $f_1(z)$ будетъ цѣлая функція $n-1$ степени. Эта функція въ свою очередь должна имѣть нѣкоторый корень β, такъ что

$$f_1(z) = (z-\beta) f_2(z)\,,$$

гдѣ $f_2(z)$ будетъ опять имѣть корень γ и т. д.

Такимъ образомъ, мы замѣчаемъ, что функцію $f(z)$ можно представить въ такомъ видѣ

(1) $$f(z) = A(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots(z-\xi)\,,$$

гдѣ A нѣкоторое постоянное число, а вторая часть заключаетъ n линейныхъ множителей. Что касается постояннаго числа A, то нетрудно видѣть, что оно равно старшему коэффиціенту p_0 разсматриваемой функціи, такъ что мы получаемъ окончательно слѣдующее разложеніе

(2) $$f(z) = p_0(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots(z-\xi)\,.$$

Послѣдняя формула показываетъ, что теорема о существованіи одного корня цѣлой функціи влечетъ, какъ слѣдствіе, существованіе ряда корней

$$(3) \qquad \alpha, \beta, \gamma, \ldots \xi$$

этой функціи, причемъ число корней (3) должно равняться степени n функціи.

Нетрудно убѣдиться, что *болѣе n различныхъ корней функціи n-ой степени имѣть не можетъ*. Предположимъ обратное; допустимъ, что функція $f(z)$ кромѣ n корней (3) имѣетъ еще корень π отличный отъ предыдущихъ; тогда, подставляя его въ (2), получимъ

$$f(\pi) = p_0(\pi - \alpha)(\pi - \beta)(\pi - \gamma) \ldots (\pi - \xi).$$

Но всѣ множители

$$\pi - \alpha, \; \pi - \beta, \; \ldots \pi - \xi$$

отличны отъ нуля, слѣдовательно, долженъ равняться нулю коэффиціентъ p_0; но если $p_0 = 0$, то также и $p_1 = 0$, ибо въ противномъ случаѣ мы имѣли бы функцію $n-1$ степени, обращающуюся въ нуль при n различныхъ значеніяхъ z; точно также и $p_2 = 0$, однимъ словомъ, всѣ коэффиціенты $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ равны нулю.

Отсюда получается теорема.

Если цѣлая функція $f(z)$ степени n обращается въ нуль при большемъ чѣмъ n числѣ значеній независимой перемѣнной z, то всѣ ея коэффиціенты равны нулю, т. е., другими словами, функція тождественно равна нулю.

Понятіе о кратныхъ корняхъ.

§ 3.

Среди чиселъ ряда (3) предыдущаго параграфа могутъ существовать одинаковыя, такъ что разложеніе функціи на линейные множители можетъ имѣть видъ

$$f(z) = p_0(z - a)^\lambda(z - b)^\mu(z - c)^\nu \ldots,$$

гдѣ $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ цѣлыя числа, удовлетворяющія равенству

$$\lambda + \mu + \nu + \ldots = n,$$

а числа $a, b, c, \ldots$ суть различные между собою корни. Если $\lambda = 1$, то корень a называется *простымъ* корнемъ функціи $f(z)$; если же $\lambda > 1$ то a есть, такъ называемый, *кратный* корень, причемъ число λ носитъ названіе *порядка* или *кратности* этого корня.

Выраженіе коэффиціентовъ функціи черезъ корни.

§ 4.

Предполагая старшій коэффиціентъ цѣлой функціи равнымъ единицѣ, можемъ написать

(1) $$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n).$$

Корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ мы будемъ предполагать какими угодно, или всѣ различными, или нѣкоторые изъ этихъ корней могутъ быть равными между собою. Раскрывая въ правой части уравненія (1) скобки и сравнивая съ первою частью, получимъ слѣдующій рядъ равенствъ

(2) $$\begin{aligned} p_1 &= -\sum \alpha_i, \\ p_2 &= \sum \alpha_i \alpha_k, \\ p_3 &= -\sum \alpha_i \alpha_k \alpha_l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n \sum \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n, \end{aligned}$$

гдѣ въ правой части написаны знаки суммъ всевозможныхъ сочетаній корней по одному, по два, по три, и т. д.

Итакъ, мы видимъ, что коэффиціенты функціи выражаются простыми цѣлыми раціональными функціями отъ корней. Очевидно, что эти же равенства (2) опредѣляютъ обратно корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ черезъ коэффиціенты $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, но эта новая задача представляетъ большія трудности и составляетъ главный предметъ Алгебраическаго Анализа. Вслѣдствіе отсутствія простого авгориѳма для полученія корней по заданнымъ коэффиціентамъ приходится ставить себѣ болѣе простыя задачи, напримѣръ,

1-ая задача: вычислить съ данною степенью точности корни по заданнымъ численнымъ значеніямъ коэффиціентовъ;

2-ая задача: искать свойства корней, когда указанъ характеръ коэффиціентовъ.

Особенно важнымъ представляется слѣдующій частный случай 2-ой задачи. Если коэффиціенты будутъ функціями одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ, то корни, очевидно, будутъ также функціями этихъ перемѣнныхъ независимыхъ. Является важнымъ изучить свойства этихъ функцій, когда коэффиціенты суть заданныя опредѣленнымъ образомъ функціи отъ перемѣнныхъ независимыхъ

Непрерывность корней.

§ 5.

Какіе бы вопросы въ Алгебраическомъ Анализѣ ни затрагивались, всюду встрѣчается необходимость въ доказательствѣ слѣдующаго основного свойства корней уравненія.

Корни уравненія суть непрерывныя функціи его коэффиціентовъ.

Будемъ разсматривать уравненіе вида

$$(1) \qquad f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n = 0$$

съ коэффиціентомъ единица при старшей степени. Коэффиціенты p_1, p_2, ... p_n нѣкоторыя перемѣнныя числа комплексныя или вещественныя. Въ данную минуту для насъ безразлично, будутъ ли эти коэффиціенты функціи отъ какихъ нибудь перемѣнныхъ независимыхъ, или же числа мѣняющіяся какимъ нибудь другимъ образомъ. Разложимъ функцію $f(z)$ на линейные множители

$$f(z) = (z - a)^\lambda (z - b)^\mu (z - c)^\nu \ldots$$

Будемъ измѣнять коэффиціенты уравненія (1) непрерывно, такъ что приращенное значеніе $f_1(z)$ функціи можно представить такъ

$$f_1(z) = \varphi(z) + f(z),$$

гдѣ

$$\varphi(z) = \varepsilon_1 z^{n-1} + \varepsilon_2 z^{n-2} + \ldots,$$

и гдѣ ε_1, ε_2, ... суть безконечно малыя приращенія коэффиціентовъ.

Проведемъ изъ начала координатъ плоскости комплекснаго перемѣннаго кругъ настолько большого радіуса R, чтобы всѣ корни уравненія a, b, c, ... лежали внутри этого круга (см. стр. 13). Около каждаго изъ корней опишемъ кругъ нѣкотораго радіуса; пусть радіусъ круга описаннаго около a будетъ ρ, около b будетъ ρ', около c будетъ ρ'' и т. д. Радіусы круговъ ρ, ρ', ρ'', ... возьмемъ настолько малыми, чтобы круги не пересѣкались между собою и не пересѣкались съ кругомъ R. Достаточно, конечно, взять эти радіусы меньшими половины наименьшаго изъ разстояній между корнями. Обозначимъ буквою g ту часть плоскости, которая находится внутри круга R, но внѣ круговъ описанныхъ около корней; знаками же

$$(\rho),\ (\rho'),\ (\rho''),\ \ldots$$

обозначимъ области внутри круговъ описанныхъ около корней. Будемъ теперь уменьшать до нуля всѣ радіусы ρ, ρ', ρ'', ...

Теорема, которая будетъ выражать непрерывность корней, можетъ быть формулирована такъ.

Теорема. *Сколь-бы малыми ни были заданы радиусы* ρ, ρ', ρ'', ..., *всегда можно подобрать настолько малыя приращенія* ε_1, ε_2, ... *коэффиціентовъ функціи* $f(z)$, *чтобы корни приращенной функціи* $f_1(z)$ *удовлетворяли слѣдующимъ двумъ условіямъ:* 1^0 — *всѣ корни функціи* $f_1(z)$ *лежатъ внутри областей* (ρ), (ρ'), (ρ''), .. *и* 2^0 — *внутри области* (ρ) *лежитъ* λ *корней приращенной функціи, внутри области* (ρ') *лежитъ* μ *корней приращенной функціи, внутри области* (ρ'') *лежитъ* ν *корней, и т. д.*

Для всякой точки z области g будемъ имѣть

$$|z-a|>\rho,\ |z-b|>\rho',\ |z-c|>\rho'',\ \ldots$$

значитъ.

(2) $$|f(z)|>\rho^\lambda\rho'^\mu\rho''^\nu\ldots$$

Покажемъ теперь, что это неравенство (2) для достаточно малыхъ значеній ε_1, ε_2, ... не можетъ имѣть мѣста, если подъ z будемъ разумѣть корень приращеннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть a_1 будетъ корень функціи $f_1(z)$, такъ что

$$f_1(a_1)=0;$$

но

$$f_1(z)=f(z)+\varphi(z),$$

слѣдовательно,

$$f(a_1)+\varphi(a_1)=0,$$

то есть

$$f(a_1)=-\varphi(a_1).$$

Но величина $\varphi(a_1)$ при достаточно малыхъ ε можетъ имѣть сколь угодно малый модуль, слѣдовательно, при достаточно малыхъ величинахъ ε_1, ε_2, ... будетъ имѣть мѣсто

$$|f(a_1)|<\rho^\lambda\rho'^\mu\rho''^\nu\ldots,$$

и неравенство (2) характеризующее область g не удовлетворяется, такъ что при достаточно малыхъ приращеніяхъ коэффиціентовъ корни приращенной функціи не выходятъ изъ областей (ρ), (ρ'), (ρ''), ... Первая часть теоремы такимъ образомъ доказана.

Остается показать, что, если a будетъ имѣть кратность λ, то въ области (ρ) окажется какъ разъ λ корней приращеннаго уравненія. Пусть приращенные корни располагаются такъ: въ области (ρ) находятся корни a_1 кратности λ_1, a_2 кратности λ_2, a_3 кратности λ_3, и т. д.; въ области (ρ') корни b_1 кратности μ_1, b_2 кратности μ_2, b_3 кратности μ_3 и т. д.; въ об-

ласти (ρ'') корни c_1 кратности ν_1, c_2 кратности ν_2, и т. д. Такъ какъ степень приращеннаго уравненія остается та же самая, то должно быть

(3) $$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\mu_1+\mu_2+\ldots+\nu_1+\nu_2+\ldots=n.$$

Необходимо показать, что

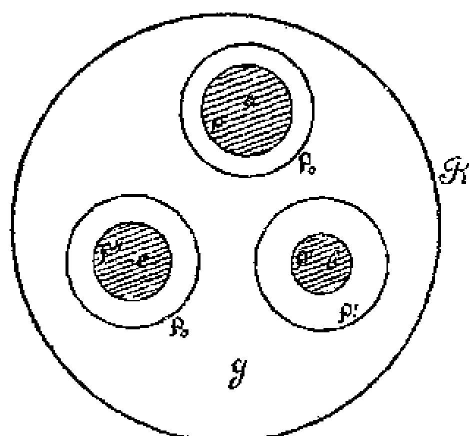
$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots$$
$$\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots$$
$$\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разсмотримъ одну изъ областей около корней, напримѣръ, область (ρ). Тогда, обозначая,

$$f(z)=(z-a)^{\lambda}\psi(z),$$
$$f_1(z)=(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}(z-a_3)^{\lambda_3}\ldots\psi_1(z),$$

гдѣ функціи $\psi(z)$ и $\psi_1(z)$ имѣютъ корни въ другихъ областяхъ, мы замѣчаемъ, что можно указать четыре положительныхъ числа A, B, A_1, B_1, независимыхъ отъ перемѣнныхъ радіусовъ ρ, ρ', ρ'', ...; при которыхъ будутъ имѣть мѣсто неравенства

(4) $$A<|\psi(z)|<B,$$
$$A_1<|\psi_1(z)|<B_1$$



Чер. 1.

для всѣхъ точекъ области (ρ). Въ самомъ дѣлѣ, при уменьшеніи до нуля радіусовъ ρ, ρ', ρ'', ... мы можемъ предполагать, что всѣ эти радіусы становятся и остаются меньше нѣкотораго достаточно малаго радіуса ρ_0: тогда, если мы около всѣхъ корней a, b, c, .. первоначальной функціи опишемъ круги радіуса ρ_0, то изъ слѣдующихъ соображеній получимъ меньшіе предѣлы A и A_1 для модулей $|\psi(z)|$ и $|\psi_1(z)|$. Такъ какъ

$$\psi(z)=(z-b)^{\mu}(z-c)^{\nu}\ldots$$
$$\psi_1(z)=(z-b_1)^{\mu_1}(z-b_2)^{\mu_2}\ldots(z-c_1)^{\nu_1}(z-c_2)^{\nu_2}\ldots$$

то мы замѣчаемъ, что въ составъ модулей

$$|\psi(z)| \text{ и } |\psi_1(z)|$$

входятъ выраженія $|z-\alpha|$, гдѣ z соотвѣтствуетъ точкѣ въ области (ρ), а α есть одно изъ чиселъ

$$b, c, \ldots b_1, b_2, \ldots c_1, c_2, \ldots$$

Такъ какъ α принадлежитъ къ одной изъ другихъ областей (ρ'), (ρ''),..., то мы получимъ низшія границы модулей A и A_1, если вмѣсто всякаго множителя $|z-\alpha|$ напишемъ наименьшее разстояніе между точками двухъ круговъ радіуса ρ_0 соотвѣтствующихъ z и α. Подобнымъ же образомъ, замѣняя каждое изъ выраженій $|z-\alpha|$ разстояніемъ двухъ наиболѣе удаленныхъ точекъ этихъ круговъ, получимъ въ произведеніи два числа B и B_1 бóльшія модулей $|\psi(z)|$ и $|\psi_1(z)|$, такъ что выясняется возможность выбора четырехъ чиселъ A, A_1, B, B_1 независимыхъ отъ перемѣнныхъ радіусовъ ρ, ρ', ρ'', ..., при которыхъ неравенства (4) имѣютъ мѣсто для всѣхъ точекъ области ρ.

Если мы будемъ разсматривать значенія перемѣнной z на самомъ кругѣ ρ, то будемъ имѣть

$$|z-a|=\rho.$$

Изъ равенства

$$f(z)=f_1(z)-\varphi(z)$$

получаемъ неравенство

$$|f(z)|\leqq|f_1(z)|+|\varphi(z)|,$$

или иначе

$$|z-a|^{\lambda}.|\psi(z)|\leqq|\psi_1(z)|.|z-a_1|^{\lambda_1}.|z-a_2|^{\lambda_2}\ldots+|\varphi(z)|.$$

При измѣненіи z по кругу ρ модули $|z-a_1|$, $|z-a_2|$, ... не превосходятъ діаметра 2ρ. Поэтому, принимая во вниманіе неравенства (4), приходимъ къ слѣдующему неравенству

$$\rho^{\lambda}A<2^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots}\rho^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots}.B_1+|\varphi(z)|$$

Такъ какъ величина $|\varphi(z)|$ есть безконечно малая, то, значитъ, можно подобрать приращенія ε_1, ε_2, ... коэффиціентовъ столь малыми, чтобы было

$$|\varphi(z)|<A'\rho^{\lambda},$$

гдѣ A' нѣкоторое положительное число произвольно взятое меньшее числа A. Получаемъ по сокращеніи неравенства на ρ^{λ}

(5) $$A-A'<2^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots}B_1\rho^{-\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\cdots}.$$

Такъ какъ такое неравенство должно имѣть мѣсто при сколь угодно маломъ ρ, то, очевидно, что показатель

$$-\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\ldots$$

надъ буквою ρ во второй части (5) не можетъ быть числомъ положительнымъ, потому что тогда вторая часть, будучи величиной безконечно-малой не могла бы оставаться больше нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго числа $A-A'$. Итакъ, показатель долженъ быть или нуль, или отрицательное число, и мы получимъ

$$\lambda \geqslant \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots \tag{6}$$

Разсуждая совершенно подобнымъ образомъ, мы придемъ къ аналогичнымъ неравенствамъ для остальныхъ корней b, c, ...

$$\begin{aligned} \mu &\geqslant \mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots \\ \nu &\geqslant \nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Но такъ какъ обѣ функціи $f(z)$ и $f_1(z)$, будучи степени n, должны имѣть каждая по n корней, то въ неравенствахъ (6) и (7) должна равняться n сумма какъ первыхъ частей λ, μ, ν, ... такъ и сумма вторыхъ частей. Отсюда вытекаетъ невозможность существованія знаковъ неравенствъ въ формулахъ (6) и (7); такъ что мы получаемъ окончательно

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots \\ \mu &= \mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots \\ \nu &= \nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

чѣмъ и доказывается вторая часть теоремы.

Приближеніе къ нулю нѣсколькихъ старшихъ коэффиціентовъ.

§ 6.

Какъ слѣдствіе доказанной теоремы о непрерывности корней можно будетъ доказать слѣдующее свойство корней цѣлой функціи.

Пусть въ функціи

$$f(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+\ldots+p_{n-1}z+p_n$$

k послѣднихъ коэффиціентовъ

$$p_{n-k+1},\ p_{n-k+2},\ \ldots\ p_n,$$

непрерывно измѣняясь, приближаются къ нулю. Тогда функція наша приближается къ новой функціи

$$f_1(z) = z^k f_2(z),$$

гдѣ

$$f_2(z) = p_0 z^{n-k} + p_1 z^{n-k-1} + \ldots + p_{n-k}.$$

Новая функція $f_1(z)$ имѣетъ число нуль k — кратнымъ корнемъ, остальные корни суть корни функціи $f_2(z)$. Отсюда получаемъ теорему.

Теорема. *При приближеніи къ нулю k послѣднихъ коэффиціентовъ функціи $f(z)$ приближаются къ нулю k корней этой функціи.*

Замѣной z на $\frac{1}{z}$ мы переводимъ уравненіе $f(z) = 0$ въ уравненіе

$$F(z) = 0,$$

у котораго кооэффиціенты идутъ въ обратномъ порядкѣ. Нулевымъ корнямъ перваго будутъ соотвѣтствовать безконечно большіе корни другого. Мы получимъ теорему.

Теорема. *Если въ цѣлой функціи $f(z)$ приближаются къ нулю первые k коэффиціентовъ $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{k-1}$, то k корней функціи безпредѣльно возрастаютъ по абсолютной величинѣ.*

Такъ, напримѣръ, для квадратной функціи

$$ax^2 + bx + c$$

при уменьшеніи коэффиціента a до нуля одинъ корень обращается въ безконечность, а другой приближается къ корню функціи

$$bx + c.$$

Условія, при которыхъ корень a имѣетъ кратность k.

§ 7.

Теорема Taylor'а даетъ возможность написать общій видъ остатка отъ дѣленія функціи $f(z)$ на $(z-a)^k$.

Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ формулу Taylor'а въ такомъ видѣ

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a) + (z-a)^k Q,$$

гдѣ

$$Q = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{z-a}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a) + \frac{(z-a)^2}{(k+2)!}f^{(k+2)}(a) + \ldots$$

Тогда мы видимъ, что отъ дѣленія на $(z-a)^k$ получается частное Q и остатокъ

$$f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a).$$

Чтобы этотъ остатокъ былъ тождественно равенъ нулю, необходимо и достаточно удовлетворить слѣдующимъ равенствамъ

$$(1) \qquad f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots f^{(k-1)}(a)=0.$$

Равенства (1) представляютъ необходимыя условія для того, чтобы корень имѣлъ кратность k. Для полученія достаточныхъ условій, необходимо потребовать, чтобы частное Q не дѣлилось больше на разность $z-a$, т. е., другими словами, должно быть

$$(2) \qquad f^{(k)}(a)\neq 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы корень a имѣлъ кратность k, состоятъ изъ равенствъ (1) и неравенства (2).

Изъ полученныхъ условій легко замѣтить, что, если a есть корень функціи $f(z)$ кратности k, то онъ будетъ корнемъ первой производной кратности $k-1$, корнемъ второй производной кратности $k-2$, и т. д.; въ самомъ дѣлѣ, эти условія

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0,\ f^{(k)}(a)\neq 0$$

если обозначить

$$f'(z)=\varphi(z),$$

даютъ

$$\varphi(a)=0,\ \varphi'(a)=0,\ \ldots \varphi^{(k-2)}(a)=0$$

$$\varphi^{(k-1)}(a)\neq 0.$$

Аналогичныя условія получимъ для второй производной и т. д.

Освобожденіе уравненій отъ кратныхъ корней.

§ 8.

Обозначимъ корни уравненія $f(x)=0$ черезъ

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots a_{k-1},\ a_k,$$

а соотвѣтственныя ихъ кратности черезъ

$$m_1,\ m_2,\ \ldots m_{k-1},\ m_k,$$

тогда функція $f(x)$ будетъ имѣть видъ

$$f(x) = p_0(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_k)^{m_k},$$

гдѣ

(2) $$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n,$$

степени функціи.

На основаніи предыдущаго §-а мы можемъ сказать, что производная $f'(x)$ будетъ имѣть видъ

$$f'(x) = (x - a_1)^{m_1 - 1}(x - a_2)^{m_2 - 1} \ldots (x - a_k)^{m_k - 1} \cdot \varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ цѣлая функція, не имѣющая ни одного изъ корней (1). Обозначивъ черезъ l степень функціи $\varphi(x)$, получимъ

$$n - 1 = m_1 - 1 + m_2 - 1 + \ldots + m_k - 1 + l,$$

откуда, принимая во вниманіе (2), получимъ

$$l = k - 1.$$

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$ будетъ, очевидно, многочленъ

(3) $$(x - a_1)^{m_1 - 1}(x - a_2)^{m_2 - 1} \ldots (x - a_k)^{m_k - 1}.$$

Если всѣ числа

$$m_1, m_2, \ldots m_k$$

равны единицѣ, то общій наибольшій дѣлитель приводится къ единицѣ. Отсюда получаемъ такую теорему.

Теорема. *Если всѣ корни функціи $f(x)$ простые, то эта функція не имѣетъ общихъ дѣлителей съ производной.*

Итакъ, мы видимъ, что всѣ кратные корни цѣлой функціи $f(x)$ суть въ то же время корни общаго наибольшаго дѣлителя (3) функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$.

Если общій наибольшій дѣлитель (3) найденъ, то, раздѣляя на него $f(x)$, получимъ новую функцію

$$f_1(x) = p_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)$$

и новое уравненіе

(4) $$f_1(x) = 0$$

такое, что его корни будутъ совпадать съ корнями (1) заданнаго уравненія, но всѣ эти корни для новаго уравненія (4) будутъ уже простыми.

Итакъ, для нахожденія искомыхъ корней заданнаго уравненія $f(x)=0$ достаточно рѣшить уравненіе (4), которое уже не имѣетъ кратныхъ корней. Изъ курса Элементарной Алгебры извѣстно, что общій наибольшій дѣлитель двухъ многочленовъ находится при помощи послѣдовательныхъ дѣленій, то, слѣдовательно, мы видимъ, что освобожденіе уравненія отъ кратныхъ корней совершается при помощи раціональныхъ дѣйствій и значитъ представляетъ задачу характера элементарнаго.

§ 9.

Обозначимъ черезъ X_1 произведеніе множителей вида

$$x-a,$$

соотвѣтствующихъ простымъ корнямъ a нѣкоторой цѣлой функціи; черезъ X_2 произведеніе множителей вида

$$x-b,$$

соотвѣтствующихъ двукратнымъ корнямъ, взятымъ по одному только разу; и т. д. Тогда получимъ

$$f(x)=X_1X_2^2X_3^3X_4^4\ldots X_k^k,$$

если примемъ коэффиціентъ при наивысшей степени x равнымъ единицѣ и обозначимъ черезъ k наибольшую кратность корней даннаго уравненія;

Обозначимъ черезъ P_1, P_2, ... P_k общіе наибольшіе дѣлители

P_1	для функціи	$f(x)$	и ея производной	$f'(x)$,
P_2	„	P_1	„	P_1',
P_3	„	P_2	„	P_2',
. .				. . .
P_k	„	P_{k-1}	„	P'_{k-1}.

Выраженія каждой изъ функцій P по § 8 будутъ

$$f(x)=X_1X_2^2X_3^3\ldots X_k^k,$$

$$P_1=X_2X_3^2\ldots X_k^{k-1},$$

$$P_2=X_3X_4^2\ldots X_k^{k-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{k-1}=X_k,$$

$$P_k=1.$$

Раздѣляя послѣдовательно: функцію $f(x)$ на P_1, функцію P_1 на P_2, ... функцію P_{k-1} на P_k, и обозначая соотвѣтственныя частныя через Θ_1, Θ_2, ... Θ_k, получимъ

$$\Theta_1 = X_1 X_2 \ldots X_k\,,$$

$$\Theta_2 = X_2 X_3 \ldots X_k\,,$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\Theta_k = X_k\,.$$

Отсюда мы видимъ, что функція Θ_1 дѣлится на Θ_2, функція Θ_2 на Θ_3 и т. д.; производя это дѣленіе, получимъ

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = X_1\,,\ \frac{\Theta_2}{\Theta_3} = X_2\,,\ \ldots\ \frac{\Theta_{k-1}}{\Theta_k} = X_{k-1}\,,\ \Theta_k = X_k\,.$$

Всѣ функціи

$$X_1\,,\ X_2\,,\ \ldots X_k$$

опредѣляются такимъ образомъ посредствомъ *алгебраическаго дѣленія.*

Мы видимъ, что рѣшеніе уравненія $f(x) = 0$ сводится къ рѣшенію уравненій

$$X_1 = 0\,,\ X_2 = 0\,,\ \ldots\ X_k = 0\,,$$

изъ которыхъ каждое имѣетъ уже только простые корни.

§ 10.

Пояснимъ теорію примѣромъ. Пусть требуется освободить отъ кратныхъ корней уравненіе

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0\,.$$

Имѣемъ

$$f'(x) = 6x^5 + 15x^4 - 18x^2 - 6x + 3\,.$$

Будемъ дѣлить на многочленъ

(1) $$\frac{1}{3}f'(x) = 2x^5 + 5x^4 - 6x^2 - 2x + 1$$

функцію $f(x)$, умноживъ ее предварительно на 2.

Напомнимъ, что при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя можно во избѣжаніе дробныхъ коэффиціентовъ умножить на 2 каждый изъ про-

межуточныхъ остатковъ, т. е. можно повести дѣйствіе дѣленія такъ:

$$\begin{array}{l|l}
2x^6+6x^5-12x^3-6x^2+6x+4 & 2x^5+5x^4-6x^2-2x+1 \\
\underline{2x^6+5x^5-6x^3-2x^2+x} & \overline{x+1} \\
\quad x^5-6x^3-4x^2+5x+4 & \\
\quad 2x^5-12x^3-8x^2+10x+8 & \\
\quad \underline{2x^5+5x^4-6x^2-2x+1} & \\
\quad -5x^4-12x^3-2x^2+12x+7 &
\end{array}$$

Дѣлимъ на полученный остатокъ функцію (1), умноживъ предварительно послѣднюю на 5 и умножая на 5 промежуточный остатокъ

$$\begin{array}{l|l}
10x^5+25x^4-30x^2-10x+5 & 5x^4+12x^3+2x^2-12x-7 \\
\underline{10x^5+24x^4+4x^3-24x^2-14x} & \overline{2x+1} \\
\quad x^4-4x^3-6x^2+4x+5 & \\
\quad 5x^4-20x^3-30x^2+20x+25 & \\
\quad \underline{5x^4+12x^3+2x^2-12x-7} & \\
\quad -32x^3-32x^2+32x+32 &
\end{array}$$

Продолжая дѣленіе, получимъ

$$\begin{array}{l|l}
5x^4+12x^3+2x^2-12x-7 & x^3+x^2-x-1 \\
\underline{5x^4+5x^3-5x^2-5x} & \overline{5x+7} \\
\quad 7x^3+7x^2-7x-7 & \\
\quad \underline{7x^3+7x^2-7x-7} & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

Итакъ,

$$P_1=x^3+x^2-x-1;$$

производная отъ P_1 есть

$$P_1'=3x^2+2x-1.$$

Производя дѣленіе

$$\begin{array}{l|l}
3x^3+3x^2-3x-3 & 3x^2+2x-1 \\
\underline{3x^3+2x^2-x} & \overline{x+1} \\
\quad x^2-2x-3 & \\
\quad 3x^2-6x-9 & \\
\quad \underline{3x^2+2x-1} & \\
\quad -8x-8 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^2+2x-1 & x+1 \\
\underline{3x^2+3x} & \overline{3x-1} \\
\quad -x-1 & \\
\quad \underline{-x-1} & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

получимъ

$$P_2 = x + 1 .$$

Далѣе, производя дѣленіе

$$\begin{array}{l|l}
x^6 + 3x^5 - 6x^3 - 3x^2 + 3x + 2 & x^3 + x^2 - x - 1 \\
\underline{x^6 + x^5 - x^4 - x^3} & \overline{x^3 + 2x^2 - x - 2} \\
\quad 2x^5 + x^4 - 5x^3 - 3x^2 & \\
\quad \underline{2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2} & \\
\qquad - x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x & \\
\qquad \underline{- x^4 - x^3 + x^2 + x} & \\
\qquad\quad - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 2 & \\
\qquad\quad \underline{- 2x^3 - 2x^2 + 2x + 2} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

получимъ

$$\Theta_1 = x^3 + 2x^2 - x - 2 ;$$

дѣля

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - x - 1 & x + 1 \\
\underline{x^3 + x^2 - x - 1} & \overline{x^2 - 1} . \\
\quad 0 &
\end{array}$$

получимъ

$$\Theta_2 = x^2 - 1 .$$

Отсюда, производя дѣленіе

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 - x - 2 & x^2 - 1 \\
\underline{x^3 + 2x^2 - x - 2} & \overline{x + 2} \\
\quad 0 &
\end{array}$$

получимъ

$$X_1 = x + 2 , \; X_2 = \frac{\Theta_2}{P_2} = x - 1 , \; X_3 = P_2 = x + 1 .$$

Получаемъ, слѣдовательно,

$$f(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x + 1)^3 ,$$

и заданное уравненіе приводится къ тремъ слѣдующимъ

$$x + 2 = 0 , \; x - 1 = 0 , \; x + 1 = 0 .$$

Корни заданнаго уравненія суть, слѣдовательно, -2, $+1$, -1.

Знакъ цѣлой функціи при безконечно большомъ значеніи независимаго перемѣннаго.

§ 11.

Обратимся къ разсмотрѣнію цѣлыхъ функцій съ вещественными коэффиціентами.

Докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. *При достаточно большихъ по абсолютной величинѣ вещественныхъ значеніяхъ перемѣнной независимой x знакъ цѣлой функціи*

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$$

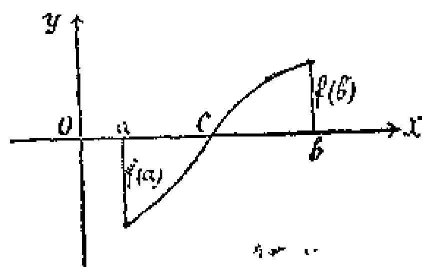
совпадаетъ со знакомъ перваго ея члена.

Въ самомъ дѣлѣ, переписавъ функцію $f(x)$ въ видѣ

$$f(x) = p_0x^n\left\{1 + \frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{1}{x} + \dots + \frac{p_n}{p_0}\cdot\frac{1}{x^n}\right\},$$

мы замѣчаемъ, что сумма всѣхъ членовъ, кромѣ перваго, въ выраженіи, стоящемъ въ скобкахъ, можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою при достаточно большихъ значеніяхъ x. Значитъ, знакъ всей суммы будетъ совпадать со знакомъ p_0x^n при достаточно большихъ значеніяхъ x; теорема такимъ образомъ доказана.

Изъ этой теоремы въ связи съ доказанною раньше непрерывностью функціи $f(x)$ можно вывести нѣсколько важныхъ общихъ замѣчаній. Изъ анализа безконечно малыхъ извѣстно, что всякая непрерывная функція $f(x)$ проходитъ всѣ промежуточныя значенія между каждыми двумя значеніями $f(a)$ и $f(b)$. Отсюда слѣдуетъ, что, если два значенія $f(a)$ и $f(b)$ разныхъ знаковъ, то между значеніями a и b независимаго перемѣннаго должно существовать значеніе c, при которомъ функція $f(x)$ обращается въ нуль, т. е., другими словами, между числами a и b долженъ существовать корень уравненія $f(x) = 0$. На основаніи сказаннаго приходимъ къ слѣдующимъ двумъ теоремамъ.



Чер 2.

Теорема I. *Всякое уравненіе $f(x) = 0$ нечетной степени съ вещественными коэффиціентами должно имѣть по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень.*

Въ самомъ дѣлѣ, предполагая показатель n старшаго члена нечетнымъ, мы замѣчаемъ, что при достаточно большихъ положительныхъ значеніяхъ x знакъ функціи $f(x)$ совпадаетъ съ знакомъ коэффиціента p_0, а при достаточно большихъ отрицательныхъ значеніяхъ знакъ $f(x)$ обратный знаку коэффиціента p_0. Будемъ обозначать черезъ $f(+\infty)$ значеніе функціи $f(x)$ при безконечно большихъ положительныхъ значеніяхъ, а черезъ $f(-\infty)$ значеніе функціи $f(x)$ при безконечно большихъ по абсолютной величинѣ отрицательныхъ значеніяхъ независимаго перемѣннаго.

Тогда $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$ будутъ разныхъ знаковъ, и, значитъ, долженъ существовать по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень функціи $f(x)$ Знакъ его обратный знаку p_n.

Теорема II. *Если крайніе коэффиціенты p_0 и p_n цѣлой функціи четной степени имѣютъ разные знаки, то эта функція имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный и одинъ отрицательный корень.*

Разсматривая три значенія

$$f(-\infty)\,,\; f(0)\,,\; f(+\infty)\,,$$

мы замѣчаемъ, что въ данномъ случаѣ $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$ совпадаютъ по знаку съ коэффиціентомъ p_0, а $f(0)=p_n$; слѣдовательно, уравненіе $f(x)=0$ должно имѣть по крайней мѣрѣ по одному корню въ каждомъ изъ промежутковъ $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Полярная сопряженность мнимыхъ корней.

§ 12.

Теорема. *Если цѣлая функція $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами имѣетъ корень $x=\alpha+\beta i$, то она должна также имѣть и корень $x=\alpha-\beta i$.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$f(\alpha+\beta i)=0\,;$$

раздѣляя функцію $f(x)$ на $(x-\alpha)^2+\beta^2$, получимъ

$$f(x)=\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}Q(x)+mx+n\,.$$

Подставляя сюда $x=\alpha+\beta i$, получимъ

$$m(\alpha+\beta i)+n=0\,,$$

откуда

$$m\alpha+n=0\,,\; m\beta=0\,.$$

Такъ какъ β не $=0$, то $m=n=0$, и функція $f(x)$ дѣлится на

$$(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)\,;$$

отсюда мы замѣчаемъ, что число $\alpha-\beta i$ есть корень функціи $f(x)$.

Легко видѣть, что кратность корня $\alpha-\beta i$ будетъ та же, что и корня $\alpha+\beta i$, ибо равенства

$$f(\alpha+\beta i)=0\,,\; f'(\alpha+\beta i)=0\,,\; f''(\alpha+\beta i)=0\,,\;\ldots$$

влекутъ за собою равенства

$$f(\alpha - \beta i) = 0\,,\ f'(\alpha - \beta i) = 0\,,\ f''(\alpha - \beta i) = 0\,,\ \ldots$$

Итакъ, мнимые корни входятъ въ уравненіе попарно; изъ этого слѣдуетъ, что уравненіе нечетной степени должно имѣть хоть одинъ вещественный корень, что мы уже видѣли изъ другихъ соображеній.

ГЛАВА III.

Объ алгебраическихъ функціяхъ.

Основныя понятія.

§ 1.

Алгебраическимъ уравненіемъ называется всякое уравненіе вида

$$U=0,$$

гдѣ U есть цѣлая функція отъ ряда перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots u, v, \ldots$

§ 2

Если выраженіе функціи задано прямо черезъ независимыя перемѣнныя, то такая функція называется *явною*. Если же для полученія выраженія функціи черезъ независимыя перемѣнныя нужно рѣшить одно или нѣсколько уравненій, то въ такомъ случаѣ функція называется *неявной*. Такъ, напримѣръ, если функція v отъ двухъ перемѣнныхъ x и y задана уравненіемъ

$$v^2-2xv-y^2=0,$$

то v будетъ, очевидно, неявной функціей. Эту неявную функцію мы обратимъ въ явную, если рѣшимъ уравненіе относительно v. Получаемъ

$$v=x\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

§ 3.

Если функція можетъ удовлетворять алгебраическому уравненію, связывающему ее съ перемѣнными независимыми, то она называется *алгебраической функціей*. Въ обратномъ случаѣ она называется *трансцен-*

дентной, т. е., другими словами, функція называется трансцидентною, если нельзя подобрать никакого алгебраическаго уравненія, которому эта функція удовлетворяетъ Такъ, функція

$$v = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

есть алгебраическая, ибо она удовлетворяетъ алгебраическому уравненію

$$v^2 - 2xv - y^2 = 0 .$$

Функція $v = lg\,x$ есть функція трансцендентная, ибо не трудно показать, что она не можетъ удовлетворять никакому алгебраическому уравненію.

§ 4.

Алгебраическія функціи подраздѣляются на *раціональныя* и *ирраціональныя*. Раціональной называется такая алгебраическая функція, которая удовлетворяетъ алгебраическому уравненію первой степени. Если же уравненіе самой низкой степени, которому удовлетворяетъ алгебраическая функція, степени выше первой, то функцію называютъ ирраціональною. Согласно этому опредѣленію всякая раціональная функція v должна удовлетворять уравненію вида

$$Qv - P = 0 ,$$

гдѣ Q и P цѣлыя функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Можно всегда предполагать, что P и Q суть многочлены, не имѣющіе общихъ дѣлителей, заключающихъ независимыя перемѣнныя, ибо, если бы такой дѣлитель существовалъ, то мы предварительно сократили бы на него все уравненіе. Рѣшая послѣднее уравненіе относительно v, получимъ

$$v = \frac{P}{Q} .$$

Это показываетъ, что раціональная функція есть частное двухъ цѣлыхъ функцій. Въ частномъ случаѣ, если Q не будетъ содержать независимыхъ перемѣнныхъ, то это Q будетъ нѣкоторое постоянное число A, тогда

$$v = \frac{1}{A} P ,$$

т. е. v представляетъ собою цѣлую функцію и мы видимъ, что цѣлая функція есть частный случай функціи раціональной.

§ 5.

Если уравненіе, которому удовлетворяетъ ирраціональная функція будетъ второй, третьей и четвертой степени, то мы можемъ его рѣшить и найти явное выраженіе этой функціи черезъ перемѣнныя независимыя. Когда уравненіе выше четвертой степени, то задача приведенія неявной функціи въ явную дѣлается въ общемъ случаѣ невозможною и можетъ рѣшаться только въ извѣстныхъ частныхъ случаяхъ.

Разсмотримъ сначала алгебраическое рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени.

Рѣшеніе уравненій 3-ей степени.

§ 6.

Мы разсмотримъ способъ Hudde'а. Сдѣлаемъ два вспомогательныхъ замѣчанія.

Уравненіе 3-ей степени можемъ разсматривать безъ члена съ x^2, ибо во всякомъ уравненіи n-ой степени *можно уничтожить членъ съ* x^{n-1}. Покажемъ это; пусть дано уравненіе

$$(1) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0;$$

сдѣлаемъ подстановку

$$x = y + \alpha,$$

гдѣ α пока остается неопредѣленнымъ, тогда получимъ въ лѣвой части уравненія (1)

$$(y + \alpha)^n + a_1 (y + \alpha)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(y + \alpha) + a_n = 0,$$

или

$$y^n + (n\alpha + a_1) y^{n-1} + \ldots$$

Чтобы въ преобразованномъ уравненіи пропалъ членъ съ y^{n-1}, достаточно положить

$$n\alpha + a_1 = 0,$$

или

$$\alpha = -\frac{a_1}{n},$$

что всегда возможно.

Другое замѣчаніе состоитъ въ томъ, что уравненіе

$$x^3 - 1 = 0$$

имѣетъ три корня

$$1\,, \quad \varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\,, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\,,$$

что легко провѣрить.

§ 7.

Возьмемъ кубическое уравненіе въ видѣ

(1) $$x^3 + px + q = 0\,.$$

Сдѣлаемъ подстановку

$$x = u + v\,,$$

тогда уравненіе (1) приметъ видъ

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0\,,$$

или, вынося $u + v$ за скобку,

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0\,.$$

Такъ какъ неизвѣстныя величины u и v подчинены только одному условію, чтобы ихъ сумма была x, то мы можемъ связать ихъ еще вторымъ произвольнымъ условіемъ, напримѣръ,

(2) $$3uv + p = 0\,.$$

Тогда уравненіе приметъ видъ

(3) $$u^3 + v^3 + q = 0\,.$$

Уравненія (2) и (3) рѣшить легко, потому что они даютъ сумму и произведеніе количествъ u^3 и v^3, именно

$$u^3 + v^3 = -q\,, \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}\,.$$

Итакъ, u^3 и v^3 суть корни квадратнаго уравненія

$$\xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0\,,$$

откуда

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,,$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,.$$

слѣдовательно,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

и мы получили формулу, носящую названіе формулы Cardan'a, итальянскаго математика 16-го столѣтія, претендовавшаго на пріоритетъ относительно рѣшенія уравненія 3-ей степени.

§ 8.

Полученная формула Cardan'a даетъ всѣ корни кубическаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, всякое число R имѣетъ три значенія кубическаго изъ этого числа корня, причемъ изъ одного изъ нихъ получаются два другихъ черезъ умноженіе на ε и ε^2. Уравненіе (2) показываетъ, что произведеніе uv радикаловъ $u = \sqrt[3]{R}$ и $v = \sqrt[3]{R_1}$ равно вещественному числу $-\frac{p}{3}$. Пусть два такихъ значенія будутъ $\sqrt[3]{R}$ и $\sqrt[3]{R_1}$; тогда получимъ одинъ изъ корней α_1 въ видѣ

$$\alpha = \sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R_1}.$$

Остальныя значенія радикаловъ u и v будутъ $\varepsilon\sqrt[3]{R}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{R}$, $\varepsilon\sqrt[3]{R_1}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{R_1}$. Чтобы ихъ произведенія были вещественны, необходимо выбрать двѣ слѣдующія комбинаціи, дающія два остальныхъ корня кубическаго уравненія

$$\alpha_1 = \varepsilon^2\sqrt[3]{R} + \varepsilon\sqrt[3]{R_1},$$

$$\alpha_2 = \varepsilon\sqrt[3]{R} + \varepsilon^2\sqrt[3]{R_1}.$$

§ 9.

Изслѣдуемъ, когда корни кубическаго уравненія будутъ вещественны. Если

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

то оба числа R и R_1 будутъ вещественны и различны, слѣдовательно, каждое изъ нихъ имѣетъ по одному вещественному кубическому корню. Обозначимъ эти корни черезъ $\sqrt[3]{R}$ и $\sqrt[3]{R_1}$; слѣдовательно, корень

$$\alpha = \sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R_1}.$$

будетъ вещественный, а два другихъ, очевидно, мнимые, ибо

$$(1)\quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon^2\sqrt[3]{R} + \varepsilon\sqrt[3]{R_1} = -\frac{\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R_1}}{2} - \frac{\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{R_1}}{2}\, i\sqrt{3}, \\ \alpha_2 &= \varepsilon\sqrt[3]{R} + \varepsilon^2\sqrt[3]{R_1} = -\frac{\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^1}}{2} + \frac{\sqrt[3]{R}-\sqrt[3]{R_1}}{2}\, i\sqrt{3}, \end{aligned}$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$; такъ какъ $\sqrt[3]{R}$ не $=\sqrt[3]{R_1}$, то мнимые члены не могутъ пропасть. Эти два корня, очевидно, сопряженные.

Если

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0,$$

то $\sqrt[3]{R}=\sqrt[3]{R_1}=\sqrt[3]{\quad\frac{q}{2}}$; два корня будутъ одинаковые, притомъ всѣ три вещественные

$$\alpha = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$\alpha_1=\alpha_2=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Наконецъ, если

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{24}<0,$$

что возможно, очевидно, при $p<0$, получаемъ всѣ три корня вещественные, хотя радикалъ

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

мнимый. Въ этомъ случаѣ два радикала $\sqrt[3]{R}$ и $\sqrt[3]{R_1}$ суть мнимые и сопряженные. Полагая

$$\sqrt[3]{R}=\lambda+i\mu,$$

$$\sqrt[3]{R_1}=\lambda-i\mu,$$

получимъ

$\alpha=2\lambda,$

$\alpha_1=\varepsilon^2(\lambda+i\mu)+\varepsilon(\lambda-i\mu)=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(\lambda+i\mu)+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(\lambda-i\mu)=-\lambda+\mu\sqrt{3},$

$\alpha_2=-\lambda-\mu\sqrt{3}.$

Случай трехъ вещественныхъ корней представляетъ одну замѣчательную особенность въ формулахъ Cardan'a. А именно, хотя всѣ три корня вещественны, но формулы Cardan'a представляютъ ихъ въ такомъ видѣ, что тамъ фигурируютъ мнимости, ибо корень квадратный, стоящій подъ кубическимъ корнемъ, мнимый. Если бы мы пожелали каждый изъ кубическихъ корней $\sqrt[3]{R}$ и $\sqrt[3]{R_1}$ представить подъ видомъ $\lambda + i\mu$, то для опредѣленія чиселъ λ и μ мы получили бы кубическія уравненія подобныя заданному. Такъ, *напримѣръ*, для опредѣленія λ получимъ уравненіе, имѣющее три вещественныхъ корня, и, слѣдовательно, выраженіе для λ будетъ опять заключать мнимость. Этотъ случай мы называемъ *неприводимымъ случаемъ* (casus irreductibilis).

§ 10.

Введеніемъ тригонометрическихъ величинъ возможно привести формулы Cardan'a къ виду, удобному для логариѳмированія, а также и въ неприводимомъ случаѣ можно получить окончательную формулу для трехъ вещественныхъ корней.

Дѣйствительно, при

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

если мы предположимъ

$$-\frac{q}{2} = \rho\cos\varphi, \quad \frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27} = -\rho^2\sin^2\varphi,$$

то формулы Cardan'a примутъ видъ

$$x = \sqrt[3]{\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi} + \sqrt[3]{\rho\cos\varphi - i\rho\sin\varphi}.$$

По формулѣ Moivre'a имѣемъ

$$x = \sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right\} + \sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right\},$$

гдѣ числу k надо давать значенія 0, 1, 2.

Получаемъ слѣдующія выраженія для трехъ корней уравненія

$$\alpha = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$\alpha_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right),$$

$$\alpha_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right).$$

Для опредѣленія же ρ и φ (ρ величина существенно положительная) имѣемъ выраженія

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2\rho}.$$

Дадимъ теперь для случая одного вещественнаго корня формулы, удобныя для логариѳмированія.

I случай.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \quad p < 0.$$

Положимъ

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \sin\omega;$$

тогда

$$\sqrt[3]{R} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{R_1} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

Подставляя вмѣсто q его выраженіе черезъ p, а именно

$$q = \frac{2}{\sin\omega}\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

получимъ

$$\sqrt[3]{R} = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sqrt[3]{tg\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{R_1} = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot \sqrt[3]{cotg\frac{\omega}{2}}.$$

Введемъ новый уголъ ψ такъ, что

$$tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\frac{\omega}{2}},$$

и подставляя, получимъ

$$\sqrt[3]{R} = \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot tg\,\psi, \quad \sqrt[3]{R_1} = -\sqrt{\frac{-p}{3}}\, cotg\,\psi,$$

откуда

$$\alpha = -\sqrt{\frac{-p}{3}}\,(tg\,\psi + cotg\,\psi) = -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\, cosec\, 2\psi.$$

II случай.

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0\,,\ p>0\,.$$

Тогда, полагая

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\,tg\,\theta\,,$$

получимъ

$$\sqrt[3]{R}=\sqrt[3]{\frac{q\,sin^2\frac{\theta}{2}}{cos\,\theta}}\,,\ \sqrt[3]{R_1}=\sqrt[3]{\frac{-q\,cos^2\frac{\theta}{2}}{cos\,\theta}}\,,$$

или, вставивъ вмѣсто q его значеніе

$$q=2\,cotg\,\theta\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,,$$

будемъ имѣть

$$\sqrt[3]{R}=\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{tg\,\frac{\theta}{2}}\,,\ \sqrt[3]{R_1}=-\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{cotg\,\frac{\theta}{2}}\,.$$

Вводя новый уголъ φ по уравненію

$$tg\,\varphi=\sqrt[3]{tg\,\frac{\theta}{2}}\,,$$

получимъ выраженія

$$\sqrt[3]{R}=\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\,tg\,\varphi\,,\ \sqrt[3]{R_1}=-\sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,\varphi\,,$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,2\varphi\,.$$

Формулы для вычисленія мнимыхъ корней также получаются въ удобномъ для логариѳмированія видѣ; въ самомъ дѣлѣ, по формуламъ (1) § 9 получаемъ въ I случаѣ

$$\alpha_1\,,\ \alpha_2=\sqrt{\frac{-p}{3}}\,cosec\,2\psi\pm i\sqrt{-p}\,cotg\,2\psi\,,$$

а во II случаѣ

$$\alpha_1\,,\ \alpha_2=\sqrt{\frac{p}{3}}\,cotg\,2\varphi\pm i\sqrt{p}\,cosec\,2\varphi\,.$$

Рѣшеніе уравненій 4-ой степени.

§ 11.

Мы видѣли, что рѣшеніе кубическаго уравненія приводится къ рѣшенію квадратнаго; подобнымъ же образомъ мы покажемъ, что рѣшеніе уравненія 4-ой степени приводится къ рѣшенію уравненія 3-ьей степени.

Придадимъ нашему изложенію геометрическій характеръ. Возьмемъ самое общее уравненіе 4-ой степени съ вещественными коэффиціентами

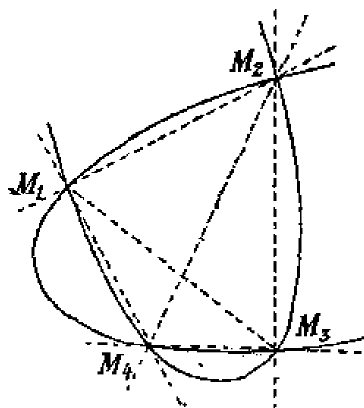
(1) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Полагая

(2) $$y = x^2,$$

мы можемъ переписать уравненіе (1) въ такомъ видѣ

(3) $$y^2 + axy + by + cx + d = 0.$$



Чер. 3

Мы видимъ, что найти x, удовлетворяющее уравненію (1), все равно, что найти абсциссу точки встрѣчи параболы $y = x^2$ съ линіей второго порядка, опредѣляемой уравненіемъ (3).

Четыре корня уравненія 4-й степени (1) суть абсциссы четырехъ точекъ M_1, M_2, M_3, M_4, встрѣчи двухъ линій (2) и (3). Разсмотримъ пучокъ линій 2-го порядка, проходящихъ черезъ точки встрѣчи M_1, M_2, M_3, M_4 двухъ заданныхъ линій (2) и (3). Уравненіе такого пучка будетъ

(4) $$y^2 + axy + by + cx + d + \lambda(y - x^2) = 0.$$

Среди линій пучка (4) существуетъ три системы прямыхъ

$$(M_1M_2,\ M_3M_4),\ (M_1M_4,\ M_2M_3) \text{ и } (M_1M_3,\ M_2M_4).$$

Эти три системы мы получимъ, приравнивая нулю дискриминантъ уравненія второй степени (4). Это уравненіе можно написать такъ

$$y^2 - \lambda x^2 + axy + cx + (b + \lambda)y + d = 0.$$

Условіемъ приводимости линіи (4) къ системѣ двухъ прямыхъ будетъ

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & \frac{a}{2}, & \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2}, & 1, & \frac{b+\lambda}{2} \\ \frac{c}{2}, & \frac{b+\lambda}{2}, & d \end{vmatrix} = 0;$$

раскрывая этотъ опредѣлитель, получимъ уравненіе 3-ьей степени

(5) $$\lambda^3 + 2b\lambda^2 - \lambda(4d - ac \quad b^2) - a(da - cb) - c^2 = 0,$$

относительно λ. Мы уже видѣли, что уравненіе 3-ьей степени всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень; назовемъ его λ_0; подставляя его въ уравненіе пучка (4) и рѣшая относительно y, получимъ два линейныхъ выраженія относительно x

(6) $$y = \alpha x + \beta,$$
$$y = \alpha_1 x + \beta_1.$$

Четыре корня уравненія (1) получаются, находя пересѣченіе параболы $y = x^2$ съ прямыми (6), т. е. рѣшая два квадратныхъ уравненія

(7) $$x^2 - \alpha x - \beta = 0,$$

(8) $$x^2 - \alpha_1 x \quad \beta_1 = 0.$$

Здѣсь мы получаемъ четыре корня, изъ которыхъ два даются уравненіемъ (7), а два уравненіемъ (8).

Разсмотримъ слѣдующіе случаи.

I случай:

$$\alpha^2 + 4\beta > 0, \ \alpha_1^2 + 4\beta_1 > 0.$$

Всѣ четыре корня дѣйствительны, хотя корни уравненія (7) могутъ быть равны корнямъ уравненія (8), и тогда получимъ число различныхъ корней меньшее четырехъ.

II случай:

$$\alpha^2 + 4\beta < 0, \ \alpha_1^2 + 4\beta_1 > 0.$$

Два корня уравненія (7) мнимые сопряженные; два же другихъ изъ уравненія (8) вещественны.

III случай.

$$\alpha^2 + 4\beta < 0, \ \alpha_1^2 + 4\beta_1 < 0.$$

Всѣ четыре корня мнимые и попарно сопряженные.

§ 12.

Пояснимъ теорію примѣромъ. Пусть задано уравненіе

(1) $$x^4 - x^3 \quad 7x^2 + x + 6 = 0\,.$$

Уравненіе (3) § 11 будетъ

$$y^3 - xy - 7y + x + 6 = 0\,;$$

уравненіе пучка

$$\lambda(y - x^2) + y^2 - xy - 7y + x + 6 = 0\,.$$

Подбираемъ λ такъ, чтобы послѣднее уравненіе давало двѣ прямыя; раскрывая дискриминантъ этого уравненія, получимъ уравненіе

$$\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 24) = 0\,.$$

Достаточно взять одинъ корень, напримѣръ,

$$\lambda = 0\,.$$

Тогда уравненіе пучка будетъ

$$y^2 - xy - 7y + x + 6 = 0\,;$$

рѣшая его относительно y, получаемъ

$$y = \frac{x+7}{2} \pm \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{2} = \frac{x+7}{2} \pm \frac{x+5}{2}\,.$$

Два уравненія прямыхъ будутъ

$$y = x + 6\,,\ y = 1\,.$$

Два квадратныхъ уравненія (7) и (8) § 16 будутъ въ данномъ случаѣ:

$$x^2 = 1\,,\ x^2 = x + 6\,.$$

Отсюда четыре искомыхъ корня заданнаго уравненія (1) будутъ

$$x_1 = +1\,,\ x_2 = -1\,,\ x_3 = \quad 2\,,\ x_4 = 3\,.$$

§ 13.

Покажемъ еще одинъ простой способъ рѣшенія уравненія 4-ой степени. Пусть дано общее уравненіе

(1) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Введемъ въ разсмотрѣніе тождество

$$(2) \qquad \left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)^2=x^4+ax^3+x^2\left(2y+\frac{a^2}{4}\right)+ayx+y^2,$$

гдѣ y пока нѣкоторое неопредѣленное число. Прибавляя къ обѣимъ частямъ уравненія (1) соотвѣтственно обѣ части тождества (2), получимъ

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)^2=x^2A+xB+C,$$

гдѣ

$$A=2y+\frac{a^2}{4}-b,$$

$$B=ay-c,$$

$$C=y^2-d.$$

Опредѣлимъ A, B и C такъ, чтобы трехчленъ, стоящій въ правой части (3), былъ полнымъ квадратомъ; для этого необходимо удовлетворить равенству

$$B^2-4AC=0,$$

или, другими словами,

$$(a-yc)^2-4(y^2-d)\left(2y+\frac{a^2}{4}-b\right)=0.$$

Получилось уравненіе 3-ьей степени для опредѣленія y, которое есть, слѣдовательно, резольвента заданнаго уравненія. Это уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень; обозначимъ его черезъ y_0; опредѣляя соотвѣтствующія y_0 значенія A_0, B_0, C_0, получимъ

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+y_0\right)^2=(x\sqrt{A_0}+\sqrt{C_0})^2,$$

откуда получаемъ два уравненія

$$x^2+\frac{a}{2}x+y_0=x\sqrt{A_0}+\sqrt{C_0},$$

$$x^2+\frac{a}{2}x+y_0=-x\sqrt{A_0}-\sqrt{C_0}$$

для опредѣленія x; эти два уравненія и дадутъ четыре корня заданнаго уравненія (1).

Одинъ примѣръ уравненія, рѣшаемаго въ радикалахъ.

§ 14.

Хотя уравненія выше четвертой степени не допускаютъ общаго рѣшенія въ радикалахъ, тѣмъ не менѣе существуютъ многіе случаи уравненій частнаго вида алгебраически разрѣшимыхъ. Одинъ изъ такихъ случаевъ мы здѣсь разсмотримъ.

Возьмемъ цѣлую функцію

(1) $$f(x) = \cos n \arccos x,$$

гдѣ n цѣлое число.

Для ея вычисленія примѣнимъ формулу Moivre'а

$$(\cos \omega + i \sin \omega)^n = \cos n\omega + i \sin n\omega.$$

Раскрывая по биному Newton'а, получимъ

$$\cos n\omega = \cos^n\omega - \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} \cos^{n-2}\omega \sin^2\omega + \ldots =$$

$$= \cos^n\omega - \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} \cos^{n-2}\omega(1 - \cos^2\omega) + \ldots$$

Полагая $\cos \omega = x$, получимъ

$$\cos n \arccos x = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} x^{n-2}(1 - x^2) + \ldots$$

Такъ, напримѣръ,

$$\cos 2 \arccos x = 2x^2 - 1.$$

Разсмотримъ уравненіе

(1) $$\cos n \arccos x = a,$$

гдѣ a произвольная величина.

Рѣшить уравненіе (1), это все равно, что найти $x = \cos \omega$, если извѣстенъ косинусъ кратнаго угла $a = \cos n\omega$.

Имѣемъ

$$\cos n\omega + i \sin n\omega = a + i\sqrt{1 - a^2},$$

$$(\cos \omega + i \sin \omega)^n = a + i\sqrt{1 - a^2},$$

$$\cos \omega + i \sin \omega = \sqrt[n]{a + i\sqrt{1 - a^2}};$$

измѣняя знакъ при i, получимъ

$$\cos\omega - i\sin\omega = \sqrt[n]{a - i\sqrt{1-a^2}},$$

откуда окончательно

$$x = \cos\omega = \frac{1}{2}\left\{\sqrt[n]{a + i\sqrt{1-a^2}} + \sqrt[n]{a - i\sqrt{1-a^2}}\right\}.$$

Общая теорія алгебраическихъ функцій.

§ 15.

Невозможность обращенія въ явную алгебраическихъ функцій, опредѣляемыхъ уравненіями высшихъ степеней, не помѣшала однако прогрессу теоріи алгебраическихъ функцій, пришлось только судить о свойствахъ алгебраическихъ функцій по тому алгебраическому уравненію, которому она удовлетворяетъ, совершенно независимо отъ того, умѣемъ ли мы рѣшить это уравненіе или нѣтъ.

Первоначальнымъ своимъ развитіемъ теорія алгебраическихъ функцій обязана геометріи, ибо алгебраическое уравненіе вида $f(x,y)=0$, гдѣ $f(x,y)$ есть цѣлая функція отъ плоскихъ декартовыхъ координатъ x,y, опредѣляетъ такъ называемую *алгебраическую линію* на плоскости, а уравненіе $f(x,y,z)=0$, гдѣ $f(x,y,z)$ цѣлая функція пространственныхъ координатъ, опредѣляетъ *алгебраическую поверхность* въ пространствѣ.

Всякая наука при начальномъ своемъ состояніи интересуется обыкновенно задачами болѣе конкретными, причемъ чаще всего задачами просто формулируемыми.

Когда простыя задачи оказываются уже рѣшенными и когда многія просто формулируемыя задачи, но своевременно не рѣшенныя, оказываются въ высшей степени трудными, тогда начинается процессъ, состоящій въ углубленіи въ теорію для изученія царствующихъ тамъ законовъ. Это изученіе сопровождается надеждой при болѣе ясномъ представленіи себѣ этихъ законовъ получить возможность рѣшать задачи, казавшіяся ранѣе трудными.

Конечно, можно привѣтствовать направленіе науки, ставящее себѣ цѣлью рѣшать новые конкретные задачи и вопросы. Увеличеніе числа конкретныхъ результатовъ обогащаетъ въ идейномъ отношеніи науку и дѣлаетъ её болѣе способной къ рѣшенію новыхъ задачъ.

Такъ именно было съ теоріей алгебраическихъ функцій. Въ началѣ она была теоріей алгебраическихъ линій и поверхностей. Геометрическіе образы ставили опредѣленныя аналитическія задачи. Можно сказать, что

и вообще при n перемѣнныхъ независимыхъ алгебраическая функція соотвѣтствуетъ нѣкоторому геометрическому образу въ пространствѣ $n+1$ измѣреній; конечно, непосредственная геометрическая интуиція прекращается уже послѣ трехъ измѣреній.

Теорію алгебраическихъ функцій въ ея чистомъ видѣ можно считать восходящей еще къ Newton'у. Newton'у принадлежитъ способъ изучать алгебраическую функцію при помощи ея разложенія въ безконечные ряды. Можно сказать, что этотъ способъ проходитъ красною нитью черезъ всю дальнѣйшую исторію науки до послѣдняго времени. Извѣстенъ особенный пріемъ, помогающій разложенію въ ряды и носящій названіе *параллелограмма Newton'a*.

Дальнѣйшая исторія науки дала только одинъ серьезный толчекъ въ этомъ направленіи, а именно, введеніе въ разсмотрѣніе комплексныхъ значеній независимымъ перемѣннымъ, тогда какъ прежде подъ вліяніемъ геометрическихъ задачъ разсматривались лишь вещественныя числа.

Введеніе чиселъ комплексныхъ помогло приведенію въ порядокъ теоріи функцій алгебраическихъ.

Задачи вычислительнаго характера, а также задачи доказательства различныхъ свойствъ вещественныхъ алгебраическихъ линій и поверхностей замѣняются задачами изученія свойствъ алгебраическихъ функцій. Въ 19-мъ столѣтіи были два обстоятельства, давшія громадный толчекъ въ дѣлѣ развитія теоріи алгебраическихъ функцій, эти два обстоятельства суть: теорема Abel'a и прогрессъ теоріи чиселъ.

Abel'ю принадлежитъ замѣчательная теорема интегральнаго исчисленія, въ которой участвуютъ алгебраическія функціи. Теорема Abel'a дала путь къ большимъ новымъ догадкамъ. Была создана теорія новыхъ трансцендентныхъ функцій, которымъ было присвоено названіе *абелевыхъ* Алгебраическія функціи оказались такъ тѣсно связанными съ абелевыми, что считалось почти обязательнымъ параллельное ихъ изученіе. Главное значеніе абелевыхъ функцій состоитъ въ обобщеніи теоріи эллиптическихъ функцій, представляющей славу математики 19-го столѣтія.

Новый идейный толчекъ въ теоріи алгебраическихъ функцій относится къ самому послѣднему времени и исходитъ изъ теоріи чиселъ.

§ 16

Остановимся нѣсколько подробнѣе на вліяніи теоріи чиселъ. Естественнымъ явилось введеніе въ науку понятія о *числахъ алгебраическихъ*.

Алгебраической *функціей* называется корень уравненія

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

въ которомъ коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ суть цѣлыя *функціи* отъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Алгебраическимъ числомъ называется корень уравненія (1), если коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots a_n$ суть *цѣлыя числа* (взятыя со знакомъ + или — натуральныя числа).

Если число не удовлетворяетъ никакому уравненію (1) съ цѣлыми коэффиціентами, то оно называется *трансцендентнымъ*.

Доказать, что постоянное число есть трансцендентное, гораздо труднѣе, чѣмъ доказать трансцендентность функціи. Лишь во второй половинѣ 19-го столѣтія удалось доказать трансцендентность чиселъ e (основаніе Neper'овыхъ логариѳмовъ) и π (отношеніе окружности къ діаметру).

Трансцендентность числа π показала съ очевидностью невозможность квадратуры круга

Изученіе алгебраическихъ чиселъ даетъ путь къ выясненію вопроса о возможности построенія циркулемъ и линейкой той или другой задачи, въ чемъ можетъ видѣть пользу ихъ любитель конкретныхъ задачъ.

Я же лично вижу пользу изученія алгебраическихъ чиселъ главнымъ образомъ въ тѣхъ грандіозныхъ обобщеніяхъ, которыя достижимы въ теоріи чиселъ, и которыя были начаты въ книгѣ Gauss'a „Disquisitiones arithmeticae".

Развитіе теоріи алгебраическихъ чиселъ въ 19-мъ столѣтіи привело къ открытію первостепенной важности, къ открытію новыхъ чиселъ, названныхъ *идеальными*, или *идеалами*.

Явилось стремленіе перенести блестящіе результаты, достигнутые въ теоріи алгебраическихъ чиселъ на теорію функцій алгебраическихъ. Это теченіе только что началось благодаря изслѣдованіямъ Dedekind'a и Weber'a, двухъ первоклассныхъ знатоковъ теоріи идеаловъ.

§ 17.

Изъ всего сказаннаго читатель пойметъ, что теорія алгебраическихъ функцій есть обширная часть современной математики, имѣющая богатую литературу. Можно порекомендовать, какъ хорошій очеркъ этой литературы, статью A. Brill'a и M. Noeter'a подъ заглавіемъ „Die Etwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit", помѣщенную въ III томѣ Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigund. 1894. Въ этомъ очеркѣ не затронуто новое направленіе Dedekind'a и Weber'a. Чтобы скорѣе познакомиться съ нимъ можно порекомендовать конецъ третьяго тома „Lehrbuch der Algebra" Weber'a и большое сочиненіе „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen" von K. Hensel und G. Landsberg.

Отъ сближенія теоріи алгебраическихъ чиселъ и функцій выиграла также теорія чиселъ, ибо разложеніе функцій въ ряды навело Hensel'a на открытіе такъ называемыхъ *p-адическихъ* чиселъ.

Несмотря на то, что эти числа встрѣчены нѣсколько холодно математиками, я продолжаю придавать имъ значеніе, особенно послѣ послѣдней книги Hensel'a „Zahlentheorie" 1913.

Теорія алгебраическихъ чиселъ не можетъ входить, конечно, въ программу моей книги, тѣмъ не менѣе я не считаю возможнымъ умолчать о нѣкоторыхъ результатахъ, относящихся къ алгебраическимъ функціямъ.

§ 18

Раціональная функція.

Ограничимся разсмотрѣніемъ раціональныхъ функцій отъ одной независимой перемѣнной

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

гдѣ $f(x)$ и $F(x)$ цѣлыя функціи.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ слѣдующихъ двухъ основныхъ свойствъ раціональныхъ функцій:

1⁰ разложеніе раціональныхъ функцій на простѣйшія дроби,

2⁰ разложеніе раціональныхъ функцій въ, такъ называемые, *возвратные* ряды.

Разложеніе раціональныхъ функцій на простѣйшія дроби.

§ 19.

Относительно разложенія раціональныхъ функцій на простѣйшія достаточно обратить вниманіе на слѣдующую общую теорему.

Если знаменатель $F(x)$ раціональной функціи можетъ быть представленъ въ видѣ

$$F(x) = \{\Phi(x)\}^m \{\Psi(x)\}^n \dots \{\Omega(x)\}^p,$$

гдѣ

$$\Phi(x),\ \Psi(x),\ \dots \Omega(x)$$

цѣлыя функціи, то будетъ всегда существовать слѣдующее тождество

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Pi(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\{\Phi(x)\}^m} + \frac{\varphi_2(x)}{\{\Phi(x)\}^{m-1}} + \dots + \frac{\varphi_m(x)}{\Phi(x)} +$$

$$+ \frac{\psi_1(x)}{\{\Psi(x)\}^n} + \frac{\psi_2(x)}{\{\Psi(x)\}^{n-1}} + \dots + \frac{\psi_n(x)}{\Psi(x)} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{\omega_1(x)}{\{\Omega(x)\}^p} + \frac{\omega_2(x)}{\{\Omega(x)\}^{p-1}} + \dots + \frac{\omega_p(x)}{\Omega(x)},$$

гдѣ $\Pi(x)$ *есть нѣкоторая цѣлая функція, и всѣ числители* $\varphi, \psi, \ldots \omega$ *суть также цѣлыя функціи, причемъ степени функцій* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_m(x)$ *ниже степени* $\Phi(x)$, *степени функцій* $\psi_1(x); \psi_2(x), \ldots \psi_n(x)$ *ниже степени функціи* $\Psi(x)$, *и т. д., наконецъ, степени функцій* $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots \omega_p(x)$ *ниже степени* $\Omega(x)$.

Разложеніе это совершается однимъ только способомъ и представляетъ изъ себя то, что называютъ обыкновенно разложеніемъ раціональной функціи на простѣйшія дроби.

Мы не будемъ разсматривать теорему въ высказанномъ общемъ видѣ, а ограничимся наиболѣе важными въ приложеніяхъ случаями, когда всѣ функціи

$$\Phi(x), \Psi(x), \ldots \Omega(x)$$

не выше второй степени, т. е. или 1-ой, или 2-ой. Разсужденія объ этихъ болѣе простыхъ случаяхъ теоремы мы поведемъ такимъ образомъ, чтобы изъ этихъ разсужденій непосредственно вытекала справедливость теоремы въ общемъ случаѣ.

§ 20.

Предположимъ, что знаменатель $F(x)$ раціональной дроби имѣетъ такой видъ

$$F(x) = (x-a)^m F_1(x),$$

причемъ функція $F_1(x)$ не дѣлится уже на $x-a$. Покажемъ, что въ этомъ случаѣ существуетъ тождество

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{m-1}F_1(x)}, \tag{1}$$

гдѣ A постоянное число, а $f_1(x)$ нѣкоторая цѣлая функція.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ разность

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{A}{(x-a)^m} = \frac{f(x) - AF_1(x)}{(x-a)^m F_1(x)}.$$

Покажемъ, что коэффиціентъ A можно будетъ подобрать такимъ образомъ, чтобы числитель $f(x) - AF_1(x)$ дѣлился на $x-a$. Для этого замѣтимъ, что, если нѣкоторая цѣлая функція дѣлится на $x-a$, то она должна обращаться въ нуль при подстановкѣ $x=a$, и мы получаемъ

$$f(a) - AF_1(a) = 0. \tag{2}$$

Нетрудно убѣдиться, что не равны нулю $f(a)$ и $F(a)$. Въ самомъ дѣлѣ, не можетъ равняться нулю $F_1(a)$, ибо мы предположили, что функ-

ція $F_1(x)$ не дѣлится на $x - a$; совершенно подобнымъ образомъ мы должны считать отличнымъ отъ нуля $f(a)$, ибо предположеніе, что $f(x)$ дѣлится на $x - a$ имѣло бы слѣдствіемъ, что заданная раціональная дробь сокращается на $x - a$, а, понятно, мы имѣемъ право предполагать заданную дробь несократимой.

Итакъ, уравненіе (2) даетъ для коэффиціента A слѣдующее отличное отъ нуля и безконечности значеніе

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)}, \tag{3}$$

при которомъ цѣлая функція

$$f(x) - AF_1(x) \tag{4}$$

будетъ цѣлиться нацѣло на $x - a$; тогда можно будетъ написать

$$f(x) - AF_1(x) = (x - a)f_1(x),$$

гдѣ знакомъ $f_1(x)$ обозначено частное отъ дѣленія функціи (4) на $x - a$. Отсюда раздѣляя на $F(x)$ и получимъ тождество (1)

Напримѣръ, изъ дроби

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^3(x^2-2x-2)}$$

можно будетъ выдѣлить часть вида

$$\frac{A}{(x+1)^3},$$

причемъ останется выраженіе вида

$$\frac{f_1(x)}{(x+1)^2(x^2-2x-2)}.$$

Мы замѣчаемъ, что въ данномъ случаѣ

$$f(x) = x^2+3, \; F_1(x) = x^2-2x-2.$$

Требуется подобрать A такимъ образомъ, чтобы выраженіе

$$x^2+3-A(x^2-2x-2) \tag{5}$$

дѣлилось на $x+1 = x-(-1)$. Подставляя въ (5) $x = -1$, получимъ $A = 4$.

Послѣ подстановки $A = 4$ въ выраженіе (5) получимъ функцію

$$-3x^2+8x+11,$$

дѣлящуюся нацѣло на $x+1$

$$\begin{array}{l|l} -3x^2+8x+11 & x+1 \\ \hline -3x^2-3x & -3x+11 \\ \quad\quad 11x+11 & \\ \quad\quad 11x+11 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

такъ что

$$f_1(x) = -3x+11 .$$

Итакъ, получаемъ тождество

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^3(x^2-2x-2)} = \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{-3x+11}{(x+1)^2(x^2-2x-2)} .$$

§ 21.

На основаніи соображеній предыдущаго параграфа мы замѣчаемъ, что получается слѣдующее разложеніе раціональной функціи предыдущаго параграфа

(1) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{F_1(x)} .$$

Разлагая функцію $F_1(x)$ на линейные множители, получимъ

$$F_1(x) = (x-c)^r \ldots (x-l)^p ,$$

откуда, примѣняя тѣ же разсужденія, получимъ слѣдующее окончательное разложеніе функціи

(2) $$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \\ &+ \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{x-b} + \\ &\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^p} + \frac{L_1}{(x-l)^{p-1}} + \ldots + \frac{L_{p-1}}{x-l} + \Pi(x) , \end{aligned}$$

представляющее изъ себя частный случай общей теоремы § 19, а именно тотъ случай, когда

$$\Phi(x) = x-a ,\ \Psi(x) = x-b ,\ \ldots\ \Omega(x) = x-l .$$

§ 22.

Хотя соображенія § 20 достаточны для вычисленія всѣхъ коэффиціентовъ

$$A, A_1, \ldots B, B_1, \ldots L, L_1; \ldots$$

но мы укажемъ еще одинъ способъ вычисленія этихъ коэффиціентовъ, очень удобный на практикѣ. Мы назовемъ этотъ способъ *способомъ дѣленія*

Подставимъ въ формулу (1) § 4 новую перемѣнную z, опредѣляемую равенствомъ

$$x = a + z;$$

тогда получаемъ

$$\frac{f(a+z)}{F(a+z)} = \frac{A}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{z} + \frac{\varphi(a+z)}{F_1(a+z)}.$$

Но на основаніи равенства

$$F(x) = (x-a)^m F_1(x)$$

получаемъ

$$F(a+z) = z^m F_1(a+z),$$

слѣдовательно,

$$(1)\quad f(a+z) = (A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{m-1} z^{m-1}) F_1(a+z) + z^m \varphi(a+z).$$

Послѣднее тождество показываетъ, что полиномъ

$$(2)\qquad A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{m-1} z^{m-1}$$

можетъ быть найденъ алгебраическимъ дѣленіемъ полинома $f(a+z)$ на полиномъ $F_1(a+z)$, причемъ остаткомъ отъ такого дѣленія должно быть выраженіе

$$z^m \varphi(a+z).$$

Способъ полученія полинома (2) при помощи алгебраическаго дѣленія настолько простъ, что его достаточно пояснить на одномъ примѣрѣ.

Пусть дана раціональная дробь

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^3(x^2-2x-2)}.$$

Полагая $x+1=z$ или $x=-1+z$, получимъ

$$f(x) = x^2 + 3 = (-1+z)^2 + 3 = 4 - 2z + z^2$$

$$F_1(x) = x^2 - 2x - 2 = (-1+z)^2 - 2(-1+z) - 2 = 1 - 4z + z^2.$$

Будемъ дѣлить теперь выраженіе $4-2z+z^2$ на выраженіе $1-4z+z^2$, причемъ оба выраженія будемъ предполагать расположенными по возрастающимъ степенямъ буквы z; тогда наибольшія степени остатковъ будутъ возрастать. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{array}{l|l}
4-2z+z^2 & 1-4z+z^2 \\
\hline
4-16z+4z^2 & 4+14z+53z^2 \\
\quad 14z-3z^2 & \\
\quad 14z-56z^2+14z^3 & \\
\qquad 53z^2-14z^3 & \\
\qquad 53z^2-212z^3+53z^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 198z^3-53z^4 &
\end{array}$$

Итакъ, мы видимъ, что въ нашемъ случаѣ полиномъ $A+A_1z+A_2z^2+\ldots$ есть не что иное какъ

$$4+14z+53z^2,$$

а остатокъ $z^m\varphi(a+z)$ есть

$$z^3(198-53z),$$

и, значитъ, $\varphi(a+z)=198-53z$ и

$$\varphi(x)=198-53(x+1)=145-53x.$$

Итакъ, получаемъ разложеніе

$$\frac{x^2+3}{(x+1)^3(x^2-2x-2)}=\frac{4}{(x+1)^3}+\frac{14}{(x+1)^2}+\frac{53}{x+1}+\frac{145-53x}{x^2-2x-2}.$$

§ 23.

Особаго вниманія заслуживаетъ случай, когда всѣ корни знаменателя $F(x)$ простые, т. е., когда $m=1$, $n=1$, ... $p=1$, и мы имѣемъ

(1) $$F(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

Формула разложенія принимаетъ видъ

(2) $$\frac{f(x)}{F(x)}=\Pi(x)+\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}.$$

Пусть степень знаменателя $F(x)$ будетъ n. Введемъ въ разсмотрѣніе цѣлыя функціи $n-1$ степени

$$\frac{F(x)}{x-a}=F_1(x);\ \frac{F(x)}{x-b}=F_2(x),\ \ldots\ \frac{F(x)}{x-l}=F_n(x).$$

Тогда умножая на $F(x)$ равенство (2), получимъ

(3) $$f(x) = \Pi(x) \, . \, F(x) + \Omega(x),$$

гдѣ $\Omega(x)$ есть цѣлая функція не выше $n-1$, потому что ея выраженіе есть

$$AF_1(x) + BF_2(x) + \ldots + LF_n(x).$$

Равенство (3) показываетъ, что цѣлая функція $\Pi(x)$ есть частное отъ дѣленія $f(x)$ на $F(x)$, а $\Omega(x)$ есть остатокъ отъ этого дѣленія и мы получаемъ

(4) $$\frac{\Omega(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

Обратимъ вниманіе на формулу (4). Это есть формула, предложенная Lagrange'емъ для теоріи интерполированія и потому называется *интерполяціонной формулой* Lagrange'а.

Lagrange показалъ хорошій способъ вычисленія коэффиціентовъ A, B, ... L. Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части равенства (4) на $x-a$, мы получимъ

$$\frac{\Omega(x)}{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)} = A + (x-a)\left\{\frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}\right\};$$

подставляя $x = a$, получаемъ

$$\frac{\Omega(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} = A.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\frac{\Omega(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} = B, \ \ldots \ \frac{\Omega(l)}{(l-a)(l-b)(l-c)\ldots} = L.$$

Покажемъ еще другой способъ вычисленія коэффиціентовъ, разлагая знаменателя функціи по формулѣ Tailor'а. Получаемъ.

$$F(x) = F(a) + (x-a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a) + \ldots$$

Такъ какъ a есть одинъ изъ корней знаменателя, то будетъ имѣть мѣсто равенство

$$F(a) = 0,$$

и мы получаемъ

$$\frac{F(x)}{x-a} = F'(a) + \frac{x-a}{1.2}F''(a) + \ldots,$$

или иначе

$$F_1(x) = F'(a) + \frac{x-a}{1\,.\,2} F''(a) + \ldots$$

Подставляя въ послѣднее тождество $x = a$, получимъ

$$F_1(a) = F'(a)\,.$$

Подобнымъ образомъ получимъ

$$F_2(b) = F'(b)\,, \quad \ldots\; F_n(l) = F'(l)\,,$$

и мы получаемъ

$$A = \frac{\Omega(a)}{F_1(a)} = \frac{\Omega(a)}{F'(a)}\,, \quad B = \frac{\Omega(b)}{F'(b)}\,, \; \ldots \; L = \frac{\Omega(l)}{F'(l)}\,.$$

Такимъ образомъ формулу Lagrange'а можно переписать такъ

$$\frac{\Omega(x)}{F(x)} = \sum \frac{\Omega(\alpha)}{F'(\alpha)} \cdot \frac{1}{x-\alpha}\,,$$

гдѣ $\sum$ распространяется на всѣ корни α знаменателя $F(x)$.

§ 24.

Выведенное въ § 21 разложеніе раціональной дроби на простѣйшія представляетъ на практикѣ неудобство, состоящее въ томъ, что нѣкоторые изъ корней знаменателя могутъ оказаться мнимыми. Чтобы избѣжать введенія мнимости, покажемъ другой способъ разложенія дробей на простѣйшія. Мы видѣли уже, что мнимые корни цѣлыхъ функцій съ вещественными коэффиціентами входятъ попарно, причемъ *всякому* корню $\alpha + \beta i$ соотвѣтствуетъ корень $\alpha - \beta i$, и сама функція дѣлится на квадратное выраженіе вида

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2\,.$$

Поэтому, если мы желаемъ ограничиться разсмотрѣніемъ чиселъ вещественныхъ, то можно знаменателя $F(x)$ разложить на линейныхъ и квадратныхъ множителей слѣдующимъ образомъ

$$F(x) = (x-a)^{m_1}(x-b)^{n_1}\ldots(x-l)^{p_1}(x^2+px+q)^m(x^2+rx+s)^n\ldots(x^2+tx+u)^p,$$

гдѣ всѣ числа

$$a\,,\; b\,,\; \ldots\; p\,,\; q\,,\; r\,,\; s\,,\; \ldots\; t\,,\; u$$

вещественныя, а трехчлены

$$x^2+px+q\,,\; x^2+rx+s\,,\;\ldots\; x^2+tx+u$$

не имѣютъ вещественныхъ корней.

Пусть

$$F(x)=(x^2+px+q)^m F_1(x)\,.$$

Докажемъ слѣдующее предложеніе:

Предполагая, что функція $F_1(x)$ не имѣетъ общихъ корней съ трехчленомъ

$$x^2+px+q\,,$$

можно всегда подобрать два числа P и Q и цѣлую функцію $\varphi(x)$, чтобы было

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}F_1(x)}\,.$$

Для доказательства высказанной теоремы воспользуемся слѣдующимъ тождествомъ

$$\frac{f(x)}{F(x)}-\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}=\frac{f(x)-(Px+Q)F_1(x)}{(x^2+px+q)^m F_1(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-(Px+Q)F_1(x)}{x^2+px+q}}{(x^2+px+q)^{m-1}F_1(x)}\,,$$

изъ котораго мы получаемъ для искомой функціи $\varphi(x)$ выраженіе

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-(Px+Q)F_1(x)}{x^2+px+q}\,. \tag{1}$$

Послѣднее выраженіе будетъ дробнымъ при всевозможныхъ численныхъ значеніяхъ P и Q за исключеніемъ одной системы численныхъ значеній, которую мы сейчасъ получимъ. Итакъ, поставимъ себѣ задачею подобрать числа P и Q такимъ образомъ, чтобы выраженіе (1) было функціей цѣлой. Для облегченія задачи раздѣлимъ предварительно функціи $f(x)$ и $F_1(x)$ на квадратное выраженіе

$$x^2+px+q\,;$$

пусть частныя, полученныя отъ дѣленія будутъ $\psi(x)$ и $\omega(x)$, а остатки

$$\alpha x+\beta \quad \text{и} \quad \gamma x+\delta\,,$$

такъ что

$$\begin{aligned} f(x)&=\psi(x)(x^2+px+q)+\alpha x+\beta\,,\\ F_1(x)&=\omega(x)(x^2+px+q)+\gamma x+\delta\,. \end{aligned} \tag{2}$$

На основаніи послѣднихъ равенствъ выраженіе (1) можно представить такъ

$$\varphi(x)=\psi(x)\quad(Px+Q)\omega(x)+\frac{\alpha x+\beta-(Px+Q)(\gamma x+\delta)}{x^2+px+q}.$$

Производя дѣленіе, получимъ

$$\begin{array}{l|l} P\gamma x^2+(\alpha-P\delta-Q\gamma)x+\beta-Q\delta & x^2+px+q \\ \hline -P\gamma x^2-Pp\gamma x-P\gamma q & P\gamma \\ \hline (\alpha-P\delta-Q\gamma+Pp\gamma)x+\beta-Q\delta+P\gamma q & \end{array}$$

чтобы дѣленіе совершилось нацѣло, т. е., чтобы функція $\varphi(x)$, какъ мы желаемъ, была цѣлой, необходимо и достаточно, чтобы остатокъ отъ послѣдняго дѣленія тождественно равнялся нулю, и мы получаемъ слѣдующихъ два уравненія

$$(3)\qquad \begin{aligned} P(\delta-\gamma p)+Q\gamma&=\alpha\,, \\ -P\gamma q\qquad +Q\delta&=\beta \end{aligned}$$

для опредѣленія P и Q. Покажемъ, что систему (3) всегда можно рѣшить относительно P и Q; для этой цѣли достаточно показать, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \delta-\gamma p, & \gamma \\ -\gamma q\,; & \delta \end{vmatrix}=\delta^2-\gamma\delta p+\gamma^2 q$$

отличенъ отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ цѣлая функція $F_1(x)$, по предположенію, не дѣлится на x^2+px+q, то, значитъ, остатокъ $\gamma x+\delta$ не можетъ тождественно равняться нулю, т. е. не могутъ обращаться въ нуль два числа γ и δ.

1⁰. $\gamma=0$.

Тогда δ не должно равняться нулю, а тѣмъ самымъ окажется отличнымъ отъ нуля и выраженіе

$$\delta^2-\gamma\delta p+\gamma^2 q.$$

2⁰. γ не $=0$.

Если мы допустимъ, что будетъ

$$(4)\qquad \delta^2-\gamma\delta p+\gamma^2 q=0,$$

то придемъ къ противорѣчію съ поставленными въ теоремѣ условіями; въ самомъ дѣлѣ, равенство (4) можетъ быть переписано такъ

$$\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2+p\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+q=0,$$

и, слѣдовательно, число $-\frac{\delta}{\gamma}$ оказывается корнемъ трехчлена x^2+px+q, а тогда, подставляя во второе изъ уравненій (2) $x=-\frac{\delta}{\gamma}$, получимъ

$$F_1\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)=\omega\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)\left\{\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2+p\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+q\right\}+\gamma\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+\delta;$$

въ правой части получается тождественно нуль, и, значитъ, $F_1(x)$ имѣетъ общій корень $-\frac{\delta}{\gamma}$ съ трехчленомъ x^2+px+q, что противорѣчитъ предположенію.

Итакъ, система (3) допускаетъ опредѣленное рѣшеніе относительно неизвѣстныхъ P и Q; такъ что устанавливается возможность однимъ только способомъ выдѣлить изъ дроби

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^m F_1(x)}$$

простѣйшую дробь

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m},$$

причемъ остается дробь

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}F_1(x)},$$

гдѣ $\varphi(x)$ цѣлая функція.

Разсмотримъ численный примѣръ:

$$\frac{3x^3+1}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{Px+Q}{(x^2+1)^2}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Согласно теоріи надо подобрать P и Q такимъ образомъ, чтобы

$$3x^3+1-(Px+Q)(x-1)$$

дѣлилось нацѣло на x^2+1. Произведемъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-Px^2+(P-Q)x+Q+1 & x^2+1 \\
3x^3 \qquad\qquad\quad +3x & \overline{3x-P} \\
\hline
\qquad -Px^2+(P-Q-3)x+Q+1 & \\
\qquad -Px^2 \qquad\qquad\qquad\; -P & \\
\hline
\qquad\qquad (P-Q-3)x+Q+P+1 &
\end{array}$$

Приравнивая нулю коэффиціенты остатка, получимъ два уравненія

$$P-Q-3=0,$$

$$P+Q+1=0,$$

откуда

$$P = 1\,,\quad Q = -2\,.$$

Отсюда

$$\varphi(x) = 3x - P = 3x - 1\,,$$

и мы получаемъ окончательно слѣдующее разложеніе

$$\frac{3x^3+1}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{x-2}{(x^2+1)^2} + \frac{3x-1}{(x^2+1)(x-1)}$$

на простѣйшія дроби.

§ 25.

Указанное въ предыдущемъ параграфѣ приведеніе дробей къ простѣйшей дроби приводитъ къ слѣдующему окончательному виду разложенія дроби на простѣйшія.

Теорема. *Если*

$$F(x) = (x^2+px+q)^m(x^2+rx+s)^n \ldots (x^2+tx+u)^p.(x-a)^{m_1}(x-b)^{n_1}\ldots(x-l)^{p_1},$$

то

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{F(x)} = \Pi(x) &+ \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \ldots + \frac{P_{m-1}x+Q_{m-1}}{x^2+px+q} + \\
&+ \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^n} + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{n-1}} + \ldots + \frac{R_{n-1}x+S_{n-1}}{x^2+rx+s} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ \frac{Tx+Y}{(x^2+tx+u)^p} + \frac{T_1x+Y_1}{(x^2+tx+u)^{p-1}} + \ldots + \frac{T_{p-1}x+Y_{p-1}}{x^2+tx+u} + \\
&+ \frac{A}{(x-a)^{m_1}} + \frac{A_1}{(x-a)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{A_{m_1-1}}{x-a} + \\
&+ \frac{B}{(x-b)^{n_1}} + \frac{B_1}{(x-b)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{B_{n_1-1}}{x-b} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ \frac{L}{(x-l)^{p_1}} + \frac{L_1}{(x-l)^{p_1-1}} + \ldots + \frac{L_{p_1-1}}{x-l},
\end{aligned}$$

гдѣ $\Pi(x)$ есть цѣлая часть, заключающаяся въ раціональной дроби.

Связь раціональныхъ функцій съ возвратными рядами.

§ 26.

Скажемъ нѣсколько словъ о разложеніи функцій въ ряды по степенямъ x. Предположимъ, что имѣется слѣдующее разложеніе раціональной функціи,

(1) $$\frac{f(x)}{F(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Для возможности этого разложенія необходимо во первыхъ, чтобы раціональная дробь не обращалась въ ∞ при $x = 0$, а чтобы было

$$\frac{f(0)}{F(0)} = a_0,$$

гдѣ a_0 нѣкоторое опредѣленное число; во вторыхъ разложеніе (1) будетъ имѣть всегда мѣсто для такихъ значеній x, модули которыхъ не превосходятъ нѣкотораго опредѣленнаго числа.

Умножая тождество (1) на знаменателя

$$F(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n,$$

получимъ

(2) $$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m + \ldots$$

Нетрудно убѣдиться, что при $m \geqslant n$ коэффиціентъ A_m будетъ опредѣляться по формулѣ

$$A_m = a_mp_n + a_{m-1}p_{n-1} + \ldots + a_{m-n}p_0.$$

Такъ какъ въ тождествѣ (2) въ первой части находится цѣлая функція $f(x)$, а во второй части безконечный рядъ, то, значитъ, всѣ коэффиціенты безконечнаго ряда, начиная съ извѣстнаго мѣста, должны тождественно равняться нулю. Итакъ, начиная съ нѣкотораго числа m и для всѣхъ бо́льшихъ m

(3) $$a_mp_n + a_{m-1}p_{n-1} + \ldots + a_{m-n}p_0 = 0.$$

Такіе ряды, между коэффиціентами которыхъ, начиная съ извѣстнаго мѣста, имѣетъ мѣсто соотношеніе вида (3), называются возвратными или рекуррентными, и мы приходимъ къ теоремѣ.

Теорема. *Раціональныя функціи раскладываются въ возвратные ряды, и обратно, всякій возвратный рядъ имѣетъ своей суммой раціональную функцію.*

§ 27.

Пояснимъ сказанное примѣромъ. Разсмотримъ рядъ

$$1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + \ldots + x^n\cos n\alpha + \ldots$$

Нетрудно убѣдиться, что этотъ рядъ возвратный, потому что

$$\cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha .$$

Итакъ, если обозначимъ

$$a_n = \cos n\alpha ,$$

то между коэффиціентами заданнаго ряда получаемъ слѣдующее возвратное соотношеніе

$$a_n + a_{n-2} = 2a_{n-1}\cos\alpha ,$$

или иначе

$$a_n - 2a_{n-1}\cos\alpha + a_{n-2} = 0.$$

Чтобы найти сумму заданнаго ряда, мы будемъ, слѣдуя изложенной теоріи, умножать нашъ рядъ на полиномъ

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 .$$

Получаемъ

$$\begin{array}{l} 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + \ldots \\ 1 - 2x\cos\alpha + x^2 \\ \hline 1 - x\cos\alpha + 0x^2 + 0x^3 + \ldots \end{array}$$

Итакъ, получаемъ окончательно

$$\frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = 1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + x^3\cos 3\alpha + \ldots$$

Параллелограмъ Newton'a.

§ 28.

Желая указать пріемы разложенія алгебраическихъ функцій въ ряды, Newton пришелъ къ рѣшенію одной особенной задачи о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

Пусть алгебраическое уравненіе, опредѣляющее y, какъ функцію отъ x, будетъ такого вида

$$(1) \qquad A_1x^{m_1}y^{n_1} + A_2x^{m_2}y^{n_2} + A_3x^{m_3}y^{n_3} + \ldots = 0,$$

гдѣ первая часть представляетъ собою сумму конечнаго числа слагаемыхъ.

Построимъ въ плоскости прямоугольныхъ координатъ точки, координатами которыхъ являются показатели при x и y въ одночленахъ, т. е. точки (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3), ... Показатели m_i и n_i мы предполагаемъ, очевидно, цѣлыми положительными числами или нулями.

Пусть y разложенъ въ рядъ по возрастающимъ степенямъ x

(2) $$y = \mathfrak{A}x^{\alpha} + \mathfrak{B}x^{\beta} + \ldots$$

Перепишемъ равенство (2) въ такомъ видѣ

(3) $$y = \mathfrak{A}'x^{\alpha},$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^{\beta-\alpha} + \ldots$$

Очевидно, что

$$\lim_{x=0} \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$$

Подставляя выраженіе (3) въ уравненіе (1), получаемъ

(4) $$A_1\mathfrak{A}'^{n_1}x^{m_1+\alpha n_1} + A_2\mathfrak{A}'^{n_2}x^{m_2+\alpha n_2} + \ldots = 0.$$

Если число α указано такимъ образомъ, что въ рядѣ линейныхъ выраженій

(5) $$m_1 + \alpha n_1,\ m_2 + \alpha n_2,\ m_3 + \alpha n_3, \ldots,$$

стоящихъ въ показателяхъ, *одно* изъ этихъ выраженій, напримѣръ, $m_i + \alpha n_i$, оказывается меньше всѣхъ остальныхъ, то по сокращеніи уравненія (4) на $x^{m_i+\alpha n_i}$ мы получимъ

(6) $$A_i\mathfrak{A}'^{n_i} + K_1x^{\lambda_1} + K_2x^{\lambda_2} + \ldots = 0,$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ суть положительные показатели. Тогда, подводя x къ нулю, получаемъ

$$A_i\mathfrak{A}^{n_i} = 0,$$

т. е.

$$\mathfrak{A} = 0$$

и разложеніе (2) невозможно, ибо коэффиціентъ при первомъ членѣ равенъ нулю. Для того, чтобы разложеніе (2) стало возможнымъ, необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ два изъ линейныхъ выраженій (5) сдѣлались одинаковыми и меньшими всѣхъ остальныхъ. Такъ, напримѣръ, если будутъ одинаковы и меньше всѣхъ остальныхъ два первыхъ изъ числа выраженій (5), то, сокращая на $x^{m_1+\alpha n_1} = x^{m_2+\alpha n_2}$, получимъ

$$A_1\mathfrak{A}'^{n_1} + A_2\mathfrak{A}'^{n_2} + K_1x^{\lambda_1} + K_2x^{\lambda_2} + \ldots = 0.$$

Подводя x къ нулю, получаемъ

$$A_1\mathfrak{A}^{n_1} + A_2\mathfrak{A}^{n_2} = 0$$

и тогда, если $n_2 > n_1$, то

$$\mathfrak{A} = \sqrt[n_2 - n_1]{-\frac{A_1}{A_2}}.$$

§ 29

Итакъ, мы пришли къ задачѣ нахожденія такого значенія α, при которомъ два изъ выраженій

(1) $$m_1 + \alpha n_1,\ m_2 + \alpha n_2,\ m_3 + \alpha n_3,\ \ldots$$

дѣлаются равными между собой и не бóльшими остальныхъ.

Такъ какъ выраженій (1) конечное число, то задачу можно рѣшить, очевидно, пробами. Можно взять изъ (1) два выраженія

(2) $$m_i + \alpha n_i \text{ и } m_k + \alpha n_k,$$

приравнять ихъ, т. е. положить

$$m_i + \alpha n_i = m_k + \alpha n_k,$$

откуда получится

(3) $$\alpha = \frac{m_i - m_k}{n_k - n_i}$$

и подставить такое значеніе во всѣ выраженія (1). Если при этомъ дѣйствительно выраженія (2) окажутся не бóльшими всѣхъ остальныхъ, то значеніе (3) для α будетъ однимъ изъ искомыхъ.

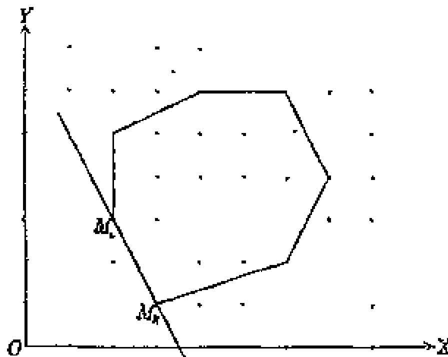
Newton далъ простое геометрическое правило, позволяющее избѣжать излишняго числа пробъ и прямо находить искомыя значенія α. Lagrange представилъ правило Newton'a въ аналитической формѣ. Сообщимъ здѣсь правило Newton'a.

Разсмотримъ картину всѣхъ точекъ $M_i(m_i, n_i)$, соотвѣтствующихъ показателямъ различныхъ членовъ заданнаго алгебраическаго уравненія. Легко убѣдиться, что если пара выраженій (2) даетъ выраженіе (3) для α, рѣшающее задачу, то тогда прямая, соединяющая точки M_i и M_k, такъ расположена, что остальныя точки лежатъ выше ея. Разсмотримъ прямую линію

(4) $$x + \alpha y = \beta.$$

Очевидно, что α будетъ тангенсомъ угла, который прямая образуетъ съ осью yовъ, а β будетъ абсцисса точки, въ которой прямая пересѣ-

каетъ ось x-овъ. Тогда очевидно, что $m_i + \alpha n_i$ дастъ выраженіе β для прямой, имѣющей видъ (4) съ даннымъ угловымъ коэффиціентомъ α и проходящей черезъ точку M_i. Слѣдовательно, задача рѣшается при помощи такого направленія α, при которомъ два выраженія для β, соотвѣтствующія двумъ точкамъ M_i и M_k, одинаковы и не больше остальныхъ; а отсюда вытекаетъ слѣдующее геометрическое построеніе.



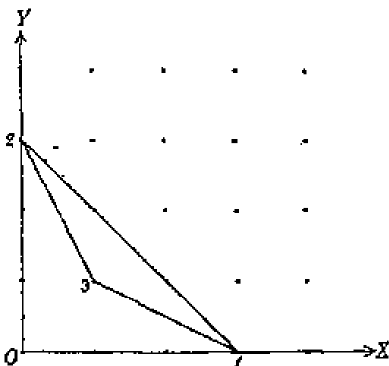
Чер 4.

Проводимъ (черт. 1) такой многоугольный контуръ, вершинами котораго были бы нѣкоторыя изъ точекъ M_i, чтобы всѣ остальныя точки M_i заключались внутри этого контура или лежали на немъ самомъ. Тогда тѣ изъ сторонъ контура, отсѣкающихъ на обѣихъ осяхъ положительные отрѣзки, относительно которыхъ контуръ и начало координатъ расположены по разныя стороны, даютъ рѣшенія выставленной задачи.

§ 30.

Пояснимъ эту теорію на примѣрѣ. Требуется разложить по возрастающимъ степенямъ x функцію y, опредѣляемую уравненіемъ

(1) $$x^3 + y^3 - 3xy = 0\,.$$



Чер. 5

Получаемъ три точки (черт 5). Точка 1 соотвѣтствуетъ члену x^3, точка 2 члену y^3, точка 3 члену $-3xy$. Для опредѣленія показателя α, съ котораго начнется разложеніе

(2) $$y = \mathfrak{A}' x^{\alpha}$$

могутъ служить двѣ стороны (1, 3) и (2, 3).

Линейныя выраженія (1) предыдущаго §-а для даннаго случая будутъ

(3) $$3\,,\ 3\alpha\,,\ \alpha + 1\,.$$

Сторона (1, 3) даетъ $3 = \alpha + 1$, т. е. $\alpha = 2$, и дѣйствительно, въ этомъ случаѣ выраженія (3) принимаютъ численныя значенія 3, 6, 3, такъ что выраженія для точекъ (1) и (3) оказываются равными между

собою и меньшими, чѣмъ число 6 для точки (2). Подставляя выраженіе (2) въ уравненіе (1), получимъ

$$x^3 + \mathfrak{A}'^3 x^6 - 3x^3\mathfrak{A}' = 0\,,$$

откуда, сокращая на x^3,

$$1 + \mathfrak{A}'^3 x^3 - 3\mathfrak{A}' = 0\,.$$

Подводя x къ предѣлу 0, найдемъ

$$3\mathfrak{A} = 1\,,\ \mathfrak{A} = \frac{1}{3}$$

Значитъ, разложеніе y будетъ имѣть видъ

(4) $$y = \frac{1}{3}x^2 + \mathfrak{B}x^\beta + \dots$$

Показатели β и коэффиціенты $\mathfrak{B}$, ... опредѣляются при помощи подстановки ряда (4) въ уравненіе (1) и подбора этихъ показателей и коэффиціентовъ для уничтоженія всѣхъ членовъ, чтобы уравненіе (1) дѣйствительно удовлетворялось.

Вторая сторона (3, 2) даетъ равенство

$$3\alpha = \alpha + 1\,,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{2}\,,$$

и тогда придется откинуть первый членъ и рѣшить уравненіе

$$y^3 - 3xy = 0\,,$$

откуда

$$y^2 = 3x\,,\ y = \sqrt{3}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,;$$

значитъ, разложеніе будетъ

(5) $$y = \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{B}x^\beta + \dots$$

Кривая линія, опредѣляемая уравненіемъ (1), имѣетъ въ началѣ координатъ узловую точку, въ которой пересѣкаются двѣ вѣтви. Вблизи начала координатъ численныя значенія ординаты y при безконечно малыхъ значеніяхъ x на одной изъ этихъ вѣтвей вычисляются при помощи ряда (4), а на другой при помощи ряда (5).

Теорема Eisenstein'a.

§ 31.

Предположимъ, что рядъ

(1) $$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

съ *раціональными* коэффиціентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ удовлетворяетъ алгебраическому уравненію

(2) $$F(x, y) = 0$$

съ *цѣлыми* коэффиціентами.

Eisenstein'у принадлежитъ интересное замѣчаніе, что можно подобрать такое цѣлое число k, что отъ замѣны x на kx всѣ коэффиціенты ряда (1) дѣлаются числами цѣлыми

Мы дадимъ доказательство, принадлежащее Hermite'у [1]), ограничиваясь случаемъ, когда рядъ (1) разсматривается вблизи неособенной точки линіи (2).

Измѣнимъ y на $\alpha_0 + y$, чтобы получить новое уравненіе, которое удовлетворяется значеніями $x = 0$, $y = 0$. Раскладывая это новое уравненіе по степенямъ y, получимъ $P + P_1 y + P_2 y^2 + \ldots = 0$, гдѣ P, P_1, P_2, ... полиномы отъ x, изъ которыхъ первый обращается въ нуль при $x = 0$.

$$P = gx + hx^2 + \ldots$$
$$P_1 = g_1 + h_1 x + \ldots$$
$$P_2 = g_2 + h_2 x + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Если точка $x = 0$, $y = 0$ не особенная, то g_1 отлично отъ нуля. Число g_1 цѣлое, ибо мы предполагаемъ цѣлыми всѣ коэффиціенты уравненія (2). Положимъ теперь $x = g_1^2 t$, $y = g_1 u$. Можно будетъ сократить множитель g_1^2 въ уравненіи между новыми перемѣнными t и u. Это уравненіе имѣетъ слѣдующій видъ

$$\begin{aligned} Gt + \mathrm{H}t^2 + \ldots + [1 + G_1 t + \mathrm{H}_1 t^2 + \ldots]u &+ \\ + [G_2 + \mathrm{H}_2 t + \ldots\ldots]u^2 &+ \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0, \end{aligned}$$

G, G_1, ... H, H_1, ... числа цѣлыя.

---

[1]) Cours de M. Hermite. Professé pendant le 2-e Semestre 1881—82 Rédigé Par M. Andoyer.

Напишемъ это соотношеніе такъ

$$u = \frac{Gt + Ht^2 + \ldots}{1 + G_1t + H_1t^2 + \ldots} - \frac{G_2 + H_2t + \ldots}{1 + G_1t + H_1t^2 + \ldots}u^2 - \ldots$$

или, выполняя дѣленія, т. е. замѣняя раціональныя дроби рядами

$$u = At + A't^2 + \ldots + (B + B't + \ldots)u^2 + \ldots$$

Дѣлая въ послѣднемъ уравненіи подстановку

$$u = mt + m't^2 + m''t^3 + \ldots.$$

получаемъ

$$m = A$$

$$m' = A' + Bm^2$$

$$m'' = A'' + 2Bmm' + B'm^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Послѣднія равенства показываютъ, что теорема Eisenstein'а справедлива, ибо всѣ числа A, A', A''. ... B, B', ... суть числа цѣлыя.

Такъ, напримѣръ, уравненіе $y^n = (1-x)^{-m}$, гдѣ n и m числа натуральныя, удовлетворяется, какъ извѣстно, биноміальнымъ рядомъ

(3) $$y = \sum \frac{m(m+n)\ldots[m+(i-1)n]}{1.2\ldots n^i} x^i.$$

Измѣняя y на $1+y$, получимъ

$$ny + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2 + \ldots = mx + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

Мы видимъ, что число g_1 въ данномъ случаѣ есть n, а потому коэффиціенты ряда (3) должны сдѣлаться числами цѣлыми, если подставить вмѣсто x величину n^2t и далѣе положить $y = nu$. Мы приходимъ къ заключенію, что будетъ цѣлымъ число

$$\frac{m(m+n)\ldots[m+n(i-1)]}{1.2.3\ldots i} n^{i-1}.$$

Какъ слѣдствіе теоремы Eisenstein'а получается замѣчаніе, что функціи e^x и $lg(1+x)$ не могутъ удовлетворять алгебраическому уравненію

съ раціональными коэффиціентами. Въ самомъ дѣлѣ, ряды

$$lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^n}{n} \mp \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} + \dots$$

имѣютъ въ знаменателяхъ коэффиціентовъ безчисленное множество различныхъ простыхъ чиселъ и потому не могутъ быть приведены къ рядамъ съ цѣлыми коэффиціентами

ГЛАВА IV.

Объ опредѣлителяхъ.

§ 1.

Пусть заданы 2 уравненія 1-ой степени съ 2-мя неизвѣстными

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2\,.$$

Черезъ рѣшеніе этихъ уравненій относительно x и y получаемъ

(1)
$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\,.$$

Если мы возьмемъ 3 уравненія 1-ой степени съ 3-мя неизвѣстными

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3\,,$$

то, рѣшая эти уравненія относительно 3 неизвѣстныхъ x, y, z, получимъ выраженія

(2)
$$x = \frac{d_1b_2c_3 - d_1b_3c_2 + d_2b_3c_1 - d_2b_1c_3 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

$$y = \frac{a_1d_2c_3 - a_1d_3c_2 + a_2d_3c_1 - a_2d_1c_3 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 - a_1b_3d_2 + a_2b_3d_1 - a_2b_1d_3 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}\,.$$

Если мы введемъ слѣдующія обозначенія

$$(3)\qquad a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

и

$$(4)\qquad a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

то получимъ выраженія, которыя носятъ названіе *опредѣлителей* или *детерминантовъ*.

Употребляя обозначеніе опредѣлителей, можно будетъ переписать формулы (1) въ такомъ видѣ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Подобнымъ же образомъ формулы (2) примутъ видъ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

При помощи опредѣлителей упрощаются выкладки рѣшенія уравненій 1-й степени съ нѣсколькими неизвѣстными.

Эти упрощенія основаны на важныхъ свойствахъ опредѣлителей, къ перечисленію которыхъ мы и перейдемъ.

Раздѣленіе перемѣщеній на два класса.

§ 2.

Будемъ разсматривать перемѣщенія n предметовъ, которые обозначимъ числами $1, 2, 3, \ldots, n$

Извѣстно, что число различныхъ перемѣщеній n предметовъ равно

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n = n\,! = \Pi(n).$$

Такъ, напримѣръ, получается $24 = 1 . 2 . 3 . 4$ различныхъ перемѣщеній 4 предметовъ (1, 2, 3, 4)

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321.

Перемѣщеніе

$$1 . 2 . 3 \ldots n,$$

въ которомъ числа, указывающія предметы, расположены въ натуральномъ порядкѣ возрастанія, называется *главнымъ*.

Переходъ отъ главнаго перемѣщенія къ какому либо произвольному совершается при помощи операціи, состоящей въ перестановкѣ элементовъ. Такая перестановка элементовъ перемѣщенія, обыкновенно, называется *подстановкой* этихъ элементовъ (substitution).

§ 3.

Простѣйшей подстановкой является перестановка 2 элементовъ, такъ, напримѣръ, подстановка, переводящая перемѣщеніе 12345 въ 32145 есть не что иное, какъ перестановка 2 элементовъ. Перестановку 2 элементовъ будемъ называть *транспозиціей*.

Покажемъ, что всякую подстановку можно разсматривать, какъ совокупность нѣсколькихъ транспозицій. Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, подстановка, переводящая главное перемѣщеніе 12345 въ 43521 можетъ быть получена, какъ совокупность слѣдующихъ транспозицій: производимъ транспозицію, которая ставитъ на мѣсто 1-аго элемента 1 элементъ 4; значитъ, надо переставить элементы 14; получаемъ

$$42315.$$

Далѣе, надо на 2-ое мѣсто поставить элементъ 3; значитъ, надо переставить элементы 23. Получаемъ

$$43215.$$

Надо поставить на 3-ье мѣсто элементъ 5, слѣдовательно, придется переставить элементы 25; получаемъ

$$43512.$$

Остается произвести последнюю транспозицію элементовъ 12. Получаемъ окончательно

43521.

Разсуждая подобно тому, какъ это мы дѣлали на только что приведенномъ примѣрѣ, мы можемъ осуществить всякую подстановку при помощи ряда транспозицій.

Разобьемъ всѣ П(n) перемѣщеній на 2 *класса*, причемъ къ *первому* классу мы отнесемъ всѣ тѣ перемѣщенія, которыя получаются изъ главнаго при помощи четнаго числа транспозицій, и ко *второму* классу отнесемъ тѣ перемѣщенія, которыя получаются послѣ нечетнаго числа транспозицій.

Само главное перемѣщеніе мы отнесемъ къ 1-ому классу, потому что можно считать, что оно происходитъ изъ самого себя при помощи 0 числа транспозицій. Число же 0 можно отнести къ числу четныхъ.

§ 4.

Покажемъ простой способъ узнавать, къ какому классу принадлежитъ перемѣщеніе. Для этой цѣли введемъ новое понятіе „*безпорядокъ*“. Мы будемъ говорить, что 2 элемента перемѣщенія образуютъ *порядокъ*, если большій элементъ стоитъ направо отъ меньшаго, и *безпорядокъ*, если большій элементъ стоитъ налѣво отъ меньшаго.

Главное перемѣщеніе

$$12 \ldots n$$

не имѣетъ безпорядковъ, тогда какъ въ перемѣщеніи

45312,

существуютъ слѣдующіе безпорядки

$$(3,1)\ (4,1)\ (5,1)$$
$$(3,2)\ (4,2)\ (5,2)$$
$$(4,3)\ (5,3)\,.$$

Итакъ, перемѣщеніе

45312

заключаетъ 8 безпорядковъ.

Теорема. *Перемѣщеніе принадлежитъ къ первому классу, если оно заключаетъ четное число (или 0) безпорядковъ, и ко второму, если заключаетъ нечетное число безпорядковъ.*

Такъ, напримѣръ, перемѣщеніе

45312

принадлежитъ къ первому классу, потому что оно заключаетъ 8 безпорядковъ.

Для доказательства этой теоремы достаточно убѣдиться, что всякая транспозиція измѣняетъ число безпорядковъ на нечетное число.

Отсюда будетъ слѣдовать, что отъ произведенія надъ главнымъ перемѣщеніемъ нечетнаго числа транспозицій произойдетъ въ результатѣ нечетное число безпорядковъ; послѣ же четнаго числа транспозицій, число безпорядковъ окажется четнымъ.

Пусть разсматривается перемѣщеніе вида

(1) $$AaBbC.$$

Въ этомъ перемѣщеніи у насъ указаны 2 элемента a и b; остальные же не указаны въ отдѣльности, а лишь обозначена буквой A совокупность элементовъ, стоящихъ слѣва отъ элемента a; буквой B обозначены элементы, стоящіе между a и b, и, наконецъ, буквой C обозначены элементы, стоящіе направо отъ b.

Посмотримъ, какъ измѣнится число безпорядковъ перемѣщенія (1), если мы переставимъ a и b, т. е. напишемъ

(2) $$AbBaC.$$

Безпорядки, которые заключаются въ группахъ A, B и C, останутся безъ перемѣны; слѣдовательно, надо разсматривать безпорядки, заключающіеся въ слѣдующихъ парахъ элементовъ: въ парѣ (a, b) и въ парахъ, происходящихъ отъ сопоставленія каждаго изъ элементовъ a, b съ другими элементами.

Что касается пары (a, b), то можетъ быть 2 случая: если въ перемѣщеніи (1) эта пара (a, b) представляла порядокъ, то она будетъ представлять безпорядокъ въ перемѣщеніи (2), и, обратно, безпорядокъ этой пары, если онъ имѣлъ мѣсто въ перемѣщеніи (1), пропадетъ въ перемѣщеніи (2), а потому, получается при разсмотрѣніи пары (a, b) или появленіе одного безпорядка, или исчезновеніе одного безпорядка. Въ обоихъ случаяхъ получается измѣненіе числа безпорядковъ на нечетное число

Для окончательнаго доказательства теоремы остается доказать, что въ парахъ, сопоставляющихъ одинъ изъ элементовъ a, b съ элементами группъ A, B, C, происходитъ четное число измѣненій безпорядковъ.

Пусть α одинъ изъ элементовъ системы A, β одинъ изъ элементовъ системы B и γ — одинъ изъ элементовъ системы C.

Въ двухъ парахъ (α, a) и (α, b) не происходитъ измѣненія числа безпорядковъ, потому что при транспозиціи оба элемента a и b остаются направо отъ элемента α, такъ что порядокъ остается послѣ транспозиціи также порядкомъ, а безпорядокъ — безпорядкомъ.

Совершенно подобнымъ образомъ не происходитъ измѣненія безпорядковъ въ парахъ (a, γ) и (b, γ), ибо элементы a и b остаются при транспозиціи налѣво отъ элемента γ.

Посмотримъ, какъ измѣнится число безпорядковъ въ системѣ 3 элементовъ ($a\beta b$) при транспозиціи элементовъ ab.

Разсмотримъ 4 возможныхъ случая:

	$a\beta b$		$b\beta a$	
I	пор.	пор.	безпор.	безпор.
II	пор.	безпор.	пор.	безпор.
III	безпор.	пор.	безпор.	поряд.
IV	безпор.	безпор.	порядк.	порядк.

потому что транспозиція элементовъ a и b обращаетъ въ группѣ ($a\beta b$) порядокъ въ безпорядокъ и обратно.

Итакъ, мы замѣчаемъ, что въ случаяхъ II и III въ системѣ $a\beta b$ не происходитъ измѣненія числа безпорядковъ, въ случаѣ же I число безпорядковъ увеличивается на 2, и, наконецъ, въ случаѣ IV число безпорядковъ уменьшается на 2. Въ общемъ можно сказать, что число безпорядковъ въ группѣ ($a\beta b$) отъ транспозиціи измѣняется на четное число.

Слѣдовательно, можно считать доказаннымъ, что всякая транспозиція измѣняетъ число безпорядковъ на число нечетное, и, значитъ, подлежавшая доказательству теорема оказывается справедливой.

§ 5.

Теорема. *Въ каждомъ классѣ заключается по одинаковому числу перемѣщеній.*

Пусть разсматриваются перемѣщенія n элементовъ, и пусть $\mathfrak{A}$ представляетъ изъ себя совокупность перемѣщеній 1-аго класса, а $\mathfrak{B}$ — совокупность перемѣщеній 2-ого класса. Сдѣлаемъ во всѣхъ написанныхъ перемѣщеніяхъ обоихъ классовъ транспозицію 2 опредѣленно выбранныхъ элементовъ. Тогда можно утверждать, что, послѣ такой транспозиціи, воспроизведутся всѣ перемѣщенія, только они будутъ написаны въ другомъ порядкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, транспозиція не можетъ обратить 2 различныхъ перемѣщенія въ одно и то же, ибо тогда обратная транспозиція изъ одного перемѣщенія давала бы 2 разныхъ, что невозможно; значитъ всѣ $\Pi(n)$ различныхъ перемѣщеній обращаются послѣ транспозиціи 2 элементовъ въ тѣ же самыя различныя перемѣщенія. Но, съ другой стороны, если мы обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что транспозиція переводитъ перемѣщенія одного класса въ перемѣщенія другого класса, то,

значитъ, совокупность всѣхъ перемѣщеній ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) перейдетъ послѣ транспозиціи въ ту же самую полную совокупность перемѣщеній только въ томъ случаѣ, если въ обоихъ классахъ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ будетъ по одинаковому числу перемѣщеній; тогда послѣ транспозиціи классъ $\mathfrak{A}$ переходитъ полностью въ классъ $\mathfrak{B}$, и обратно.

Опредѣлители.

§ 6.

Пусть заданы на плоскости n^2 чиселъ, написанныхъ слѣдующимъ образомъ:

$$(1)\qquad \begin{matrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots & a_n^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \ldots & a_n^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)}. \end{matrix}$$

Заданныя числа расположены на плоскости въ n горизонтальныхъ и n вертикальныхъ рядахъ, причемъ въ каждомъ числѣ

$$a_k^{(i)}$$

верхній значекъ i (индексъ) показываетъ, что число находится въ i-ой горизонтали (считая сверху), а нижній значекъ k указываетъ, что число находится въ k-ой колоннѣ (считая слѣва).

Картина, образованная написанными указаннымъ образомъ n^2 числами, называется *числовою квадратной матрицею порядка* n.

Мы будемъ разсматривать такую цѣлую функцію отъ элементовъ матрицы (1)

$$(2)\qquad \sum(-1)^W a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} a_{i_3}^{(3)} \ldots a_{i_n}^{(n)},$$

гдѣ знакъ суммы $\sum$ распространяется на всевозможныя перемѣщенія

$$i_1\ i_2 \ldots i_n$$

нижнихъ значковъ, W же представляетъ число безпорядковъ въ перемѣщеніи $i_1\ i_2 \ldots i_n$.

Очевидно, что въ цѣлой функціи (2) число членовъ будетъ $\Pi(n)$, причемъ эти члены будутъ со знакомъ $+$, если перемѣщеніе будетъ принадлежать къ 1-ому классу, и со знакомъ $-$, если перемѣщеніе будетъ принадлежать ко 2-ому классу.

Сумма (2) называется *опредѣлителемъ матрицы* (1) и обозначается обыкновенно знакомъ

$$\begin{array}{cccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{array}.$$

§ 7

Разсмотримъ для примѣра случай $n = 3$, тогда матрица имѣетъ видъ

$$\begin{array}{ccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)}. \end{array}$$

По данному въ предыдущемъ параграфѣ опредѣленію, получимъ

$$\left.\begin{array}{ccc} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{array}\right| = \sum (-1)^{\nu} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} a_{i_3}^{(3)}.$$

Давая нижнимъ значкамъ всевозможныя перемѣщенія 3 элементовъ (123), которыхъ можетъ быть $1 . 2 . 3 = 6$, получимъ члены

(3)
$$\begin{array}{ccc} a_1^{(1)} a_2^{(2)} x_3^{(3)}; & a_1^{(1)} a_3^{(2)} a_2^{(3)}; & a_2^{(1)} a_1^{(2)} a_3^{(3)}; \\ a_2^{(1)} a_3^{(2)} a_1^{(3)}; & a_3^{(1)} a_1^{(2)} a_2^{(3)}; & a_3^{(1)} a_2^{(2)} a_1^{(3)}. \end{array}$$

Такъ какъ число безпорядковъ въ нижнихъ значкахъ членовъ (3) выражается послѣдовательно числами

$$0;\ 1;\ 1;\ 2;\ 2;\ 3,$$

слѣдовательно, искомый опредѣлитель нашей матрицы третьяго порядка будетъ написанъ такъ:

$$a_1^{(1)} a_2^{(2)} a_3^{(3)} - a_1^{(1)} a_3^{(2)} a_2^{(3)} - a_2^{(1)} a_1^{(2)} a_3^{(3)} + a_2^{(1)} a_3^{(2)} a_1^{(3)} +$$
$$+ a_3^{(1)} a_1^{(2)} a_2^{(3)} - a_3^{(1)} a_2^{(2)} a_1^{(3)}.$$

Сравнивая съ формулой (4) § 1, мы замѣчаемъ полное совпаденіе, если только нижніе значки отмѣчать различными буквами, а верхніе значки перенести внизъ. Напримѣръ

$$a_1 = a;\quad a_2 = b;\quad a_3 = c$$
$$a_1^{(2)} = a_2;\quad a_2^{(3)} = b_3;\quad a_3^{(1)} = c_1.$$

Другими словами, если для элементовъ 1-ой колонны писать букву a, для элементовъ 2-ой колонны писать букву b и для элементовъ 3-ей колонны — c. Горизонтали же отличать нижними значками.

§ 8

Очевидно, что въ каждомъ членѣ опредѣлителя

(1) $$\sum(-1)^{W} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \ldots a_{i_n}^{(n)}$$

множителей можно переставить такимъ образомъ, чтобы нижніе значки

$$i_1 i_2 \ldots i_n$$

оказались расположенными въ натуральномъ порядкѣ возрастанія; тогда произойдутъ безпорядки въ верхнихъ индексахъ; при этомъ можно убѣдиться, что тотъ же самый опредѣлитель можно написать и въ такой формѣ

(2) $$\sum(-1)^{W'} a_1^{(k_1)} a_2^{(k_2)} a_3^{(k_3)} \ldots a_n^{(k_n)},$$

гдѣ сумма $\sum$ распространяется на всѣ различныя перемѣщенія верхнихъ значковъ

$$k_1 k_2 \ldots k_n.$$

W' есть число безпорядковъ въ верхнихъ значкахъ.

Для того, чтобы убѣдиться, что выраженія (1) и (2) тождественны, достаточно показать, что, если мы изъ члена

$$a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \ldots a_{i_n}^{(n)}$$

суммы (1) получаемъ перемѣщеніемъ множителей соотвѣтствующій членъ

$$a_1^{(k_1)} a_2^{(k_2)} \ldots a_n^{(k_n)}$$

суммы (2), то оба перемѣщенія

$$i_1 i_2 \ldots i_n$$

и

$$k_1 k_2 \ldots k_n$$

принадлежатъ къ одному и тому же классу. Для того, чтобы убѣдиться въ сказанномъ, достаточно принять въ соображеніе, что приведеніе въ порядокъ нижнихъ индексовъ можетъ быть достигнуто при помощи нѣкотораго числа транспозицій множителей, причемъ, это число транспозицій будетъ четное, если перемѣщеніе

(3) $$i_1 i_2 \ldots i_n$$

было 1-аго класса, и нечетное, если 2-ого класса; но, такъ какъ при перестановкѣ множителей каждый множитель влечетъ за собою оба значка (и верхній, и нижній), то транспозиціямъ множителей будутъ соотвѣтствовать транспозиціи верхнихъ значковъ. Первоначальное перемѣщеніе въ суммѣ (1) верхнихъ значковъ безпорядковъ не имѣло; очевидно, что окончательное размѣщеніе

$$(4) \qquad k_1 k_2 \ldots k_n$$

верхнихъ значковъ будетъ 1-аго класса, если число траспозицій множителей было четное, и 2-ого класса, если это число транспозицій было нечетное.

Итакъ, мы видимъ, что перемѣщенія (3) и (4) принадлежатъ къ одному классу.

§ 9.

Нетрудно видѣть, что можетъ быть написана болѣе общая формула, выражающая составъ опредѣлителя, а именно

$$(1) \qquad \sum (-1)^{I+K} a_{i_1}^{(k_1)} a_{i_2}^{(k_2)} \ldots a_{i_n}^{(k_n)},$$

въ которой множители не расположены въ порядокъ ни по нижнимъ, ни по верхнимъ значкамъ. Въ этой формулѣ I обозначаетъ число безпорядковъ въ рядѣ нижнихъ значковъ, а K — число безпорядковъ въ рядѣ верхнихъ значковъ. Доказательство этой послѣдней формулы остается одинаковымъ съ приведеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ.

§ 10.

Теорема. *Величина опредѣлителя не мѣняется, если горизонтали замѣнить колоннами, и обратно.*

Въ самомъ дѣлѣ, замѣна горизонталей колоннами сводится къ замѣнѣ верхнихъ значковъ нижними и обратно. Между тѣмъ, формула (1) предыдущаго параграфа показываетъ, что отъ такой замѣны верхнихъ значковъ нижними числа I и K мѣняются ролями, и, слѣдовательно, разсматриваемый членъ войдетъ въ общую сумму съ тѣмъ же знакомъ. Значитъ, новое значеніе суммы остается тождественно равнымъ первоначальному.

§ 11.

Теорема. *Отъ перестановки двухъ горизонталей (колоннъ) величина опредѣлителя мѣняетъ свой знакъ.*

Справедливость теоремы вытекаетъ изъ того соображенія, что перестановка 2 горизонталей соотвѣтствуетъ перестановкѣ 2 нижнихъ значковъ.

Въ § 4 мы видѣли, что перестановка 2 элементовъ перемѣщенія измѣняетъ классъ этого перемѣщенія, а тогда каждый членъ опредѣлителя измѣнитъ свой знакъ, и, слѣдовательно, измѣнитъ знакъ и весь опредѣлитель.

§ 12

Опредѣлитель тождественно равенъ 0, *если онъ имѣетъ двѣ одинаковыя горизонтали (колонны).*

Пусть Δ есть величина опредѣлителя, имѣющаго двѣ одинаковыя горизонтали. При перестановкѣ этихъ горизонталей должно происходить, съ одной стороны, измѣненіе знака опредѣлителя (см. предыд. парагр.), съ другой стороны, опредѣлитель, очевидно, остается тѣмъ же, ибо обѣ горизонтали одинаковы; и мы получаемъ

$$\Delta = -\Delta .$$

Откуда $2\Delta = 0$ или $\Delta = 0$, что и требовалось доказать.

§ 13

Разложеніе опредѣлителя по элементамъ горизонтали (колонны).

На основаніи сказаннаго о составленіи опредѣлителя, мы замѣчаемъ, что каждый элементъ опредѣлителя можетъ входить въ различныхъ его членахъ только въ 1-ой степени, ибо иначе значки этого элемента повторились бы нѣсколько разъ въ одномъ членѣ опредѣлителя, что невозможно, потому что, какъ верхніе, такъ и нижніе значки должны представлять перемѣщенія безъ повтореній.

Посмотримъ, съ какимъ коэффиціентомъ входитъ въ опредѣлитель нѣкоторый элементъ

$$a_i^{(k)}.$$

Начнемъ съ разсмотрѣнія лѣваго верхняго элемента

$$a_1^{(1)}.$$

Нетрудно видѣть, что, если мы этотъ элементъ $a_1^{(1)}$ возьмемъ за скобку и предположимъ, что въ членахъ опредѣлителя нижніе значки приведены въ порядокъ, то замѣчаемъ, что въ скобкахъ окажется выраженіе

$$\sum(-1)^{\nu} a_2^{(l_2)} a_3^{(l_3)} \ldots a_n^{(l_n)},$$

гдѣ

$$l_2\ l_3\ \ldots\ l_n$$

представляютъ изъ себя различныя перемѣщенія $(n-1)$ значковъ

$$2\ 3\ \ldots\ n,$$

а W' будетъ представлять число безпорядковъ въ перемѣщеніи

$$l_2\ l_3\ \ldots\ l_n.$$

Итакъ, мы видимъ, что коэффиціентомъ у $a_1^{(1)}$ оказывается опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots & a_n^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \ldots & a_n^{(3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

получающійся изъ разсматриваемаго основного опредѣлителя черезъ вычеркиваніе 1-ой горизонтали и 1-ой колонны.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію коэффиціента, на который умножается общій элементъ $a_i^{(k)}$ опредѣлителя

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} & & & a_i^{(1)} & & & \\ & & & a_i^{(2)} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \ldots & a_i^{(k)} & \ldots & a_n^{(k)} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & a_i^{(n)} & & & \end{vmatrix}.$$

Перенесемъ k-ую горизонталь на мѣсто 1-ой горизонтали безъ измѣненія взаимнаго расположенія остальныхъ горизонталей. Этого можно будетъ достигнуть такъ: сначала перемѣщаемъ горизонтали $k-1$ и k; затѣмъ k-ую перемѣщаемъ далѣе съ мѣста $k-1$ на мѣсто $k-2$ и продолжаемъ такое перемѣщеніе k-ой горизонтали со слѣдующими верхними до тѣхъ поръ, пока k-ая горизонталь не займетъ верхнее мѣсто въ опредѣлителѣ Тогда опредѣлитель будетъ имѣть такой видъ

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \ldots & a_i^{(k)} & \ldots & a_n^{(k)} \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_i^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_i^{(2)} & \ldots & a_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(k-1)} & a_2^{(k-1)} & \ldots & a_i^{(k-1)} & \ldots & a_n^{(k-1)} \\ a_1^{(k+1)} & a_2^{(k+1)} & \ldots & a_i^{(k+1)} & \ldots & a_n^{(k+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Если теперь подобнымъ же образомъ, не нарушая порядка остальныхъ колоннъ, мы перенесемъ i-ую колонну на 1-ое мѣсто, то получаемъ

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_i^{(k)} & a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \ldots & a_{i-1}^{(k)} & a_{i+1}^{(k)} & \ldots \\ a_i^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_{i-1}^{(1)} & a_{i+1}^{(1)} & \ldots \\ a_i^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_{i-1}^{(2)} & a_{i+1}^{(2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_i^{(k-1)} & a_1^{(k-1)} & a_2^{(k-1)} & \ldots & a_{i-1}^{(k-1)} & a_{i+1}^{(k-1)} & \ldots \\ a_i^{(k+1)} & a_1^{(k+1)} & a_2^{(k+1)} & \ldots & a_{i-1}^{(k+1)} & a_{i+1}^{(k+1)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Такъ какъ переходъ отъ опредѣлителя (1) къ опредѣлителю (2) совершается при помощи $(k-1)$ перестановокъ 2 горизонталей, слѣдовательно опредѣлитель (2) отличается отъ опредѣлителя (1) множителемъ $(-1)^{k-1}$. Подобнымъ же образомъ, при переходѣ отъ опредѣлителя (2) къ опредѣлителю (3), мы получаемъ множитель $(-1)^{i-1}$; значитъ, окончательный переходъ отъ опредѣлителя (1) къ опредѣлителю (3) совершается при помощи умноженія на $(-1)^{k+i}$.

Итакъ, мы замѣчаемъ по виду опредѣлителя (3), что коэффиціентъ при $a_i^{(k)}$ въ этомъ опредѣлителѣ будетъ опредѣлителемъ, который получается изъ опредѣлителя (3) вычеркиваніемъ 1-ой горизонтали и 1-ой колонны.

Слѣдовательно, окончательно мы замѣчаемъ, что коэффиціентъ при $a_i^{(k)}$ въ первоначальномъ опредѣлителѣ (1) будетъ выражаться

$$(4)\qquad (-1)^{k+i} \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_{i-1}^{(1)} & a_{i+1}^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(k-1)} & a_2^{(k-1)} & \ldots & a_{i-1}^{(k-1)} & a_{i+1}^{(k-1)} & \ldots & a_n^{(k-1)} \\ a_1^{(k+1)} & a_2^{(k+1)} & \ldots & a_{i-1}^{(k+1)} & a_{i+1}^{(k+1)} & \ldots & a_n^{(k+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Это выраженіе (4) мы будемъ называть *алгебраическимъ дополненіемъ* элемента $a_i^{(k)}$ и будемъ обозначать $A_i^{(k)}$.

Опредѣлитель въ выраженіи (4) происходитъ отъ вычеркиванія изъ первоначальнаго опредѣлителя (1) i-ой колонны и k-ой горизонтали, оставляя взаимное расположеніе элементовъ другихъ горизонталей и колоннъ тѣмъ же самымъ.

Такого рода опредѣлители, которые получаются изъ первоначальнаго вычеркиваніемъ колоннъ и горизонталей, носятъ названіе *миноровъ* перво-

начальнаго опредѣлителя. Итакъ, алгебраическое дополненіе всякаго элемента опредѣлителя есть взятый съ тѣмъ или другимъ знакомъ миноръ, получающійся отъ вычеркиванія той горизонтали и той колонны, на пересѣченіи которыхъ разсматриваемый элементъ находится.

§ 14

Напишемъ первоначальный опредѣлитель въ видѣ

$$\Delta = \sum (-1)^W a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_n}^{(n)}$$

и будемъ въ немъ брать за скобки въ различныхъ его членахъ элементы

$$a_1^{(l)}\ a_2^{(l)}\ \dots$$

нѣкоторой l-ой горизонтали; тогда, очевидно, что, на основаніи сказаннаго объ алгебраическомъ дополненіи элементовъ, мы получимъ формулу

(1) $$\Delta = a_1^{(l)}A_1^{(l)} + a_2^{(l)}A_2^{(l)} + \dots + a_n^{(l)}A_n^{(l)}.$$

Эта формула представляетъ весьма важное разложеніе опредѣлителя по элементамъ l-ой горизонтали.

Если мы подставимъ вмѣсто l-ой горизонтали какую-нибудь другую, k-ую горизонталь, то получаемъ опредѣлитель, у котораго двѣ k-ыхъ горизонтали; и, слѣдовательно, опредѣлитель обратится въ 0, т. е другими словами, мы получаемъ новую, весьма важную, формулу

(2) $$0 = a_1^{(k)}A_1^{(l)} + a_2^{(k)}A_2^{(l)} + \dots + a_n^{(k)}A_n^{(l)}.$$

Очевидно, что можно получить аналогичныя разложенія по элементамъ колонны, т. е.

(3) $$\Delta = a_i^{(1)}A_i^{(1)} + a_i^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + a_i^{(n)}A_i^{(n)}.$$

(4) $$0 = a_k^{(1)}A_i^{(1)} + a_k^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + a_k^{(n)}A_i^{(n)}.$$

Рѣшеніе системы n уравненій I-й степени съ n неизвѣстными.

§ 15.

Пусть задана система

(1) $$\begin{aligned} a_1^{(1)}x_1 + a_2^{(1)}x_2 + \dots + a_i^{(1)}x_i + \dots + a_n^{(1)}x_n &= b^{(1)} \\ a_1^{(2)}x_2 + a_2^{(2)}x_2 + \dots + a_i^{(2)}x_i + \dots + a_n^{(2)}x_n &= b^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_1^{(n)}x_1 + a_2^{(n)}x_2 + \dots + a_i^{(n)}x_i + \dots + a_n^{(n)}x_n &= b^{(n)} \end{aligned},$$

гдѣ всѣ числа $a_i^{(k)}$ и $b^{(i)}$ заданы. Требуется рѣшить эту систему n уравненій относительно n неизвѣстныхъ

$$x_1\ x_2\ \dots\ x_n$$

Покажемъ, какъ найти неизвѣстное x_i. Для этой цѣли мы умножимъ уравненіе (1) по порядку на числа

$$A_i^{(1)}\ A_i^{(2)}\ \dots\ A_i^{(n)}$$

и сложимъ. Тогда получимъ

$$\begin{aligned}
x_1[a_1^{(1)}A_i^{(1)} + a_1^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + a_1^{(n)}A_i^{(n)}] &+ \\
+ x_2[a_2^{(1)}A_i^{(1)} + a_2^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + a_2^{(n)}A_i^{(n)}] &+ \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
+ x_i[a_i^{(1)}A_i^{(1)} + a_i^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + a_i^{(n)}A_i^{(n)}] &+ \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
+ x_n[a_n^{(1)}A_i^{(1)} + a_n^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + a_n^{(n)}A_i^{(n)}] &= \\
= b^{(1)}A_i^{(1)} + b^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + b^{(n)}A_i^{(n)}&.
\end{aligned}$$

На основаніи тождествъ (3) и (4) предыдущаго параграфа мы замѣчаемъ, что обращаются въ 0 всѣ скобки лѣвой части уравненія, кромѣ одной, которая умножается на x_i, и которая равна Δ, т. е опредѣлителю составленному изъ коэффиціентовъ $a_i^{(k)}$; и мы получаемъ

(2) $$\Delta x_i = b^{(1)}A_i^{(1)} + b^{(2)}A_i^{(2)} + \dots + b^{(n)}A_i^{(n)}.$$

Правая часть представляетъ изъ себя опредѣлитель, который получается изъ опредѣлителя Δ замѣной i-ой колонны

$$\begin{matrix} a_i^{(1)} \\ a_i^{(2)} \\ \vdots \end{matrix}$$

колонной правыхъ частей

$$\begin{matrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ \vdots \end{matrix}$$

въ уравненіяхъ (1).

Если опредѣлитель Δ не равенъ 0, то изъ уравненія (2) получается вполнѣ опредѣленное численное значеніе для x_i и такъ какъ значекъ i

мы взяли произвольно, то, слѣдовательно, у насъ получаются опредѣленныя численныя значенія для всѣхъ неизвѣстныхъ

$$x_1\ x_2 \ldots x_n;$$

Разсмотримъ теперь случай

$$\Delta = 0,$$

тогда, если выраженіе, стоящее въ правой части уравненія (2) не равно 0, то уравненіе (2) нельзя рѣшить относительно x_i, или, какъ иногда говорятъ, получается для x_i безконечное значеніе, что иногда обозначаютъ $x_i = \infty$.

Собственно говоря, въ этомъ случаѣ система заключаетъ противорѣчіе, потому что по уравненію (2) получается

$$0 = b^{(1)}A_i^{(1)} + b_1^{(2)}A_i^{(2)} \ldots,$$

что невозможно.

Если правая часть уравненія (2) также равняется 0, то получается неопредѣленное рѣшеніе: уравненіе (2) удовлетворяется при всякихъ численныхъ значеніяхъ x_i.

Итакъ, можно высказать слѣдующую теорему:

Условіемъ, необходимымъ и достаточнымъ для существованія опредѣленнаго рѣшенія уравненій вида (1), является *неравенство* нулю опредѣлителя Δ, составленнаго изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ.

Если опредѣлитель Δ равенъ 0, то въ этомъ случаѣ система можетъ представлять или неопредѣленность, или же она можетъ вести къ противорѣчію (безконечныя рѣшенія).

Случай противорѣчія встрѣтится тогда, если получается безконечное значеніе по крайней мѣрѣ для одной неизвѣстной.

§ 16.

Разсмотримъ теперь случай, когда правыя части уравненій (1) § 15 равны 0; получаются такъ называемыя *однородныя* уравненія

$$
\begin{array}{ll}
 & a_1^{(1)}x_1 + \ldots + a_n^{(1)}x_n = 0 \\
(1) & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & a_1^{(n)}x + \ldots + a_n^{(n)}x_n = 0.
\end{array}
$$

Произведя выкладки предыдущаго параграфа, мы придемъ къ уравненію

$$(2) \qquad \Delta x_1 = 0,$$

ибо всѣ $b^{(i)} = 0$.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующей системѣ уравненій

(3) $$\Delta x_1 = 0\,,\ \Delta x_2 = 0\,,\ \ldots\ \Delta x_n = 0\,.$$

Если опредѣлитель Δ *не равенъ* нулю, то изъ уравненій (3) получаемъ

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\ \ldots\ x_n = 0\,,$$

т. е. равны нулю всѣ неизвѣстныя. Если же $\Delta = 0$, то значенія неизвѣстныхъ произвольны.

Отсюда получаемъ теорему: *Если однородныя уравненія 1-ой степени (1) допускаютъ отличныя отъ нуля значенія неизвѣстныхъ, то долженъ, обязательно, равняться нулю опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ.*

§ 17.

Изъ того обстоятельства, что можно опредѣлитель разложеніемъ по элементамъ горизонтали (колонны) представить въ видѣ линейной функціи отъ элементовъ этой горизонтали, слѣдуютъ такія свойства опредѣлителей.

1. Отъ умноженія на нѣкоторое число k всѣхъ элементовъ нѣкоторой горизонтали (колонны) опредѣлитель получаетъ этого множителя, напримѣръ

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ b_1 & kb_2 & b_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Если всѣ члены какой либо горизонтали (колонны) представляютъ суммы m слагаемыхъ, то весь опредѣлитель можно разсматривать, какъ сумму m опредѣлителей.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\Delta = \sum_k a_k^{(i)} A_k^{(i)}\,,$$

а

$$a_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} + \beta_k^{(i)} + \ldots + \sigma_k^{(i)}\,,$$

то

$$\Delta = \sum_k (\alpha_k^{(i)} + \beta_k^{(i)} + \ldots + \sigma_k^{(i)}) A_k^{(i)} = \sum_k \alpha_k^{(i)} A_k^{(i)} + \sum_k \beta_k^{(i)} A_k^{(i)} + \ldots + \sum_k \sigma_k^{(i)} A_k^{(i)}.$$

Другими словами, заданный опредѣлитель представился суммой опредѣлителей

$$\sum_k \alpha_k^{(i)} A_k^{(i)}\,,\ \sum_k \beta_k^{(i)} A_k^{(i)}\,,\ \ldots\ \sum_k \sigma_k^{(i)} A_k^{(i)}\,,$$

которые получаются отъ замѣны элементовъ $a_k^{(i)}$ k-ой колонны числами $\alpha_k^{(i)}, \beta_k^{(i)}, \ldots \sigma_k^{(i)}$.

Напримѣръ [1])

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_1^{(3)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)} \\ a_2^{(1)}+a_2^{(2)}+a_2^{(3)}, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)} \\ a_3^{(1)}+a_3^{(2)}+a_3^{(3)}, & a_3^{(2)}, & a_3^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} \\ a_2^{(2)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} \\ a_3^{(2)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(3)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} \\ a_2^{(3)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

§ 18.

При вычисленіи опредѣлителей имѣетъ важное значеніе слѣдующее *свойство* опредѣлителя: можно безъ измѣненія величины опредѣлителя прибавить къ элементамъ нѣкоторой горизонтали (колонны) соотвѣтственные элементы другой горизонтали (колонны), умноженные на произвольнаго множителя k. Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2+ka_1, & a_3 \\ b_1, & b_2+kb_1, & b_3 \\ c_1, & c_2+kc_1, & c_3 \end{vmatrix}$$

можетъ быть представленъ въ видѣ суммы опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & a_3 \\ b_1 & kb_1 & b_3 \\ c_1 & kc_1 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Въ послѣдней суммѣ 2-ой опредѣлитель равенъ нулю, ибо онъ равенъ

$$k\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[1]) Въ этомъ примѣрѣ верхними значками обозначены колонны, что, конечно, также возможно сдѣлать.

Итакъ, мы получаемъ равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + ka_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 + kb_1 & b_3 \\ c_1 & c_2 + kc_1 & c_3 \end{vmatrix},$$

выражающее справедливость высказанной теоремы.

§ 19.

Рѣшить уравненіе относительно x

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 + x \end{vmatrix} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 + 0 \\ b_1, & b_2, & b_3 + 0 \\ c_1, & c_2, & c_3 + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & 0 \\ b_1, & b_2, & 0 \\ c_1, & c_2, & x \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + x(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда окончательно

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Умноженіе опредѣлителей.

§ 20.

Будемъ разсматривать слѣдующее линейное преобразованіе

(1)
$$\begin{aligned} x_1 &= a_1^{(1)}x_1' + a_2^{(1)}x_2' + \ldots + a_n^{(1)}x_n' \\ x_2 &= a_1^{(2)}x_1' + a_2^{(2)}x_2' + \ldots + a_n^{(2)}x_n' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_1^{(n)}x_1' + a_2^{(n)}x_2' + \ldots + a_n^{(n)}x_n', \end{aligned}$$

замѣняющее перемѣнныя независимыя

$$x_1 x_2 \ldots x_n$$

новыми

$$x_1' x_2' \ldots x_n'$$

Если мы обозначимъ черезъ A матрицу, образованную изъ коэффиціентовъ преобразованія (1), то для сокращенія письма можно обозначить преобразованіе (1) такою символическою формулою:

$$x = A(x'). \tag{2}$$

Перейдемъ отъ перемѣнныхъ

$$x_1' x_2' \ldots x_n'$$

къ новымъ третьимъ

$$x_1'' x_2'' \ldots x_n''$$

при помощи новаго линейнаго преобразованія

$$\begin{aligned} x_1' &= b_1^{(1)} x_1'' + b_2^{(1)} x_2'' + \ldots + b_n^{(1)} x_n'' \\ x_2' &= b_1^{(2)} x_1'' + b_2^{(2)} x_2'' + \ldots + b_n^{(2)} x_n'' \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= b_1^{(n)} x_1'' + b_2^{(n)} x_2'' + \ldots + b_n^{(n)} x_n'', \end{aligned} \tag{3}$$

которое можно символически написать

$$x' = B(x''). \tag{4}$$

Если мы въ правыхъ частяхъ равенствъ (1) подставимъ вмѣсто $x_1' x_2' \ldots x_n'$ ихъ выраженія (3), то у насъ получится новое линейное преобразованіе, переводящее первоначальныя перемѣнныя $x_1 x_2 \ldots x_n$ въ $x_1'' x_2'' \ldots x_n''$.

Пусть это преобразованіе будетъ

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1^{(1)} x_1'' + c_2^{(1)} x_2'' + \ldots + c_n^{(1)} x_n'' \\ x_2 &= c_1^{(2)} x_1'' + c_2^{(2)} x_2'' + \ldots + c_n^{(2)} x_n'' \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_1^{(n)} x_1'' + c_2^{(n)} x_2'' + \ldots + c_n^{(n)} x_n'', \end{aligned} \tag{5}$$

которое обозначимъ символически

(6) $$x = C(x'').$$

Очевидно, что преобразованіе (5) есть результатъ двухъ преобразованій (1) и (3), причемъ сначала произведено преобразованіе (1), а потомъ преобразованіе (3). Можемъ написать, слѣдовательно, на основаніи (2) и (4)

(7) $$x = AB(x'').$$

Формула (7) написана такимъ образомъ, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что преобразованіе (6) съ матрицей C получается отъ послѣдовательнаго производства двухъ преобразованій: сначала преобразованіе съ матрицей A, а потомъ преобразованіе съ матрицей B.

Мы будемъ писать символическое равенство

(8) $$C = A \, . \, B$$

и говорить, что матрица C происходитъ отъ умноженія матрицы A на матрицу B.

Посмотримъ, какъ составляются элементы матрицы C по элементамъ матрицъ A и B. Нетрудно убѣдиться, что мы приходимъ къ формулѣ

(9) $$c_i^{(k)} = a_1^{(k)} b_i^{(1)} + a_2^{(k)} b_i^{(2)} + a_3^{(k)} b_i^{(3)} + \ldots + a_{(n)}^{(k)} b_i^{(n)}.$$

Итакъ, мы замѣчаемъ, что каждый элементъ $c_i^{(k)}$ матрицы C, представляющій изъ себя произведеніе матрицъ A и B, образуется по формулѣ (9) изъ элементовъ k-ой горизонтали 1-аго множителя A и элементовъ i-ой колонны 2-ого множителя B.

Нетрудно на простыхъ примѣрахъ замѣтить, что, если мы будемъ 2 матрицы считать равными только въ случаѣ ихъ полной тождественности, то умноженіе матрицъ есть операція не перестановочная, т. е. вообще говоря $A \, . \, B$ не равно $B \, . \, A$.

§ 21.

Теорема. *Опредѣлитель матрицы $C = A \, . \, B$ равенъ произведенію опредѣлителей матрицъ A и B.*

Если мы условимся обозначать знакомъ $|A|$ опредѣлитель матрицы A, то теорема выразится равенствомъ

$$|C| = |A| \, . \, |B|.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$(1)\quad |C| = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}b_1^{(1)} + a_2^{(1)}b_1^{(2)} + a_3^{(1)}b_1^{(3)} + \ldots, & a_1^{(1)}b_2^{(1)} + a_2^{(1)}b_2^{(2)} + \ldots \\ a_1^{(2)}b_1^{(1)} + a_2^{(2)}b_1^{(2)} + a_3^{(2)}b_1^{(3)} + \ldots, & a_1^{(2)}b_2^{(1)} + a_2^{(2)}b_2^{(2)} + \ldots \\ a_1^{(3)}b_1^{(1)} + a_2^{(3)}b_1^{(2)} + a_3^{(3)}b_1^{(3)} + \ldots, & a_1^{(3)}b_2^{(1)} + a_2^{(3)}b_2^{(2)} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что опредѣлитель правой части равенства (1) распадается на сумму всевозможныхъ такихъ опредѣлителей

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a_{i_1}^{(1)}b_1^{(i_1)}, & a_{i_2}^{(1)}b_2^{(i_2)} & \ldots & a_{i_n}^{(1)}b_n^{(i_n)} \\ a_{i_1}^{(2)}b_1^{(i_1)}, & a_{i_2}^{(2)}b_2^{(i_2)} & \ldots & a_{i_n}^{(2)}b_n^{(i_n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_1}^{(n)}b_1^{(i_1)}, & a_{i_2}^{(n)}b_2^{(i_2)} & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = b_1^{(i_1)} b_2^{(i_2)} \ldots b_n^{(i_n)} \begin{vmatrix} a_{i_1}^{(1)} & a_{i_2}^{(1)} & \ldots & a_{i_n}^{(1)} \\ a_{i_1}^{(2)} & a_{i_2}^{(2)} & \ldots & a_{i_n}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_1}^{(n)} & a_{i_2}^{(n)} & \ldots & a_{i_n}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Это же выраженіе (2) будетъ равно 0, если среди чиселъ $i_1\ i_2 \ldots i_n$ будутъ одинаковыя.

Итакъ, опредѣлитель (1), который мы вычисляемъ, будетъ суммой выраженій (2), распространенныхъ на такія цѣлыя значенія

$$i_1\ i_2 \ldots i_n,$$

которыя представляютъ собою различныя перемѣщенія безъ повтореній цѣлыхъ чиселъ $1\ 2\ 3 \ldots n$, слѣдовательно, получаемъ формулу

$$|C| = \sum b_1^{(i_1)} b_2^{(i_2)} \ldots b_n^{(i_n)} \begin{vmatrix} a_{i_1}^{(1)} & a_{i_2}^{(1)} & \ldots & a_{i_n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видѣть, что если мы въ послѣднемъ уравненіи въ правой его части приведемъ въ порядокъ нижніе значки подъ знакомъ опредѣлителя, то получимъ окончательно

$$|C| = |A| \sum (-1)^I b_1^{(i_1)} b_2^{(i_2)} \ldots b_n^{(i_n)},$$

гдѣ показатель I обозначаетъ число безпорядковъ въ перемѣщеніи

$$i_1\ i_2 \ldots i_n.$$

Мы получаемъ, слѣдовательно, формулу

$$|C| = |A| \cdot |B|,$$

что и требовалось доказать.

§ 22

Доказанная въ предыдущемъ параграфѣ теорема даетъ возможность представить произведенiе двухъ опредѣлителей одного и того же порядка въ видѣ новаго опредѣлителя того же порядка. Матрица произведенiя находится выше указаннымъ правиломъ умноженiя матрицъ.

§ 23.

Хотя правило умноженiя матрицъ не обладаетъ перестановочнымъ закономъ, но правило умноженiя опредѣлителей уже такимъ закономъ обладаетъ, и мы получаемъ для двухъ матрицъ AB и BA одинъ и тотъ же опредѣлитель

$$|A| \cdot |B|.$$

§ 24.

Такъ какъ опредѣлитель не мѣняется отъ замѣны горизонталей колоннами, то вмѣсто того, чтобы умножать горизонтали 1-ого множителя на колонны 2-ого, можно было бы поступить обратно, умножать колонны 1-ого множителя на горизонтали 2-ого или же, наконецъ, перемножать горизонтали обоихъ множителей или же колонны обоихъ множителей. Такъ, напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 ; & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 ; & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 ; & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 ; & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 ; & c_1b_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 ; & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 ; & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 ; & a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 ; & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 ; & a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_2 ; & a_3\beta_1 + b_3\beta_2 + c_3\beta_3 ; & a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

и т. д.

§ 25.

Распространимъ теперь правило перемноженія квадратныхъ матрицъ на случай матрицъ не квадратныхъ, предполагая эти матрицы *подобными* въ томъ смыслѣ, что у нихъ одинаковое число какъ горизонталей, такъ и колоннъ.

Отступимъ отъ установленнаго нами въ § 20 для квадратныхъ матрицъ правила умноженія, состоящаго въ умноженіи элементовъ горизонтали перваго (лѣваго) множителя на элементы колонны второго.

Будемъ производить перемноженія матрицъ при помощи перемноженія горизонталей.

Разсмотримъ сначала случай перемноженія по горизонталямъ матрицъ, число колоннъ которыхъ меньше числа горизонталей.

Возьмемъ, напримѣръ,

$$\begin{Vmatrix} a, & a_1 \\ b, & b_1 \\ c, & c_1 \end{Vmatrix} \text{ и } \begin{Vmatrix} \alpha, & \alpha_1 \\ \beta, & \beta_1 \\ \gamma, & \gamma_1 \end{Vmatrix};$$

Перемножая по горизонталямъ, получимъ матрицу

$$\begin{Vmatrix} a\alpha + a_1\alpha_1 & a\beta + a_1\beta_1 & a\gamma + a_1\gamma_1 \\ b\alpha + b_1\alpha_1 & b\beta + b_1\beta_1 & b\gamma + b_1\gamma_1 \\ c\alpha + c_1\alpha_1 & c\beta + c_1\beta_1 & c\gamma + c_1\gamma_1 \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно видѣть, что опредѣлитель послѣдней матрицы равенъ *нулю*, ибо этотъ опредѣлитель можетъ быть переписанъ такъ

$$\begin{vmatrix} a\alpha + a_1\alpha_1 + 0.0 & a\beta + a_1\beta_1 + 0.0 & a\gamma + a_1\gamma_1 + 0.0 \\ b\alpha + b_1\alpha_1 + 0.0 & b\beta + b_1\beta_1 + 0.0 & b\gamma + b_1\gamma_1 + 0.0 \\ c\alpha + c_1\alpha_1 + 0.0 & c\beta + c_1\beta_1 + 0.0 & c\gamma + c_1\gamma_1 + 0.0 \end{vmatrix},$$

откуда мы видимъ, что онъ равенъ произведенію такихъ 2-хъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 0 \\ b & b_1 & 0 \\ c & c_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & 0 \\ \beta & \beta_1 & 0 \\ \gamma & \gamma_1 & 0 \end{vmatrix},$$

изъ которыхъ каждый равенъ нулю

При помощи аналогичныхъ разсужденій можно будетъ доказать такую общую теорему:

Отъ перемноженія по горизонталямъ двухъ подобныхъ матрицъ, число колоннъ которыхъ меньше числа горизонталей, получается квадратная матрица, опредѣлитель которой равенъ нулю.

§ 26.

Разсмотримъ теперь случай перемноженія по горизонталямъ 2 хъ матрицъ, у которыхъ число колоннъ больше числа горизонталей

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{Vmatrix}.$$

Послѣ умноженія получаемъ матрицу

$$\begin{Vmatrix} a\alpha + b\beta + c\gamma & a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma \\ a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 & a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица имѣетъ опредѣлитель, который на основаніи соображеній, подобныхъ приведеннымъ въ § 21, представится въ видѣ суммы произведеній такихъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

и мы приходимъ къ такой общей теоремѣ:

Отъ перемноженія по горизонталямъ двухъ подобныхъ матрицъ, число колоннъ которыхъ больше числа горизонталей, получается квадратная матрица, опредѣлитель которой равенъ суммѣ произведеній всевозможныхъ опредѣлителей одной матрицы на соотвѣтственные опредѣлители другой.

Въ этой теоремѣ опредѣлители имѣютъ порядокъ, равный числу горизонталей перемножаемыхъ матрицъ.

§ 27.

Покажемъ приложеніе послѣдней теоремы къ выводу замѣчательнаго тождества, указаннаго Euler'омъ.

Возвысимъ по горизонталямъ въ квадратъ матрицу

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{Vmatrix}$$

т. е., другими словами, перемножимъ двѣ тождественныя матрицы. Получимъ

по теоремѣ предыдущаго §-а формулу

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & a_1a+b_1b+c_1c+d_1d \\ aa_1+bb_1+cc_1+dd_1 & a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (ab_1)^2+(ac_1)^2+(ad_1)^2+(bc_1)^2+(bd_1)^2+(cd_1)^2,$$

гдѣ $(ab_1)=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1-a_1b$, $(ac_1)=ac_1-a_1c$ и т. д.

Нетрудно видѣть (см. § 18), что существуетъ тождество

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} ab_1-ba_1 & b_1 & b \\ ac_1-ca_1 & c_1 & c \\ ad_1-da_1 & d_1 & d \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскладывая тождество (2) по элементамъ первой колонны, получимъ

$$(ab_1-ba_1)(c_1d-d_1c)+(ac_1-ca_1)(bd_1-db_1)+(ad_1-da_1)(b_1c-cb_1)=0 .$$

Перепишемъ это тождество такъ:

$$(3)\qquad (ab_1)(c_1d)+(ac_1)(bd_1)+(ad_1)(b_1c)=0 .$$

Перепишемъ равенство (1) слѣдующимъ образомъ

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1+dd_1)^2 =$$

$$= (ab_1)^2+(ac_1)^2+(ad_1)^2+(bc_1)^2+(bd_1)^2+(cd_1)^2 ,$$

прикладывая къ правой части послѣдняго равенства удвоенное тождество (3), получимъ

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1+dd_1)^2 =$$

$$= [(ab_1)+(c_1d)]^2+[(ac_1)+(bd_1)]^2+[(ad_1)+(b_1c)]^2 .$$

Это тождество можно окончательно переписать такъ

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2) =$$

$$= (aa_1+bb_1+cc_1+dd_1)^2+(ab_1-ba_1+c_1d-cd_1)^2+$$

$$+(ac_1-ca_1+bd_1-b_1d)^2+(ad_1-a_1d+b_1c-bc_1)^2 .$$

Это тождество Euler'а выражаетъ такую теорему.

Если перемножаются два выраженія, изъ которыхъ каждое есть сумма четырехъ квадратовъ, то и произведеніе есть сумма четырехъ квадратовъ.

Эта теорема примѣняется между прочимъ при доказательствѣ теоремы теоріи чиселъ, что всякое цѣлое число есть сумма четырехъ квадратовъ, напр. $31 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2$

§ 28

Разсмотримъ два уравненія съ тремя неизвѣстными

$$(1) \qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z &= 0 . \end{aligned}$$

Непосредственное вычисленіе показываетъ, что можно преобразовать заданную систему (1) въ такую пропорцію

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}.$$

Итакъ, уравненія (1) удовлетворяются значеніями

$$bc_1 - cb_1 , \; ca_1 - ac_1 , \; ab_1 - ba_1$$

неизвѣстныхъ x, y, z.

Указанное свойство системы (1) обобщается на случай $n - 1$ однородныхъ уравненій съ n неизвѣстными

$$(2) \qquad \begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots + g_1x_n = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots + g_2x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x_1 + b_{n-1}x_2 + c_{n-1}x_3 + \ldots + g_{n-1}x_n = 0 . \end{array}$$

Нетрудно убѣдиться, что эти уравненія равносильны такой пропорціи

$$(3) \qquad \frac{x_1}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \ldots & g_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & g_{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} c_1 & \ldots & g_1 & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & \ldots & g_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}} = \ldots ,$$

т. е., другими словами, система (2) удовлетворяется, если мы положимъ вмѣсто x_1, x_2, ... x_n соотвѣтственные опредѣлители, стоящіе въ знаменателяхъ (3). Послѣ подстановки уравненія (2) обращаются, очевидно, въ тождества, ибо лѣвыя ихъ части становятся опредѣлителями съ двумя одинаковыми горизонталями.

Линейныя формы.

§ 29.

Будемъ разсматривать m функцій первой степени отъ n неизвѣстныхъ

(1) $$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n,$$

а именно функціи вида

(2) $$\begin{aligned} X_1 &= a_1^{(1)}x_1 + a_1^{(2)}x_2 + \ldots + a_1^{(n)}x_n - b_1, \\ X_2 &= a_2^{(1)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + \ldots + a_2^{(n)}x_n - b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m &= a_m^{(1)}x_1 + a_m^{(2)}x_2 + \ldots + a_m^{(n)}x_n - b_m. \end{aligned}$$

Мы будемъ называть линейныя функціи (2) *независимыми* между собою, если можно подобрать такія численныя значенія независимыхъ перемѣнныхъ (1), чтобы функціи X_1, X_2, ... X_m получили рядъ произвольно назначенныхъ численныхъ значеній, т. е. чтобы было

(3) $$X_1 = \alpha_1,\ X_2 = \alpha_2,\ \ldots\ X_m = \alpha_m,$$

гдѣ числа α_1, α_2, ... α_m совершенно произвольныя.

Если же равенства (3) перестанутъ удовлетворяться при нѣкоторомъ выборѣ чиселъ α_1, α_2, ... α_m, то мы будемъ говорить, что функціи X_1, X_2, ... X_m *зависимы* между собою.

§ 30.

Разсмотримъ случай $m = n$. Тогда вопросъ о независимости функцій X_1, X_2, ... X_n приводится къ вопросу рѣшенія слѣдующей системы n уравненій

(1) $$\begin{aligned} X_1 &= a_1^{(1)}x_1 + a_1^{(2)}x_2 + \ldots + a_1^{(n)}x_n - b_1, \\ X_2 &= a_2^{(1)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + \ldots + a_2^{(n)}x_n - b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= a_n^{(1)}x_1 + a_n^{(2)}x_2 + \ldots + a_n^{(n)}x_n - b_n \end{aligned}$$

съ n неизвѣстными x_1, x_2, ... x_n.

Разсмотримъ опредѣлитель

$$(2)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots & a_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots & a_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

а также взаимный опредѣлитель

$$(3)\qquad \Delta^{n-1}=\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & \ldots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & \ldots & A_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n^{(1)}, & A_n^{(2)}, & \ldots & A_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Обозначимъ

$$\Delta_h=b_1A_1^{(h)}+b_2A_2^{(h)}+\ldots+b_nA_n^{(h)}.$$

Очевидно, что Δ_h есть ничто иное, какъ опредѣлитель, который получается отъ замѣны h-ой колонны опредѣлителя Δ колонной коэффиціентовъ $b_1, b_2, \ldots b_n$.

Умножая уравненія (1) послѣдовательно на миноры 1-ой колонны взаимнаго опредѣлителя и складывая, получимъ

$$(4)\qquad \Delta x_1 = \Delta_1 = X_1A_1^{(1)}+X_2A_2^{(1)}+\ldots+X_nA_n^{(1)};$$

совершенно подобнымъ образомъ, умножая на другія колонны опредѣлителя, получимъ рядъ равенствъ

$$(5)\qquad \begin{aligned} \Delta x_2 &= \Delta_2=X_1A_1^{(2)}+X_2A_2^{(2)}+\ldots+X_nA_n^{(2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta x_n &= \Delta_n=X_1A_1^{(n)}+X_2A_2^{(n)}+\ldots+X_nA_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Равенства (4) и (5) показываютъ, что для независимости разсматриваемыхъ n функцій необходимо и достаточно, чтобы опредѣлитель Δ былъ отличенъ отъ нуля, потому что только въ этомъ случаѣ мы получимъ опредѣленныя значенія неизвѣстныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, если произвольно заданы численныя значенія функцій $X_1, X_2, \ldots X_n$.

Въ частномъ случаѣ, когда положимъ

$$(6)\qquad X_1=0,\ X_2=0,\ \ldots\ X_n=0,$$

то получаемъ, очевидно, основную задачу о рѣшеніи n уравненій 1-ой степени съ n неизвѣстными, и получается, слѣдовательно, теорема:

Система уравненій (6) имѣетъ опредѣленное рѣшеніе только въ томъ случаѣ, когда опредѣлитель Δ не равенъ нулю, и тогда по уравненіямъ (4) и (5) получается рѣшеніе этой системы въ такомъ видѣ

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \ldots \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

§ 31.

Чтобы дополнить анализъ, надо было бы разсмотрѣть случай $\Delta = 0$, но будетъ короче, если мы этотъ случай будемъ разсматривать, какъ частный случай болѣе общихъ соображеній, къ которымъ мы теперь перейдемъ

Рангъ системы линейныхъ функцій.

§ 32.

Бернемся теперь къ самому общему случаю, разобранному въ § 29, когда число функцій m не равно числу перемѣнныхъ n.

Составимъ теперь прямоугольную фигуру

$$\begin{array}{cccc} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots & a_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^{(1)}, & a_m^{(2)}, & \ldots & a_m^{(n)} \end{array}$$

изъ коэффиціентовъ этихъ функцій при неизвѣстныхъ такимъ образомъ, чтобы по горизонталямъ находились коэффиціенты одной и той же функціи, а по колоннамъ коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ.

Будемъ называть полученную такимъ образомъ фигуру *матрицею* коэффиціентовъ заданной системы функцій. Если мы укажемъ α нѣкоторыхъ горизонталей матрицы, а также α вертикалей ея, то изъ α^2 элементовъ, находящихся на пересѣченіи выбранныхъ горизонталей съ выбранными вертикалями, можно будетъ составить опредѣлитель; если мы этотъ опредѣлитель такъ составимъ, что элементы какой нибудь горизонтали матрицы образуютъ горизонталь въ опредѣлителѣ, и также элементы вертикали матрицы образуютъ вертикаль въ опредѣлителѣ, то будемъ говорить, что полученный такимъ образомъ опредѣлитель *взятъ* изъ матрицы. Очевидно, что, если $\alpha = 0$, то опредѣлитель, взятый изъ матрицы, будетъ

ничѣмъ инымъ, какъ однимъ изъ ея элементовъ. Конечно, самое большое значеніе порядка a опредѣлителя, взятаго изъ матрицы, не можетъ превосходить наименьшаго изъ чиселъ m и n.

Назовемъ *рангомъ* матрицы наибольшій порядокъ отличнаго отъ нуля опредѣлителя, взятаго изъ матрицы.

Поясннмъ наше опредѣленіе примѣрами:

1-ый примѣръ. Всѣ элементы матрицы равны нулю. Очевидно, что въ этомъ случаѣ будутъ равняться нулю всѣ опредѣлители, взятые изъ матрицы. Можно сказать, что въ этомъ случаѣ рангъ матрицы равенъ нулю. Обыкновенно матрицы ранга, равнаго нулю не разсматриваются.

2-ой примѣръ. Покажемъ примѣръ матрицы ранга, равнаго единицѣ Возьмемъ матрицу

$$
(1)\qquad
\begin{matrix}
\alpha_1\beta_1, & \alpha_1\beta_2, & \dots & \alpha_1\beta_n \\
\alpha_2\beta_1, & \alpha_2\beta_2, & \dots & \alpha_2\beta_n \\
\alpha_3\beta_1, & \alpha_3\beta_2, & \dots & \alpha_3\beta_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_n\beta_1, & \alpha_n\beta_2, & \dots & \alpha_n\beta_n
\end{matrix}
$$

каждый элементъ которой состоитъ изъ двухъ множителей, причемъ первые множители одинаковы по горизонталямъ, а вторые множители одинаковы по вертикалямъ. Если ни одинъ изъ входящихъ въ разсмотрѣніе множителей не равенъ нулю, то не будетъ равняться нулю ни одинъ изъ элементовъ матрицы, т. е., другими словами, всѣ опредѣлители перваго порядка данной матрицы отличны отъ нуля. Нетрудно убѣдиться, что всѣ опредѣлители, взятые изъ данной матрицы, начиная со второго порядка, будутъ равны нулю. Напримѣръ, опредѣлители

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_1\beta_1, & \alpha_1\beta_2, & \alpha_1\beta_3 \\
\alpha_2\beta_1, & \alpha_2\beta_2, & \alpha_2\beta_3 \\
\alpha_3\beta_1, & \alpha_3\beta_2, & \alpha_3\beta_3
\end{vmatrix}
= \alpha_1\alpha_2\alpha_3
\begin{vmatrix}
\beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\
\beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\
\beta_1, & \beta_2, & \beta_3
\end{vmatrix}
= 0;
$$

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_1\beta_1, & \alpha_1\beta_2 \\
\alpha_2\beta_1, & \alpha_2\beta_2
\end{vmatrix}
= \alpha_1\alpha_2
\begin{vmatrix}
\beta_1, & \beta_2 \\
\beta_1, & \beta_2
\end{vmatrix}
= 0
$$

Итакъ, мы видимъ, что рангъ заданной матрицы есть 1 ый.

Нетрудно показать, что самый общій видъ матрицы 1-го ранга есть вышенаписанный (1).

3-ій примѣръ. Разсмотрѣнный въ § 30 случай неравенства нулю опредѣлителя Δ, составленнаго изъ всей квадратной матрицы съ n колоннами

и съ n горизонталями, убѣждаетъ насъ, что матрица этого опредѣлителя имѣетъ рангъ n.

§ 33.

Покажемъ теперь условія, необходимыя и достаточныя для совмѣстимости m уравненій съ n неизвѣстными. Разсмотримъ опять систему (2) линейныхъ функцій § 29.

Составимъ матрицу коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ для этихъ функцій. Пусть рангъ этой матрицы будетъ p. Будемъ число p называть *рангомъ системы*. Тогда очевидно, что существуетъ по крайней мѣрѣ одинъ опредѣлитель порядка p, взятый изъ матрицы, который не будетъ равняться нулю; всѣ же опредѣлители высшихъ порядковъ будутъ равны нулю. Если будетъ нѣсколько неравныхъ нулю опредѣлителей порядка p, тогда мы возьмемъ одинъ изъ нихъ. Будемъ называть *главнымъ* этотъ неравный нулю опредѣлитель порядка p матрицы ранга p. Не нарушая общности вопроса, мы можемъ считать, что главный опредѣлитель будетъ

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots & a_1^{(p)} \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots & a_2^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^{(1)}, & a_p^{(2)}, & \ldots & a_p^{(p)} \end{vmatrix},$$

потому что всегда можемъ переставить, какъ функціи, такъ и перемѣнныя.

Составимъ теперь слѣдующій опредѣлитель $p+1$ порядка

$$\delta_{p+\alpha} = \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots & a_1^{(p)}, & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^{(1)}, & a_p^{(2)}, & \ldots & a_p^{(p)}, & b_p \\ a_{p+\alpha}^{(1)}, & a_{p+\alpha}^{(2)}, & \ldots & a_{p+\alpha}^{(p)}, & b_{p+\alpha} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что такихъ опредѣлителей можно будетъ составить $m-p$, давая числу α значенія $1, 2, 3, \ldots m-p$. Будемъ называть такіе опредѣлители *характеристическими*. Если бы случилось, что $p=m$, то мы скажемъ, что характеристическій опредѣлитель равенъ нулю.

Основная теорема. *Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ совмѣстимости m уравненій первой степени съ n неизвѣстными является равенство нулю всѣхъ характеристическихъ опредѣлителей. Если рангъ системы равенъ числу неизвѣстныхъ, то получается одна система рѣшеній; во всѣхъ другихъ случаяхъ получается безчисленное множество рѣшеній.*

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ опредѣлитель

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \dots & a_1^{(p)}, & X_1 \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \dots & a_2^{(p)}, & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^{(1)}, & a_p^{(2)}, & \dots & a_p^{(p)}, & X_p \\ a_{p+\alpha}^{(1)}, & a_{p+\alpha}^{(2)}, & \dots & a_{p+\alpha}^{(p)}, & X_{p+\alpha} \end{vmatrix};$$

такъ какъ каждый элементъ послѣдней колонны есть сумма нѣсколькихъ членовъ, то разложимъ этотъ опредѣлитель на сумму опредѣлителей, получаются опредѣлители слѣдующихъ двухъ видовъ:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \dots & a_1^{(p)}, & a_1^{(r)}x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^{(1)}, & a_p^{(2)}, & \dots & a_p^{(p)}, & a_p^{(r)}x_r \\ a_{p+\alpha}^{(1)}, & a_{p+\alpha}^{(2)}, & \dots & a_{p+\alpha}^{(p)}, & a_{p+\alpha}^{(r)}x_r \end{vmatrix}$$

и

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & \dots & a_1^{(p)}, & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+\alpha}^{(1)}, & \dots & a_{p+\alpha}^{(p)}, & -b_{p+\alpha} \end{vmatrix} = -\delta_{p+\alpha}.$$

Что касается опредѣлителей (3), то всѣ они равны нулю, ибо въ нихъ можно вынести изъ подъ знака опредѣлителя x_r и тогда у насъ выйдетъ при $r \leqq p$ опредѣлитель съ двумя одинаковыми колоннами, а при $r > p$ получается опредѣлитель порядка $p+1$, взятый изъ матрицы, а такіе опредѣлители всѣ равны нулю, потому что рангъ матрицы есть p; значитъ, получаемъ равенство

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_1^{(1)}, & a^{(2)}, & \dots & a_1^{(p)}, & X_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^{(1)}, & a_p^{(2)}, & \dots & a_p^{(p)}, & X_p \\ a_{p+\alpha}^{(1)}, & a_{p+\alpha}^{(2)}, & \dots & a_{p+\alpha}^{(p)}, & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} = \delta_{p+\alpha}.$$

Такъ какъ главный опредѣлитель δ отличенъ отъ нуля, то по теоремѣ § 30 можно рѣшить систему

$$(6)\qquad X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \dots\ X_p = 0$$

относительно p неизвѣстныхъ

$$(7)\qquad x_1,\ x_2,\ \dots\ x_p$$

и выразить эти неизвѣстныя при помощи линейныхъ выраженій черезъ остальныя перемѣнныя

(8) $$x_{p+1}, \dots x_n,$$

которыя остаются совершенно произвольными. Дадимъ этимъ послѣднимъ какія нибудь произвольныя частныя значенія, напримѣръ,

(9) $$x'_{p+1}, x'_{p+2}, \dots x'_n;$$

тогда черезъ рѣшеніе уравненій (6) относительно неизвѣстныхъ (7) получимъ соотвѣтствующія значенія

(10) $$x_1', x_2', \dots, x_p'.$$

Итакъ, совокупность значеній (9) и (10) обращаетъ уравненія (6) въ тождества. Подставимъ значенія (9) и (10) въ функцію

$$X_{p+\alpha};$$

пусть эта функція получитъ значеніе $X'_{p+\alpha}$. Если мы подставимъ тѣ же самыя численныя значенія (9) и (10) въ уравненіе (5), то это уравненіе можетъ быть переписано такъ

(11) $$\delta X'_{p+\alpha} = -\delta_{p+\alpha}.$$

Такъ какъ опредѣлитель δ не $=0$, то, если мы хотимъ, чтобы всѣ уравненія

$$X_1 = 0, X_2 = 0, \dots X_p = 0 \dots X_m = 0$$

были совмѣстны, то должно имѣть мѣсто равенство

$$X'_{p+\alpha} = 0$$

при всякомъ значеніи α, потому что значенія перемѣнныхъ, удовлетворяющія первымъ p уравненіямъ, должны также и другимъ удовлетворять. Мы видимъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ равенства нулю всѣхъ $X'_{p+\alpha}$ является равенство нулю всѣхъ характеристическихъ опредѣлителей:

$$\delta_{p+\alpha}.$$

Вторая часть теоремы слѣдуетъ изъ того, что, если $p = n$, то тогда всѣ перемѣнныя заключаются въ системѣ (7) и не существуетъ уже произвольныхъ перемѣнныхъ (8), такъ что рѣшеніе получается вполнѣ опредѣленное.

§ 34.

Поясним теорію предыдущаго параграфа на простѣйших примѣрах.

1-ый примѣръ. Дана система

$$ax + by = c,$$
(1)
$$a_1x + b_1y = c_1.$$

1°. Рангъ матрицы, составленной изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, есть 2, значитъ, не равенъ нулю опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix};$$

мы получаемъ опредѣленное рѣшеніе системы (1)

$$x = \frac{-bc_1 + b_1c}{ab_1 - a_1b},$$

$$y = \frac{-ca_1 + ac_1}{ab_1 - a_1b}.$$

2°. Рангъ матрицы равенъ 1; пусть главный опредѣлитель будетъ a, такъ что

$$a \text{ не } = 0.$$

Тогда характеристическій опредѣлитель будетъ

$$\delta = \begin{vmatrix} a, & c \\ a_1, & c_1 \end{vmatrix}:$$

α) если δ не $= 0$, то уравненія (1) несовмѣстны,

β) если $\delta = 0$, то второе уравненіе есть слѣдствіе перваго, и мы получаемъ

$$x = -\frac{b}{a}y_1 + \frac{c}{a},$$

$$y = y_1,$$

гдѣ y_1 число совершенно произвольное.

2-ой примѣръ. Пусть дана система:

$$ax + by + cz = d,$$
(2)
$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

1°. Рангъ матрицы коэффиціентовъ первой части есть 3, т. е. неравенъ нулю опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = D.$$

Если введемъ взаимный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix} = D^2,$$

то получается опредѣленное рѣшеніе системы

$$x = \frac{dA + d_1A_1 + d_2A_2}{D},$$

$$y = \frac{dB + d_1B_1 + d_2B_2}{D},$$

$$z = \frac{dC + d_1C_1 + d_2C_2}{D}.$$

2° Рангъ матрицы есть 2 Пусть главный опредѣлитель будетъ

$$C_2 = \begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix};$$

тогда для совмѣстности системы необходимо разсмотрѣть характеристическій опредѣлитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a, & b, & d \\ a_1, & b_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & d_2 \end{vmatrix} = dC + d_1C_1 + d_2C_2.$$

α) δ не $= 0$; въ системѣ противорѣчіе,

β) $\delta = 0$; тогда система совмѣстна. но третье уравненіе есть слѣдствіе первыхъ двухъ; рѣшая эти первыя два уравненія относительно x и y, получимъ

$$x = \frac{bc_1 - cb_1}{ab_1 - a_1b} z_1 + \frac{db_1 - bd_1}{ab_1 - ba_1},$$

$$y = \frac{ca_1 - ac_1}{ab_1 - a_1b} z_1 + \frac{ad_1 - da_1}{ab_1 - ba_1},$$

$$z = z_1,$$

гдѣ z_1 совершенно произвольное число.

3° Рангъ матрицы есть 1. Главный опредѣлитель a не $=0$. Тогда надо разсмотрѣть два характеристическихъ опредѣлителя

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a \,, & d \\ a_1 \,, & d_1 \end{vmatrix} . \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a \,, & d \\ a_2 \,, & d_2 \end{vmatrix} .$$

α) если по крайней мѣрѣ одинъ изъ двухъ характеристическихъ опредѣлителей δ_1 и δ_2 не равенъ нулю, то въ системѣ противорѣчіе,

β) если $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, то система совмѣстна, но второе и третье уравненія равносильны первому, такъ что мы получаемъ слѣдующее рѣшеніе системы

$$x = -\frac{b}{a} y_1 - \frac{c}{a} z_1 + \frac{d}{a} ,$$

$$y = y_1 ,$$

$$z = z_1 ,$$

гдѣ y_1 и z_1 совершенно произвольныя числа.

§ 35.

Обращаемся теперь къ вопросу о независимости линейныхъ функцій въ томъ случаѣ, когда число функцій не равняется числу перемѣнныхъ независимыхъ. Будемъ называть *рангомъ* системы заданныхъ линейныхъ функцій рангъ матрицы, составленной изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ въ этой системѣ. Докажемъ теорему.

Если рангъ системы функцій

$$X_1 ,\ X_2 ,\ \ldots\ X_m$$

равенъ числу p. то независимыми изъ этихъ функцій будутъ только p.

Разсмотримъ сначала случай, когда рангъ p равенъ числу m функцій.

Такъ какъ разсужденія будутъ тѣ же, что и въ общемъ случаѣ, то мы разсмотримъ случай трехъ функцій съ пятью перемѣнными независимыми

$$X = ax + by + cz + du + et + f ,$$

$$(1) \qquad X_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + e_1 t + f_1 ,$$

$$X_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + e_2 t + f_2 .$$

Если рангъ этой системы есть 3, то есть равенъ числу функцій, то можно считать, что не равенъ нулю главный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a\ , & b\ , & c \\ a_1\ , & b_1\ , & c_1 \\ a_2\ , & b_2\ , & c_2 \end{vmatrix},$$

значитъ, можно будетъ систему (1) рѣшить относительно трехъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y и z, причемъ выраженія для этихъ перемѣнныхъ будутъ заключать, кромѣ коэффиціентовъ, еще перемѣнныя независимыя

(2)
$$u\ ,\ t\ ,$$
$$X\ ,\ X_1\ ,\ X_2\ .$$

Такъ какъ рѣшеніе системы (1) зависѣло только отъ неравенства нулю главнаго опредѣлителя, а не отъ частныхъ значеній буквъ (2), то, значитъ, перемѣннымъ X, X_1, X_2 можно дать численныя значенія по произволу, и, значитъ, наши функціи всѣ независимы между собою. Теорема потверждается, ибо, дѣйствительно, оказывается, что число независимыхъ функцій равно рангу системы.

Разсмотримъ теперь случай, когда рангъ системы на единицу меньше числа функцій. Пусть задана система четырехъ функцій 3-го ранга

(3)
$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz + du + et + f\ , \\ X_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + e_1t + f_1\ , \\ X_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2u + e_2t + f_2\ , \\ X_3 &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + e_3t + f_3\ . \end{aligned}$$

Пусть главный опредѣлитель будетъ

$$\begin{vmatrix} a\ , & b\ , & c \\ a_1\ , & b_1\ , & c_1 \\ a_2\ , & b_2\ , & c_2 \end{vmatrix}.$$

Разсмотримъ еще характеристическій опредѣлитель

(4)
$$\delta = \begin{vmatrix} a\ , & b\ , & c\ , & f \\ a_1\ , & b_1\ , & c_1\ , & f_1 \\ a_2\ , & b_2\ , & c_2\ , & f_2 \\ a_3 & b_3\ , & c_3\ , & f_3 \end{vmatrix} = fF + f_1F_1 + f_2F_2 + f_3F_3\ ,$$

гдѣ F_2 есть ничто иное, какъ главный опредѣлитель.

Умножимъ уравненія системы (3) послѣдовательно на числа F, F_1, F_2, F_3, тогда получимъ послѣ сложенія

(5) $$XF + X_1F_1 + X_2F_2 + X_3F_3 = \delta,$$

потому что отъ замѣны въ опредѣлителѣ (4) послѣдней колонны f, f_1, f_2, f_3 различными колоннами коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ будутъ получаться нули, такъ какъ матрица есть 3-го ранга.

Рѣшая равенство (5) относительно функціи X_3, получимъ

$$X_3 = \frac{\delta}{F_3} - \frac{F}{F_3}X - \frac{F_1}{F_3}X_1 - \frac{F_2}{F_3}X_2.$$

т. е. имѣемъ

(6) $$X_3 = \alpha X + \beta X_1 + \gamma X_2 + \varepsilon,$$

гдѣ α, β, γ, ε суть опредѣленныя числа. Равенство (6) показываетъ, что заданныя функціи не независимы между собою. ибо, если зададимъ по произволу значенія X, X_1, X_2, то значеніе четвертой функціи X_3 не будетъ уже произвольнымъ, а будетъ опредѣляться по уравненію (6). Что касается трехъ функцій X, X_1, X_2, то онѣ независимы, потому что ихъ рангъ 3 равенъ числу функцій. Итакъ, можно считать высказанную теорему вполнѣ доказанною.

Разсмотримъ численный примѣръ:

$$\begin{aligned} X &= -x + y + z + 2t - 3, \\ X_1 &= x - y + z - 3u + 5, \\ X_2 &= x + y - z + 3u - 2t - 1, \\ X_3 &= x + y + z. \end{aligned}$$

Очевидно, что эти функціи не независимы, потому что легко убѣдиться, что

$$X_3 = X + X_1 + X_2 - 1.$$

§ 36.

Докажемъ еще теорему:

Если заданныя линейныя формы

$$X_1, \; X_2, \; \ldots \; X_m$$

отъ n независимыхъ перемѣнныхъ не независимы, то существуетъ тождество

(1) $$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, раскрывая тождество (1) и приравнивая нулю коэффиціенты при всѣхъ неизвѣстныхъ, получаемъ совмѣстную систему уравненій первой степени относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, изъ которой получатся отличныя отъ нуля значенія этихъ неизвѣстныхъ.

Изъ всего выше изложеннаго слѣдуетъ, что, если задана система зависимыхъ линейныхъ функцій, то всегда можно выразить эти линейныя функціи линейнымъ образомъ черезъ независимыя.

Теорема Laplace'a.

§ 37.

Пусть цѣлое число σ меньше n. Разсмотримъ всѣ члены опредѣлителя $A = |a^{(k)}|$, въ которыхъ входитъ множитель

$$a_1^{(1)} a_2^{(2)} \ldots a_\sigma^{(\sigma)}, \tag{1}$$

представляющій произведеніе σ верхнихъ элементовъ главной діагонали. Эти члены получатся изъ главнаго члена

$$a_1^{(1)} a_2^{(2)} \ldots a_\sigma^{(\sigma)} a_{\sigma+1}^{(\sigma+1)} \ldots a_n^{(n)},$$

если, оставляя безъ измѣненія верхніе индексы, мы будемъ такъ мѣнять нижніе, что первые σ индексы $1, 2, \ldots \sigma$ останутся безъ перемѣны, а мѣняются лишь остальные $\sigma+1, \sigma+2, \ldots n$; при этомъ, конечно, члену всякій разъ приписывается соотвѣтственный знакъ.

На основаніи опредѣленія понятія объ опредѣлителѣ разсматриваемая совокупность членовъ можетъ быть представлена въ такомъ видѣ

$$a_1^{(1)} a_2^{(2)} \ldots a_\sigma^{(\sigma)} \begin{vmatrix} a_{\sigma+1}^{(\sigma+1)} a_{\sigma+2}^{(\sigma+1)} \ldots a_n^{(\sigma+1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\sigma+1}^{(n)} a_{\sigma+2}^{(n)} \ldots a_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Въ послѣдней формулѣ опредѣлитель получается изъ опредѣлителя A вычеркиваніемъ первыхъ (верхнихъ) σ горизонталей и первыхъ (лѣвыхъ) σ колоннъ.

Будемъ называть такимъ образомъ полученный опредѣлитель *миноромъ порядка* σ и будемъ обозначать

$$A_{1,\,2,\,\ldots\,\sigma}^{(1,\,2,\,\ldots\,\sigma)}.$$

Въ послѣднемъ знакѣ нижніе индексы показываютъ нумера выкинутыхъ колоннъ, а верхніе нумера выкинутыхъ горизонталей.

Вообще говоря, мы обозначимъ символомъ

$$A_{i_1 i_2 \dots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \dots k_\sigma)}$$

миноръ порядка σ, получаемый изъ опредѣлителя A отъ вычеркиванія колоннъ, имѣющихъ нумера $i_1, \dots i_\sigma$, и горизонталей съ нумерами $k_1, k_2, \dots k_\sigma$, и умноженый на $(-1)^{K+I}$, гдѣ $K = k_1 + k_2 + \dots + k_\sigma$, $I = i_1 + i_2 + \dots + i_\sigma$.

Покажемъ, что коэффиціентомъ при

$$a_{i_1}^{(k_1)} a_{i_2}^{(k_2)} \dots a_{i_\sigma}^{(k_\sigma)}$$

будетъ какъ разъ выраженіе $A_{i_1 i_2 \dots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \dots k_\sigma)}$.

Пусть $i_1 < i_2 < \dots < i_\sigma$; $k_1 < k_2 < \dots < k_\sigma$. Перенесемъ k_1-ую горизонталь на верхъ, оставляя остальныя горизонтали въ ихъ первоначальномъ порядкѣ, т. е., если одна изъ остальныхъ горизонталей была выше какой нибудь другой до перенесенія, то она должна остаться лежащей выше и послѣ перенесенія. Такое перенесеніе будетъ совершаться при помощи ряда транспозиціи горизонталей: мы переносимъ k_1-ую горизонталь сначала на $(k_1 - 1)$-ое мѣсто, затѣмъ на $(k_1 - 2)$-ое и такъ далѣе, наконецъ на первое (верхнее) мѣсто. Отъ такого перенесенія весь опредѣлитель умножается на $(-1)^{k_1-1}$. Будемъ теперь переносить на верхъ k_2-ую горизонталь, причемъ сдѣлаемъ ее окончательно второю съ верху. Опредѣлитель получитъ множитель $(-1)^{k_2-2}$, ибо придется произвести $k_2 - 2$ транспозицій горизонталей, такъ какъ k_1-ой горизонтали (перенесенной на верхъ) нѣтъ на прежнемъ мѣстѣ.

Итакъ, перенесеніе горизонталей съ нумерами $k_1, k_2, \dots k_\sigma$ на верхъ безъ нарушенія взаимнаго расположенія другихъ горизонталей, причемъ эти верхнія горизонтали будутъ слѣдовать одна подъ другою въ порядкѣ возрастанія значковъ $k_1, k_2, \dots k_\sigma$, будетъ сопровождаться умноженіемъ всего опредѣлителя на множитель

$$(-1)^{k_1 - 1 + k_2 - 2 + \dots + k_\sigma - \sigma} = (-1)^{K - \frac{\sigma(\sigma+1)}{2}}.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ сдвинемъ налѣво колонны съ нумерами $i_1, i_2, \dots i_\sigma$, не нарушая ихъ взаимнаго расположенія, а также, не нарушая взаимнаго расположенія остальныхъ колоннъ; тогда опредѣлитель умножится на $(-1)^{I - \frac{\sigma(\sigma+1)}{2}}$.

Послѣ одновременнаго сдвига горизонталей наверхъ и колоннъ налѣво опредѣлитель умножится на

$$(-1)^{I + K - \sigma(\sigma+1)} = (-1)^{I+K},$$

ибо одно изъ двухъ чиселъ σ и $\sigma + 1$ четное, а элементы $a_{i_1}^{(k_1)} a_{i_2}^{(k_2)} a \ldots a_{i_\sigma}^{(k_\sigma)}$ сдѣлаются верхними въ главной діагонали. Тогда, принимая во вниманіе формулу (1), получимъ выраженіе

$$(3) \qquad a_{i_1}^{(k_1)} a_{i_2}^{(k_2)} \ldots a_{i_\sigma}^{(k_\sigma)} A_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)}$$

для совокупности всѣхъ членовъ опредѣлителя A, имѣющихъ множителя $a_{i_1}^{(k_1)} a_{i_2}^{(k_2)} \ldots a_{i_\sigma}^{(k_\sigma)}$.

Обозначимъ черезъ $B_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)}$ миноръ, образованный изъ элементовъ, стоящихъ на пересѣченіи горизонталей, имѣющихъ нумера $k_1, k_2, \ldots k_\sigma$ и колоннъ, имѣющихъ нумера $i_1, i_2, \ldots i_\sigma$.

Получаемъ формулу

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)} = \sum \pm a_{i_1}^{(k_1)} a_{i_2}^{(k_2)} \ldots a_{i_\sigma}^{(k_\sigma)},$$

причемъ сумма распространяется или на всѣ перемѣщенія верхнихъ индексовъ, если нижніе находятся въ естественномъ порядкѣ возрастанія, или наоборотъ на всѣ перемѣщенія нижнихъ индексовъ безъ измѣненія верхнихъ.

На основаніи формулы (3) мы видимъ, что въ составъ опредѣлителя A войдетъ полностью такое произведеніе

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)} A_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)}.$$

Величина $A_{i_1 \ldots}^{(k_1 \ldots)}$, равная нѣкоторому минору, умноженному, на $(-1)^{I+K}$, носитъ названіе *алгебраическаго дополненія* минора $B_{i_1 \ldots}^{(k_1 \ldots)}$.

Миноры $B_{i_1 \ldots}^{(k_1 \ldots)}$ и $A_{i_1 \ldots}^{(k_1 \ldots)}$ носятъ названіе *дополнительныхъ*.

§ 38.

Докажемъ теперь формулу

$$(1) \qquad A = \sum B_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)} A_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)},$$

выражающую теорему Laplace'a. Въ этой формулѣ суммированіе производится такъ: или числа $k_1, k_2, \ldots k_\sigma$ оставляются *опредѣленными* и сумма распространяется на *всевозможныя сочетанія* $i_1, i_2, \ldots i_\sigma$ индексовъ $1, 2, \ldots n$ по σ индексовъ въ каждомъ, или же числа $i_1, i_2, \ldots i_\sigma$ остаются безъ перемѣны, а мѣняются индексы $k_1, k_2, \ldots k_\sigma$.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что въ минорѣ $B_{i_1 \dots}^{(k_1 \dots)}$ заключается $1 . 2 \dots \sigma = \sigma!$ членовъ, а въ минорѣ $A_{i_1 \dots}^{(k_1 \dots)}$ будетъ $1 . 2 \dots (n - \sigma) = (n - \sigma)!$ членовъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ каждомъ членѣ суммы (1), представляющемъ произведеніе двухъ миноровъ, будетъ всего $\sigma!(n - \sigma)!$ членовъ. Сумма (1) не имѣетъ подобныхъ членовъ, слѣдовательно, во всей правой части (1) общее число членовъ будетъ $\sigma!(n - \sigma)!\, C_n^\sigma$, гдѣ C_n^σ есть число сочетаній изъ n элементовъ по σ.

Принимая же во вниманіе, что

$$\sigma!(n - \sigma)!\, C_n^\sigma = n!,$$

получимъ всѣ элементы опредѣлителя A, такъ что формула (1) оказывается справедливой.

Въ случаѣ $\sigma = 1$ получаемъ выведенную нами раньше формулу разложенія опредѣлителя A по элементамъ горизонтали или колонны

$$A = \sum B_i^{(k)} A_i^{(k)} = \sum a_i^{(k)} A_i^{(k)},$$

ибо $B_i^{(k)} = a_i^{(k)}$.

О взаимномъ опредѣлителѣ.

§ 39.

Составимъ для опредѣлителя

$$A = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

новый опредѣлитель

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & \dots & A_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n)} & \dots & A_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

элементы котораго $A_i^{(k)}$ суть алгебраическія дополненія соотвѣтственныхъ элементовъ $a_i^{(k)}$ первоначальнаго опредѣлителя. Опредѣлитель $\mathfrak{A}$ называется взаимнымъ относительно опредѣлителя A.

Умножимъ заданный опредѣлитель A на его взаимный $\mathfrak{A}$, тогда на основаніи формулъ (1), (2), (3) и (4) § 14 получимъ

$$A\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{vmatrix} = A^n,$$

откуда

$$\mathfrak{A} = A^{n-1}.$$

Взаимный опредѣлитель равенъ $(n-1)$-ой степени заданнаго опредѣлителя.

§ 40.

Докажемъ теперь такое свойство взаимнаго опредѣлителя:

Во взаимномъ опредѣлителѣ $\mathfrak{A}$ всякій миноръ порядка $n-\sigma$ равенъ алгебраическому дополненію соотвѣтствующаго ему минора въ первоначальномъ опредѣлителѣ, умноженному на $A^{\sigma-1}$.

Разсмотримъ миноръ

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & \ldots & A_\sigma^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^{(\sigma)} & \ldots & A_\sigma^{(\sigma)} \end{vmatrix},$$

составленный изъ σ верхнихъ горизонталей и σ лѣвыхъ колоннъ взаимнаго опредѣлителя $\mathfrak{A}$.

Добавленіемъ равныхъ единицѣ діагональныхъ элементовъ мы получимъ

$$A_\sigma = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & \ldots & A_\sigma^{(1)} & A_{\sigma+1}^{(1)} & \ldots & A_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1^{(\sigma)} & \ldots & A_\sigma^{(\sigma)} & A_{\sigma+1}^{(\sigma)} & \ldots & A_n^{(\sigma)} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Умножая опредѣлитель A на $\mathfrak{A}_\sigma$, получимъ

$$A\mathfrak{A}_\sigma = \begin{vmatrix} A & 0 \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & A \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots A & 0 & \ldots 0 \\ a_{\sigma+1}^{(1)} & \ldots a_{\sigma+1}^{(\sigma)} & a_{\sigma+1}^{(\sigma+1)} & \ldots a_{\sigma+1}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{(1)} & \ldots a_n^{(\sigma)} & a_n^{(\sigma+1)} & \ldots a_n^{(n)} \end{vmatrix};$$

откуда окончательно

$$\mathfrak{A}_\sigma = A^{\sigma-1} \begin{vmatrix} a_{\sigma+1}^{(\sigma+1)} a_{\sigma+1}^{(\sigma+2)} & \ldots & a_{\sigma+1}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^{(\sigma+1)} a_n^{(\sigma+2)} & \ldots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

и теорема доказана для случая *главнаго* минора A_σ (составленнаго изъ верхнихъ и лѣвыхъ рядовъ).

Чтобы доказать теорему въ общемъ случаѣ, достаточно передвинуть горизонтали и колонны вверхъ и влѣво, какъ это было сдѣлано въ § 37.

§ 41.

Какъ частный случай теоремы предыдущаго §-а, можетъ быть написана формула

$$A_{i_1}^{(k_1)}A_{i_2}^{(k_2)} - A_{i_1}^{(k_2)}A_{i_2}^{(k_1)} = AA_{i_1 i_2}^{(k_1 k_2)}.$$

Если $A = 0$, то имѣется пропорція $\frac{A_{i_1}^{(k_1)}}{A_{i_1}^{(k_2)}} = \frac{A_{i_2}^{(k_1)}}{A_{i_2}^{(k_2)}}$, то есть элементы одной горизонтали (колонны) пропорціональны соотвѣтственнымъ элементамъ другой.

Симметрическіе опредѣлители.

§ 42.

Назовемъ *сопряженнымъ* съ элементомъ $a_i^{(k)}$ элементъ $a_k^{(i)}$, индексы котораго переставлены. Подобнымъ образомъ миноръ

$$B_{i_1 i_2 \ldots i_\sigma}^{(k_1 k_2 \ldots k_\sigma)}$$

мы будемъ называть *сопряженнымъ* съ миноромъ

$$B_{k_1 k_2 \ldots k_\sigma}^{(i_1 i_2 \ldots i_\sigma)}.$$

Опредѣлитель, въ которомъ каждый элементъ равенъ своему сопряженному, $a_i^{(k)} = a_k^{(i)}$, называется *симметрическимъ*. Опредѣлитель называется *косымъ симметрическимъ*, если каждые два сопряженныхъ элемента равны между собой по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку, $a_i^{(k)} = -a_k^{(i)}$; а, слѣдовательно, въ частности всѣ элементы главной горизонтали равны нулю: $a_i^{(i)} = 0$.

Сопряженные миноры симметрическаго опредѣлителя равны между собой; отсюда слѣдуетъ, что взаимный опредѣлитель симметрическаго есть также симметрическій.

§ 43.

Покажемъ теперь, что *косые симметрическіе опредѣлители нечетнаго порядка тождественно равны нулю.*

Если мы въ одномъ изъ такихъ косыхъ опредѣлителей A замѣнимъ горизонтали вертикалями и обратно, то такая замѣна будетъ равносильна умноженію на -1 всѣхъ элементовъ опредѣлителя; другими словами, съ одной стороны опредѣлитель не измѣнится, съ другой стороны онъ умножится на $(-1)^n$, и мы получимъ $A=(-1)^n A$, но n есть число нечетное, значитъ $A=0$.

§ 44.

Покажемъ, что *косой симметрическій опредѣлитель четнаго порядка будетъ полнымъ квадратомъ.*

Напримѣръ,

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & -f \\ d & e & f & 0 \end{vmatrix} = (af-be+dc)^2 .$$

Для $n=2$ справедливость теоремы очевидна

$$\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2 .$$

Докажемъ справедливость теоремы для n, если предположить ея справедливость для $n-2$

Имѣемъ, очевидно,

$$A = a_r^{(r)} A_r^{(r)} - \sum \alpha_{ij} a_r^{(i)} a_j^{(r)},$$

гдѣ α_{ij} есть алгебраическое дополненіе элемента $a_j^{(i)}$ въ опредѣлителѣ $A_r^{(r)}$. На основаніи свойства элементовъ косого опредѣлителя имѣемъ

$$(1) \qquad A = \sum \alpha_{ij} a_i^{(r)} a_j^{(r)}.$$

Но миноръ $A_r^{(r)}$ есть также косой симметрическій нечетнаго порядка $n-1$. На основаніи формулы § 41 получаемъ

$$\alpha_{ii}\alpha_{jj} - \alpha_{ji}\alpha_{ij} = 0 . \qquad (2)$$

Но, очевидно, что алгебраическія дополненія сопряженныхъ элементовъ косого симметрическаго опредѣлителя нечетнаго порядка равны между

собой, т. е. $\mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_{ji}$. Формула (2) даетъ

$$\mathfrak{a}_{ij}^2 = \mathfrak{a}_{ii}\mathfrak{a}_{jj} \quad \text{или} \quad \mathfrak{a}_{ij} = \sqrt{\mathfrak{a}_{ii}}\sqrt{\mathfrak{a}_{jj}}\,.$$

Значитъ, по формулѣ (1) получаемъ

$$(3) \qquad A = \sum_{ij}(a_i^{(r)}\sqrt{\mathfrak{a}_{ii}}\,a_j^{(r)}\sqrt{\mathfrak{a}_{jj}}) - \left(\sum_i a_i^{(r)}\sqrt{\mathfrak{a}_{ii}}\right)^2.$$

Миноры $\mathfrak{a}_{ii}$ суть косые опредѣлители порядка $n-2$, слѣдовательно, согласно предположенію справедливости теоремы для $n-2$ величины $\mathfrak{a}_{ii}$ суть полные квадраты, а, слѣдовательно, радикалы $\sqrt{\mathfrak{a}_{ii}}$ являются выраженіями раціональными; такимъ образомъ мы видимъ, что по формулѣ (3) оказывается полнымъ квадратомъ также и опредѣлителя A порядка n, и теорема доказана.

Пріемы вычисленія опредѣлителей.

§ 45.

Покажемъ на рядѣ примѣровъ способы вычисленія опредѣлителей.

I. Опредѣлитель Vandermonde'а

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \dots & \alpha_n & 1 \end{vmatrix} = D$$

Располагая опредѣлитель D по элементамъ первой строки, получимъ

$$(1) \qquad D = \mathfrak{A}_0\alpha_1^{n-1} + \mathfrak{A}_1\alpha_1^{n-2} + \dots + \mathfrak{A}_{n-2}\alpha_1 + \mathfrak{A}_{n-1}\,,$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{A}_1,\ \dots \mathfrak{A}_{n-2},\ \mathfrak{A}_{n-1}$$

суть функціи отъ $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$, причемъ

$$\mathfrak{A}_0 = \begin{vmatrix} \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-3} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_3^{n-2} & \alpha_3^{n-3} & \dots & \alpha_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-3} & \dots & \alpha_n & 1 \end{vmatrix}.$$

Предполагая въ D величину α_1 какъ перемѣнную независимую, а величины $\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n$ какъ заданныя числа, замѣтимъ, что функція (1)

будетъ имѣть $n-1$ корней $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$, ибо, подставляя эти числа вмѣсто α_1, получаемъ двѣ одинаковыя строки, слѣдовательно, $D=0$. Итакъ

$$D = \mathfrak{A}_0(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_n).$$

Подобнымъ же образомъ, располагая опредѣлитель $\mathfrak{A}_0$ по элементамъ первой строки, находимъ, что

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)$$

и т. д. Отсюда получаемъ окончательно слѣдующее выраженіе для опредѣлителя D

$$\begin{aligned} D = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)&\ldots(\alpha_1-\alpha_n) \\ (\alpha_2-\alpha_3)&\ldots(\alpha_2-\alpha_n) \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ &(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{aligned}$$

II. Называются *циркулянтами* опредѣлители, различныя горизонтали которыхъ получаются при помощи круговой подстановки, произведенной надъ элементами первой горизонтали.

Чтобы вычислить значеніе циркулянта

$$D = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \\ a_n a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_2 a_3 a_4 \ldots a_1 \end{vmatrix}.$$

Умножимъ его на опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1\ \alpha_1 \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1} \\ 1\ \alpha_2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_2^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1\ \alpha_n \alpha_n^2 \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

гдѣ $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ суть всѣ корни двучленнаго уравненія $x^n-1=0$.

Полагая для сокращенія

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}$$

получимъ

$$D\Delta = \begin{vmatrix} f(\alpha_1)\ \alpha_1 f(\alpha_1)\ \alpha_1^2 f(\alpha_1) \ldots \alpha_1^{n-1} f(\alpha_1) \\ f(\alpha_2)\ \alpha_2 f(\alpha_2)\ \alpha_2^2 f(\alpha_2) \ldots \alpha_2^{n-1} f(\alpha_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix};$$

по выдѣленіи множителей $f(\alpha_1), f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_n)$ остается опредѣлитель Δ, и мы получаемъ

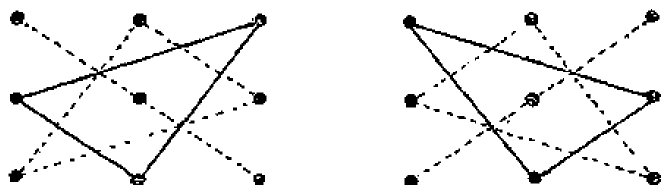
$$D = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_n).$$

Напримѣръ, случай $n=4$ дастъ $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$; корни уравненія x^4-1 суть $1, -1, i, -i (i=\sqrt{-1})$, $f(1)=a+b+c+d$, $f(-1)=a-b+c-d$, $f(i)=a-c+(b-d)i$, $f(-i)=a-c-(b-d)i$,

слѣдовательно,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)[(a-c)^2+(b-d)^2].$$

III. При вычисленіи опредѣлителей третьяго порядка полезно имѣть въ виду правило Sarrus'а



Чер. 6.

Надо перемножить между собою элементы, стоящіе на вершинахъ двухъ треугольниковъ лѣвой фигуры, а также надо перемножить элементы главной діагонали; такимъ образомъ получатся три члена опредѣлителя, передъ которыми придется поставить знакъ $+$; аналогичнымъ образомъ получимъ члены съ $-$ изъ правой фигуры

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

IV. При вычисленіи опредѣлителей съ заданными элементами самымъ практическимъ способомъ является сдѣлать элементы одной изъ горизонталей (колоннъ) за исключеніемъ одного равными нулю, тогда порядокъ опредѣлителя понижается.

Напримѣръ, требуется вычислить опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Прибавляемъ къ элементамъ второй горизонтали утроенные элементы первой, а изъ элементовъ четвертой горизонтали вычитаемъ элементы первой, тогда мы получаемъ

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 14 & 19 & 0 & 16 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этотъ опредѣлитель по элементамъ третьей колонны, получимъ

$$1.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 14 & 19 & 16 \\ 5 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0,$$

то есть порядокъ опредѣлителя, подлежащаго вычисленію, пониженъ на единицу.

V. Къ наиболѣе труднымъ вопросамъ, относящимся къ опредѣлителямъ, принадлежитъ вопросъ объ условіяхъ, когда опредѣлители сохраняютъ свой знакъ. Я приведу здѣсь одинъ примѣръ [1]) такого рода изслѣдованія.

Пусть $m_0 = 1$, $m_2 = \frac{1^2 3^2 \ldots (2i-1)^2}{2^2 4^2 \ldots (2i)^2}$.

Требуется доказать, что будутъ положительными опредѣлители

$$V_i^{(k)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & m_{k-i} \\ m_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & m_{k-i+1} \\ m_2 & m_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & m_{k-i+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_i & m_{i-1} & m_{i-2} & \ldots & & m_1 & m_k \end{vmatrix} \qquad V_0^{(k)} = m_k$$

при $i < k$.

Раскладывая по первой горизонтали, получимъ

$$V_i^{(k)} = V_{i-1}^{(k)} + (-1)^i m_{k-i} \mu_i \tag{2}$$

гдѣ

$$\mu_i = \begin{vmatrix} m_1, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ m_2, & m_1, & 1, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{i-1} & m_{i-2} & \ldots & \ldots & 1 \\ m_i & m_{i-1} & \ldots & \ldots & m_1 \end{vmatrix}, \quad \mu_1 = m_1.$$

---

[1]) D. Grawe. Zur Theorie der elliptischen Funcktionen. Унив. Изв. Кіевъ, 1909.

Подставляя въ формулы (2) вмѣсто i значенія $1, 2, \ldots l$, гдѣ $l < k$, получимъ

$$V_l^{(k)} = V_{l-1}^{(k)} + (-1)^l m_{k-l}\mu_l$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

(3) $$V_2^{(k)} = V_1^{(k)} + m_{k-2}\mu_2$$

$$V_1^{(k)} = V_0^{(k)} - m_{k-1}\mu_1$$

Раскрывая μ_l, мы получимъ

$$\mu_l = \mu_{l-1}m_1 - \mu_{l-2}m_2 + \ldots + (-1)^{l-1}\mu_2 m_{l-2} + (-1)^l \mu_1 m_{l-1} + (-1)^{l+1} m_l$$

или

$$-m_l = -\mu_1 m_{l-1} + \mu_2 m_{l-2} - \ldots + (-1)^{l-1}\mu_{l-1} m_1 + (-1)^l \mu_l.$$

Умножая равенства (3) на

$$\frac{1}{m_{k-l}}, \quad \frac{m_1}{m_{k-l+1}}, \quad \frac{m_2}{m_{k-l+2}}, \quad \ldots \frac{m_{l-1}}{m_{k-1}}$$

и складывая, получимъ

$$\frac{1}{m_{k-l}} V_l^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=l-1} V_i^{(k)} \left[\frac{m_{l-i-1}}{m_{k-i-1}} - \frac{m_{l-i}}{m_{k-i}}\right].$$

Разности въ скобкахъ правой части положительны, ибо величина

$$\frac{m_{l-i}}{m_{k-i}}$$

возрастаетъ съ возрастаніемъ i. Отсюда будетъ положителенъ опредѣлитель $V_i^{(k)}$ при $i = l$, если онъ положителенъ при $i < l$; но положительность $V_1^{(k)}$, $V_2^{(k)}$ провѣряется непосредственно; слѣдовательно, теорема доказана

Исчисленіе матрицъ.

§ 46.

Совокупность n^2 чиселъ, расположенныхъ въ слѣдующей квадратной схемѣ:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{Vmatrix} = \| a_{ik} \|$$

образуютъ такъ называемую *квадратную матрицу* порядка n. Cayley [1]) первый обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что матрицу можно разсматривать какъ одно *комплексное* число. Можно установить правила сложенія и умноженія матрицъ, откуда появится новая алгебра дѣйствій надъ матрицами.

Будемъ разсматривать всю совокупность W комплексныхъ чиселъ обыкновенной алгебры, кромѣ этихъ чиселъ будемъ разсматривать *всевозможныя* матрицы порядка n, элементами которыхъ являются числа W. Эти матрицы вмѣстѣ съ числами W образуютъ новую совокупность предметовъ M, въ составъ которой входитъ совокупность W какъ часть. Для сокращенія рѣчи будемъ называть числа W *величинами скалярными*, а матрицы *величинами комплексными*.

Будемъ обозначать матрицы большими готическими буквами

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \ldots$$

§ 47.

Опредѣленіе равенства двухъ матрицъ. Двѣ матрицы

$$\mathfrak{A} = \| a_{ik} \| \text{ и } \mathfrak{B} = \| b_{ik} \|$$

называются равными, если каждый изъ n^2 элементовъ матрицы $\mathfrak{A}$ равенъ соотвѣтственному элементу матрицы $\mathfrak{B}$, то есть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, если

$$a_{ik} = b_{ik} (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots n).$$

Опредѣленіе нуля. Матрица $\mathfrak{A}$ называется нулемъ тогда и только тогда, когда всѣ ея элементы равны нулю, т. е. $\mathfrak{A} = 0$, если

$$a_{ik} = 0\ (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots n)$$

Опредѣленіе сложенія матрицъ. По соотвѣтственнымъ элементамъ a_{ik} и b_{ik} двухъ произвольно взятыхъ матрицъ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ составляемъ элементъ

$$s_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$$

новой матрицы $\mathfrak{S}$. Эту матрицу $\mathfrak{S}$ называютъ суммой $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и пишутъ

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему опредѣленію сложенія матрицъ:

[1]) Cayley. Coll. math. papers 2, 475.

Подъ суммой двухъ матрицъ разумѣется такая новая, элементы которой суть суммы соотвѣтственныхъ элементовъ слагаемыхъ матрицъ.

Правило вычитанія матрицъ получается какъ слѣдствіе изъ опредѣленія сложенія.

Разностью двухъ матрицъ будетъ такая новая, элементы которой суть разности соотвѣтственныхъ элементовъ обѣихъ заданныхъ.

Итакъ, мы видимъ, что матрицы представляютъ относительно сложенія абелеву группу, ибо изъ опредѣленія сложенія вытекаетъ существованіе какъ перестановочнаго

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A},$$

такъ и сочетательнаго

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})$$

законовъ.

Единицей группы является матрица, равная нулю

Обратнымъ элементомъ группы для каждой матрицы $\mathfrak{A}$ является матрица, элементы которой получаются отъ умноженія на -1 элементовъ матрицы $\mathfrak{A}$.

Приступая къ умноженію матрицъ, разсмотримъ сначала умноженіе матрицы на скалярную величину и поставимъ такое опредѣленіе:

Опредѣленіе. Подъ произведеніемъ $k.\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}.k$ *матрицы* $\mathfrak{A}$ *на скалярную величину* k *разумѣется матрица, каждый элементъ которой происходитъ отъ умноженія на* k *соотвѣтствующаго элемента матрицы* $\mathfrak{A}$.

Умноженіе на скалярную величину удовлетворяетъ законамъ перестановочному и распредѣлительному

$$k\mathfrak{A} = \mathfrak{A}k$$

$$k\mathfrak{A} + k\mathfrak{B} = k(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$$

$$k\mathfrak{A} + l\mathfrak{A} = (k + l)\mathfrak{A},$$

гдѣ k и l скалярныя величины.

Мы будемъ употреблять обозначеніе

$$-\mathfrak{A} = (-1)\mathfrak{A}$$

§ 48.

Переходимъ теперь къ опредѣленію умноженія двухъ матрицъ, причемъ возьмемъ правило умноженія изъ теоріи опредѣлителей.

Опредѣленіе умноженія. Подъ произведеніемъ $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *двухъ матрицъ* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *разумѣется такая новая матрица, у которой элементъ* (i, j), *стоя-*

щій на пересѣченіи i-ой горизонтали съ j-ой колонной, получается черезъ умноженіе каждаго элемента i-ой горизонтали $\mathfrak{A}$ на соотвѣтственный элементъ j-ой колонны $\mathfrak{B}$ и сложеніе полученныхъ отдѣльныхъ произведеній.

Такъ, напримѣръ, элементъ (i, j) въ произведеніи $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ будетъ

(1) $$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Подобнымъ же образомъ тотъ же элементъ (i, j) произведенія $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ будетъ

(2) $$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj}.$$

Такъ какъ въ общемъ случаѣ числа (1) и (2) неодинаковы, то мы получаемъ теорему:

Умноженіе матрицъ есть дѣйствіе, вообще говоря, непереставовочное, т. е.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}.$$

Хотя умноженіе матрицъ обладаетъ законами сочетательнымъ и распредѣлительнымъ

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

но совокупность M скалярныхъ величинъ и матрицъ не будетъ *полемъ*. Отличнымъ отъ свойствъ поля является неперестановочность умноженія. Еще болѣе важное отличіе отъ поля представляетъ то обстоятельство, что произведеніе нѣсколькихъ матрицъ можетъ равняться нулю, тогда какъ ни одинъ изъ множителей не равенъ нулю. Въ этомъ мы можемъ убѣдиться на слѣдующемъ простомъ примѣрѣ.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0.$$

Получаемъ теорему:

Произведеніе двухъ матрицъ можетъ равняться нулю, когда оба множителя отличны отъ нуля.

Мы будемъ матрицу $\mathfrak{A} = \|a_{ik}\|$ называть *особенною*, если *равенъ нулю* опредѣлитель $|a_{ik}|$, составленный изъ ея элементовъ.

Для *неособенныхъ* матрицъ получаемъ теорему:

Опредѣлитель произведенія двухъ матрицъ равенъ произведенію опредѣлителей множителей.

Матрицу $\mathfrak{A}$ мы будемъ называть *дѣлителемъ нуля*, если можно поподобрать такую отличную отъ нуля матрицу $\mathfrak{B}$, что будетъ или $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ или $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = 0$.

Нетрудно доказать теорему:

Дѣлителемъ нуля можетъ быть только особенная матрица.

§ 49.

Въ теоріи опредѣлителей горизонтали и колонны могли быть замѣняемы одни другими. При матрицахъ происходитъ другое. Двѣ матрицы

$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{A}' = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

обладающія свойствомъ, что горизонтали одной совпадаютъ съ колоннами другой называются *сопряженными*. Сопряженныя матрицы имѣютъ одинаковыхъ опредѣлителей, но сами, вообще говоря, *неравны* между собой

Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, то есть, если матрица $\mathfrak{A}$ равна своей сопряженной $\mathfrak{A}'$, то она должна быть *симметричною*, т. е.

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Замѣняя колонны горизонталями и обратно, мы получимъ равенство

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})' = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}',$$

выражающее теорему.

Сопряженная величины произведенія матрицъ равна произведенію сопряженныхъ величинъ множителей, причемъ ихъ надо перемножать въ обратномъ порядкѣ.

§ 50.

Элементарные дѣлители.

Мы дадимъ теперь понятіе о теоріи, основанной Sylvester'омъ, H. Smith'омъ и особенно Weierstrass'омъ. Эта теорія имѣетъ значеніе въ Алгебрѣ и была предметомъ изученія рода выдающихся математиковъ: Kronecker'a, Frobenius'a и другихъ.

Мы будемъ разсматривать λ — матрицы, у которыхъ всѣ элементы суть цѣлыя функціи отъ перемѣнной независимой λ.

Введемъ понятіе о такъ называемыхъ *элементарныхъ преобразованіяхъ* матрицы.

Опредѣленіе Подъ элементарнымъ преобразованіемъ λ - матрицы мы будемъ разумѣть одну изъ слѣдующихъ операцій:

a) Перестановку двухъ горизонталей или колоннъ.

b) Умноженіе всѣхъ элементовъ горизонтали или колонны на одного и того же отличнаго отъ нуля постояннаго множителя.

c) Прибавка, умноженныхъ на одинъ и тотъ же полиномъ отъ λ, элементовъ горизонтали или колонны къ соотвѣтственнымъ элементамъ другой горизонтали или колонны.

§ 51.

Двѣ λ — матрицы мы будемъ называть *эквивалентными*, если отъ одной изъ нихъ можно перейти къ другой при помощи конечнаго числа элементарныхъ преобразованій.

Не трудно видѣть, что двѣ эквивалентныя матрицы имѣютъ одинъ и тотъ же рангъ. Въ самомъ дѣлѣ, преобразованія a) и b) не измѣняютъ ранга матрицы, ибо ими не нарушается обращеніе или необращеніе въ нуль опредѣлителя, взятаго изъ матрицы. Остается разсмотрѣть только вліяніе на рангъ операціи c).

Пусть операція c) состоитъ въ прибавленіи къ p-ой горизонтали матрицы q-ой горизонтали, умноженной на $\psi(\lambda)$. Очевидно, что *опредѣлители* матрицы, въ которыхъ или нѣтъ p-ой горизонтали, или находятся обѣ горизонтали p-ая и q-ая, *не мѣняются* отъ указанной операціи.

Опредѣлители же порядка r, гдѣ находится p-ая горизонталь, но не находится q-ая, обращаются въ

$$C = A + \psi(\lambda)B,$$

гдѣ A и B опредѣлители порядка r первоначальной матрицы. Если $A=0$ и $B=0$, то и $C=0$. Можетъ, конечно, случиться, что при $A\neq 0$, $B\neq 0$ будетъ $C=0$. Итакъ, рангъ матрицы отъ преобразованія c) не можетъ *увеличиться*, Очевидно, что преобразованіе c) не можетъ также *уменьшить* рангъ, ибо тогда обратное преобразованіе его увеличило бы.

§ 52.

Каждый изъ опредѣлителей, взятыхъ изъ λ матрицы есть нѣкоторая цѣлая функція отъ λ. Обозначимъ черезъ $D_i(\lambda)$ общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ опредѣлителей порядка i данной λ матрицы. Покажемъ, что $D_i(\lambda)$ есть выраженіе, не мѣняющееся отъ элементарныхъ преобразованій. Для этой цѣли докажемъ такую лемму.

Если всѣ опредѣлители порядка i матрицы имѣютъ общій множитель $\varphi(\lambda)$, то такой же множитель имѣютъ всѣ опредѣлители порядка i у всякой матрицы эквивалентной съ данною.

Въ самомъ дѣлѣ, операціи a) и b), очевидно, могутъ вводить въ опредѣлители матрицы лишь постоянныхъ множителей. Пусть операція c) состоитъ въ прибавленіи къ элементамъ p-ой горизонтали умноженныхъ на $\psi(\lambda)$ соотвѣтственныхъ элементовъ q-ой. Опредѣлители матрицы или не измѣняются, или же принимаютъ видъ

$$A + \psi(\lambda)B,$$

гдѣ A и B опредѣлители прежней матрицы. Во всѣхъ случаяхъ остается тотъ же дѣлитель $\varphi(\lambda)$.

Такъ какъ для всѣхъ двухъ эквивалентныхъ λ — матрицъ общій дѣлитель опредѣлителей i-аго порядка одной изъ нихъ есть общій дѣлитель также для другой, то мы приходимъ, очевидно, къ заключенію, что общій наибольшій дѣлитель $D_i(\lambda)$ есть выраженіе, не мѣняющееся отъ элементарныхъ преобразованій, и, слѣдовательно, общее для всѣхъ эквивалентныхъ между собой матрицъ.

§ 53.

Итакъ, мы видимъ, что эквивалентныя между собой матрицы ранга r имѣютъ общими выраженія

$$D_1(\lambda),\ D_2(\lambda),\ \ldots\ D_r(\lambda). \tag{1}$$

Покажемъ, что и обратно, если двѣ матрицы ранга r имѣютъ общими выраженія (1), то онѣ эквивалентны.

Для этой цѣли докажемъ лемму.

Если первый[1]) *элементъ $f(\lambda)$ матрицы не уничтожается тождественно и не дѣлитъ алгебраически всѣхъ остальныхъ элементовъ матрицы, то можно составить эквивалентную матрицу, у которой первый элементъ не равенъ нулю и имѣетъ степень, меньшую чѣмъ $f(\lambda)$.*

Допустимъ сначала, что уже въ первой горизонтали находится элементъ $f_1(\lambda)$, не дѣлящійся на $f(\lambda)$; пусть этотъ элементъ стоитъ на пересѣченіи первой горизонтали съ i-ой колонной. Дѣлимъ $f_1(\lambda)$ на $f(\lambda)$ и обозначимъ неравный нулю остатокъ этого дѣленія черезъ $r(\lambda)$.

$$f_1(x) = f(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda).$$

Этотъ остатокъ степени *ниже*, чѣмъ $f(\lambda)$. Вычтемъ изъ i-ой колонны первую умноженную на $q(\lambda)$, тогда наверху i-ой колонны будетъ стоять

[1]) Верхній лѣвый

$\varphi(\lambda)$. Перемѣщеніемъ первой и i-ой колоннъ сдѣлаемъ $r(x)$ первымъ элементомъ матрицы, и теорема доказана для расматриваемаго случая.

Подобнымъ же образомъ разсматривается случай, когда недѣлящійся на $f(\lambda)$ элементъ находится въ первой колоннѣ.

Пусть теперь каждый элементъ какъ первой горизонтали такъ и первой колонны дѣлится на $f(\lambda)$. Элементъ же матрицы, не дѣлящійся на $f(\lambda)$ пусть находится на пересѣченіи i-ой колонны съ k-ой горизонталью.

Пусть наверху i-ой колонны стоитъ элементъ $f(\lambda)\omega(\lambda)$, тогда, вычитая изъ i-ой колонны первую, умноженную на $\omega(\lambda)$, получимъ *нуль* на верху i-ой колонны, причемъ въ этой послѣдней колоннѣ, на k-ой горизонтали по прежнему будетъ стоять членъ, не дѣлящійся на $f(\lambda)$. Прибавимъ теперь новую i-ую колонну къ первой, тогда въ этой послѣдней первый элементъ не измѣнится, а на пересѣченіи съ k-ой горизонталью окажется членъ, не дѣлящійся на $f(\lambda)$, и мы приходимъ къ случаю, уже разобранному.

§ 54.

Докажемъ еще такую лемму:

Матрица съ неравными нулю элементами можетъ всегда быть превращена въ ей эквивалентную, обладающую такими свойствами:

a) первый элементъ $f(\lambda)$ не уничтожается тождественно:

b) всѣ остальные элементы первой горизонтали и первой колонны тождественно равны нулю:

c) всѣ остальные, отличные отъ нуля, элементы дѣлятся на $f(\lambda)$.

Перемѣщеніемъ горизонталей и колоннъ мы можемъ сдѣлать первымъ любой изъ не равныхъ тождественно нулю элементовъ матрицы. По леммѣ § 53 можно уменьшить степень перваго элемента, если на него не дѣлятся всѣ остальные элементы матрицы. Такъ какъ уменьшеніе степени можно совершать конечное число разъ, то мы придемъ окончательно къ такой матрицѣ, у которой всѣ элементы дѣлятся на первый $f(\lambda)$. Въ частномъ случаѣ степень функціи $f(\lambda)$ можетъ равняться нулю, такъ что эта функція сводится къ постоянному числу. Примѣненіемъ операціи c) § 50 мы достигнемъ того, что требуется въ леммѣ, то есть равенства нулю всѣхъ элементовъ первой горизонтали и первой колонны, кромѣ перваго.

§ 55.

Итакъ λ — матрица n-го порядка и ранга $r > 0$

(1) $$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

элементарными операціями приводится къ виду

$$\begin{Vmatrix} f_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{Vmatrix},$$

гдѣ матрица

(2) $$\begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{Vmatrix}$$

имѣетъ, очевидно, рангъ $r-1$ и всѣ ея элементы дѣлятся на функцію $f_1(\lambda)$. Если $r>1$, то матрица (2) можетъ быть приведена къ виду

$$\begin{Vmatrix} f_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{11} & \dots & c_{1n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{n-2,1} & \dots & c_{n-2,n-2} \end{Vmatrix}.$$

Продолжая разсужденіе далѣе, мы приведемъ матрицу (1) окончательно къ виду

(3) $$\begin{Vmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что въ функціяхъ $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ .. $f_r(\lambda)$ можно предполагать старшіе коэффиціенты равными единицѣ, ибо среди элементарныхъ преобразованій существуютъ операціи b) § 50, состоящія въ умноженіи элементовъ строки или горизонтали на постоянныя числа.

И мы приходимъ къ теоремѣ:

Всякую λ — матрицу n-аго порядка и r-аго ранга можно при помощи элементарныхъ операцій привести къ виду (3) причемъ всякій поминомъ $f_i(\lambda)$ будетъ имѣть равный единицѣ коэффиціентъ при старшей степени и кромѣ того функція $f_i(\lambda)$ будетъ дѣлителемъ $f_{i+1}(\lambda)$ при $i=$ $=1, 2, 3, \dots r-1$.

Видъ (3) будемъ называть *нормальнымъ* видомъ матрицы.

§ 56.

Неизмѣняющіяся, какъ было въ § 52 доказано, при элементарныхъ преобразованіяхъ величины $D_i(\lambda)$ опредѣляются, очевидно, по формулѣ

$$D_i(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda) \ldots f_i(\lambda) .$$

Теперь мы имѣемъ всѣ данныя для доказательства поставленной выше теоремы:

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ эквивалентности двухъ λ — *матрицъ является: 1) одинаковый рангъ* r *и 2) общія величины* $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, . . $D_r(\lambda)$. Необходимость теоремы слѣдуетъ изъ соображеній § 52. Въ достаточности же теоремы можно убѣдиться такимъ образомъ.

Предполагая у обѣихъ заданныхъ матрицъ одинаковый рангъ r и одинаковые дѣлители миноровъ

(1) $$D_1(\lambda),\ D_2(\lambda),\ \ldots\ D_r(\lambda),$$

приведемъ обѣ матрицы къ нормальному виду.

Тогда, на основаніи существованія одинаковыхъ выраженій (1), будемъ имѣть

$$f_1'(\lambda) = f_1(\lambda)$$

$$f_1'(\lambda) f_2'(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Откуда получаемъ $f_i'(\lambda) = f_i(\lambda)$, т е обѣ заданныя матрицы имѣютъ общую нормальную Каждая изъ заданныхъ матрицъ эквивалентна съ общей нормальною, слѣдовательно, онѣ эквивалентны между собой, что и требовалось доказать.

§ 57.

На основаніи соображеній § 56 функціи $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, . . $f_r(\lambda)$ называются *инваріантными множителями* класса эквивалентныхъ между собой матрицъ.

Пусть $D_r(\lambda)$ есть по прежнему общій наибольшій дѣлитель всѣхъ опредѣлителей порядка r заданной λ матрицы ранга r. Линейные множители

$$\lambda - a,\ \lambda - a',\ \lambda - a'',\ \ldots,$$

гдѣ a, a', a'', суть корни $D_r(\lambda) = 0$ называются *линейными множителями* матрицы.

Пусть

$$f_i(\lambda) = (\lambda - a)^{e_i}(\lambda - a')^{e_i'}(\lambda - a'')^{e_i''}\ldots$$

инваріантные множители матрицы $\mathfrak{A}$ ранга r, для которой всѣ различные между собой линейные множители суть

$$\lambda - a, \ \lambda - a', \ \lambda - a'', \ \ldots$$

Тогда, слѣдуя Weierstrass'у, мы называемъ *элементарными дѣлителями* матрицы $\mathfrak{A}$ тѣ изъ величинъ

$$\begin{array}{l}(\lambda - a)^{e_1}, \ (\lambda - a)^{e_2}, \ \ldots (\lambda - a)^{e_r} \\ (\lambda - a')^{e_1'}, \ (\lambda - a')^{e_2'}, \ \ldots (\lambda - a')^{e_r'} \\ (\lambda - a'')^{e_1''}, \ (\lambda - a'')^{e_2''}, \ \ldots (\lambda - a'')^{e_r''}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

которыя не приводятся къ единицѣ.

Очевидно, что $e_i \leqq e_{i+1}$.

§ 58.

Покажемъ на примѣръ вычисленіе элементарныхъ дѣлителей.

Возьмемъ матрицу

$$\left\|\begin{array}{ccccccc} \lambda - a & b_1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & b_2 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a & b_3 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & \lambda - a & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \lambda - a \end{array}\right\|,$$

у которой діагональные элементы суть $\lambda - a$, всѣ же остальные элементы нули, за исключеніемъ элементовъ $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, лежащихъ непосредственно выше діагональныхъ.

Въ этомъ случаѣ опредѣлитель матрицы будетъ

$$D_n(\lambda) = (\lambda - a)^n;$$

далѣе

$$D_{n-1}(\lambda) = 1,$$

ибо, если мы отбросимъ первую (лѣвую) колонну и послѣднюю (нижнюю) горизонталь, то получимъ матрицу имѣющую постоянный опредѣлитель

$$b_1 b_2 \ldots b_{n-1};$$

значитъ, у заданной матрицы существуетъ единственный элементарный дѣлитель

$$(\lambda - a)^n.$$

§ 59

Изложенная теорія элементарныхъ дѣлителей можетъ быть обобщена и перенесена на матрицы другого рода. Такъ напримѣръ, можно разсматривать матрицы, элементы которыхъ суть цѣлыя функціи отъ многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Для теоріи чиселъ особенно важны изслѣдованія λ — матрицъ съ цѣлыми коэффиціентами, а также когда элементы матрицы не цѣлыя функціи, а цѣлыя числа, взятыя изъ нѣкотораго поля.

Для желающихъ ближе познакомиться съ этой важной теоріей можно порекомендовать: *Bôcher*. Einführung in die höhere Algebra 1910. *Muth*, Theorie und Anwendung des Elementar teiler. *Bachmann*. Die Arithmetik der Quadratischen Formen 1898. (Zweitor Abschnitt. Zweites Kapitel)

ГЛАВА V.

Теорія подстановокъ.

Понятіе о группѣ.

§ 1.

Мы положимъ въ основу нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій понятіе о такъ называемой *группѣ* однородныхъ предметовъ, понятіе, давшее возможность сблизить самыя разнородныя части математики.

Формулируемъ понятіе о группѣ въ его современномъ самомъ общемъ видѣ. Разсматривается совокупность $\mathfrak{M}$ нѣкоторыхъ однородныхъ предметовъ. Эти предметы могутъ быть самой разнообразной природы: числа, формулы, аналитическія операціи, геометрическія фигуры, механическія движенія и т. д. Число предметовъ совокупности $\mathfrak{M}$ можетъ быть какъ конечное такъ и безконечное.

Установимъ понятіе объ операціи *сопоставленія или композиціи* предметовъ совокупности $\mathfrak{M}$. Предположимъ, что указаны правила, по которымъ всякимъ двумъ предметамъ A и B совокупности $\mathfrak{M}$ сопоставляемъ нѣкоторый опредѣленный предметъ C той же совокупности. Такое сопоставленіе будемъ обозначать символическимъ равенствомъ

$$A * B = C,$$

гдѣ знакъ $*$ есть знакъ композиціи, которую будемъ иногда называть *символическимъ умноженіемъ*. Композицію будемъ предполагать, вообще говоря, дѣйствіемъ не перестановочнымъ, то есть будемъ считать два результата композиціи

$$A * B \text{ и } B * A,$$

вообще говоря, различными.

Опредѣленіе группы. Группой называется всякая совокупность G предметовъ $\mathfrak{M}$, обладающая слѣдующими четырьмя свойствами:

I. *Композиція всякихъ двухъ предметовъ совокупности G даетъ предметъ той же совокупности.*

II. *Композиція предметовъ совокупности G обладаетъ сочетательнымъ (ассоціативнымъ) закономъ*

$$A * (B * C) = (A * B) * C.$$

III. *Существуютъ въ совокупности G предметы I такого вида, что для всякаго предмета A изъ совокупности G имѣетъ мѣсто равенство*

$$A * I = A.$$

Предметъ I носитъ названіе **правой единицы** *группы.*

IV. *Для нѣкоторой опредѣленной изъ единицъ I и для всякаго предмета A совокупности G существуетъ въ совокупности G другой предметъ X, удовлетворяющій равенству*

$$A * X = I;$$

элементъ X носитъ названіе **праваго обратнаго относительно A.**

§ 2.

Предметы, входящіе въ составъ группы, носятъ названіе ея *элементовъ*.

Если число элементовъ группы конечное, то группа называется *конечною*, въ обратномъ случаѣ *безконечною*. Число элементовъ конечной группы называется ея *порядкомъ*.

Можно доказать, что данные въ предыдущемъ параграфѣ четыре постулата: I, II, III, и IV, опредѣляющіе группу, независимы между собой.

Не имѣя въ виду излагать полную теорію группъ, мы остановимся только на самыхъ важныхъ свойствахъ группъ.

Покажемъ прежде всего, что существуетъ только одна единственная единица въ группѣ.

Допустимъ существованіе двухъ единицъ I и I_1, причемъ единица I есть та, которая требуется въ постулатѣ IV.

На основаніи постулата IV можемъ единицѣ I_1 сопоставить элементъ X такой, чтобы было

$$(1) \qquad I_1 * X = I.$$

Умножая въ смыслѣ композиціи это равенство слѣва на I_1, получимъ

$$I_1 * (I_1 * X) = I_1 * I,$$

откуда

(2) $$(I_1 * I_1) * X = I_1 * I,$$

но I и I_1 единицы, слѣдовательно,

$$I_1 * I_1 = I_1, \; I_1 * I = I_1,$$

и равенство (2) даетъ

$$I_1 * X = I_1,$$

откуда, сравнивая съ (1), получимъ

$$I = I_1.$$

Покажемъ, что единственная правая единица I есть въ то же самое время и лѣвал. Положимъ, что

(1) $$I * A = B.$$

Докажемъ , что $B = A$.

Возьмемъ для A правый обратный элементъ Y и умножимъ на него справа равенство (1)

$$I * A * Y = B * Y,$$

гдѣ,

(2) $$A * Y = I,$$

получаемъ

$$I * I = B * Y.$$

Сравнивая съ (2), получимъ

$$A * Y = B * Y.$$

Умножая послѣднее равенство справа на элементъ обратный Y, получимъ

$$A = B,$$

что и требовалось доказать.

Покажемъ наконецъ, что правый обратный элементъ есть въ то же самое время и лѣвый обратный, то есть, что равенство

(1) $$A * X = I$$

влечетъ за собой какъ слѣдствіе

(4) $$X * A = I$$

Въ самомъ дѣлѣ, умножая равенство (1) слѣва на X, получимъ

$$X * A * X = X,$$

и, наконецъ, умножая справа на элементъ обратный X, получимъ равенство (2).

§ 3.

Резюмируя сказанное, мы замѣчаемъ, что въ группѣ существуетъ всегда единственная единица; ее мы будемъ обозначать черезъ 1.

При символическомъ умноженіи въ смыслѣ композиціи элементовъ группы элементы, равные единицѣ, можно пропускать

$$1 * A * 1 * B * C = A * B * C.$$

Кромѣ того для всякаго элемента A существуетъ въ группѣ элементъ обратный, которой мы будемъ обозначать знакомъ A^{-1}, причемъ можно будетъ писать

$$A * A^{-1} = 1, \quad A^{-1} * A = 1.$$

Нетрудно убѣдиться, что обратный элементъ единственный.

Обратный элементъ для обратнаго есть первоначальный, т. е.

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Нетрудно видѣть, что для группы рѣшаются всегда уравненія первой степени

$$A * X = B, \quad Y * A = B,$$

гдѣ A и B заданные элементы, а X элементъ искомый. Мы получаемъ

$$X = A^{-1} * B, \quad Y = B * A^{-1}.$$

Если для всякихъ двухъ элементовъ группы имѣетъ мѣсто *перестановочный (коммутативный)* законъ композиціи т. е

$$A * B = B * A$$

то группа носитъ названіе *абелевой* или *коммутативной*.

Оставляя въ сторонѣ *абстрактную* теорію группъ, мы перейдемъ къ группамъ конкретнаго вида, которыя даются разсмотрѣніемъ, такъ называемыхъ, подстановокъ. Для желающихъ познакомиться съ абстрактной теоріей группъ, независящей отъ природы ихъ элементовъ, можно порекомендовать прекрасное сочиненіе моего ученика О. Ю. Шмидта. Абстрактная теорія группъ. Кіевъ 1914 г

Основныя свойства подстановокъ.

§ 4.

Разсмотримъ различныя перемѣщенія (permutations) n буквъ

$$a, b, c, \ldots, k, l.$$

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что число такихъ перемѣщеній есть

$$N = 1 . 2 . 3 \ldots n$$

Обозначимъ эти перемѣщенія буквами:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{N-1}.$$

Будемъ называть *подстановкою* (substitution) операцію, состоящую въ переходѣ отъ одного какого-нибудь перемѣщенія A_i къ другому A_k, причемъ будемъ обозначать эту подстановку символомъ

$$\left(\frac{A_k}{A_i}\right).$$

Будемъ называть A_i *знаменателемъ* подстановки, а A_k ея *числителемъ*.

§ 5.

Нетрудно видѣть, что одну и ту же подстановку можно писать различными символами, причемъ можно писать различные знаменатели. Тогда числители должны также соотвѣтственно измѣняться, ибо знакъ подстановки долженъ указывать, какою буквою замѣняется каждая буква знаменателя. Порядокъ же буквъ въ знаменателѣ вполнѣ произволенъ.

Такъ, напримѣръ, слѣдующіе знаки выражаютъ одну подстановку:

$$\begin{pmatrix} b & c & a & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ d & b & a & c \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что всякую подстановку можно написать такъ, чтобы знаменателемъ было данное перемѣщеніе, напримѣръ A_0. Тогда различныхъ подстановокъ будетъ только N, и всѣ онѣ могутъ быть представлены такъ:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 \\ A_0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ A_0 \end{pmatrix},$$

гдѣ $\begin{pmatrix} A_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ есть такъ называемая *тождественная* подстановка, состоящая въ томъ, что порядокъ буквъ перемѣщенія не мѣняется.

§ 6.

Что касается до символа подстановки, то мы будемъ разсматривать приведеніе его къ простѣйшему виду, причемъ подъ простѣйшимъ видомъ будемъ разумѣть такой, въ которомъ пропущены всѣ буквы, не измѣняя

ющіяся подстановкою, или, другими словами, занимающія одни и тѣ же мѣста въ числителѣ и знаменателѣ.

Такъ, напримѣръ, для подстановки

$$\begin{pmatrix} a & c & e & д & g & f & b \\ a & b & c & д & e & f & g \end{pmatrix}$$

простѣйшимъ видомъ будетъ:

$$\begin{pmatrix} c & e & g & b \\ b & c & e & g \end{pmatrix},$$

ибо буквы a, $д$, f не мѣняются.

§ 7.

Введемъ понятіе о *произведеніи* двухъ подстановокъ.

$$S=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} A_2 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

Будемъ называть произведеніемъ двухъ подстановокъ третью, которая производитъ такую перемѣну въ расположеніи буквъ перемѣщенія, какую производятъ обѣ подстановки, одна за другою произведенныя.

При разсмотрѣніи произведенія двухъ подстановокъ приходится указывать, въ какомъ порядкѣ эти двѣ подстановки должны одна за другою слѣдовать, ибо, вообще говоря, произведеніе двухъ подстановокъ зависитъ отъ *порядка перемноженія*.

Напримѣръ, двѣ подстановки:

$$S_1=\begin{pmatrix} b & c & e & a & д \\ a & b & c & д & e \end{pmatrix}, \quad S_2=\begin{pmatrix} c & a & e & b & д \\ a & b & c & д & e \end{pmatrix},$$

перемноженныя такимъ образомъ, что первою совершается подстановка S_1, даютъ результатъ:

$$\begin{pmatrix} a & e & д & c & b \\ a & b & c & д & e \end{pmatrix}.$$

Перемноженныя же въ другомъ порядкѣ, онѣ дадутъ произведеніе.

$$\begin{pmatrix} e & b & д & c & a \\ a & b & c & д & e \end{pmatrix}.$$

Произведеніе двухъ подстановокъ мы будемъ обозначать такъ же, какъ и алгебраическое произведеніе, но только съ условіемъ, что знакъ, соотвѣтствующій подстановкѣ, совершаемой *сначала*, будемъ писать налѣво отъ знака другой.

Такъ, напримѣръ, произведеніе:

$$ST = \binom{A_1}{A_0}\binom{A_2}{A_0}$$

должно быть понимаемо въ такомъ смыслѣ, что первою должна быть произведена подстановка S, а затѣмъ уже T.

Если двѣ подстановки S и T таковы, что будетъ

$$TS = ST,$$

то онѣ называются *обратимыми*, или *коммутативными*.

Такъ, напримѣръ, если двѣ подстановки T и S, приведенныя къ простѣйшему виду, не имѣютъ общихъ буквъ, то онѣ, очевидно, обратимыя.

Если мы разсмотримъ нѣсколько подстановокъ:

$$S,\ T,\ U,\ V,\ \ldots,$$

то, согласно сдѣланному условію, произведеніе:

$$STUV\ldots$$

должно пониматься въ томъ смыслѣ, что сначала подстановка S умножается на T, полученный результатъ умножается на U, новый результатъ на V, и такъ далѣе.

§ 8.

Если всѣ перемножаемыя подстановки одинаковы, и число ихъ μ, то произведеніе называется μ-тою степенью подстановки и обозначается знакомъ

$$S^\mu.$$

Если одна изъ перемножаемыхъ подстановокъ есть тождественная

$$\binom{A_0}{A_0},$$

то знакъ, соотвѣтствующій ей, можетъ быть въ произведеніи пропущенъ ибо эта подстановка не мѣняетъ буквъ, и мы имѣемъ право считать ее равною единицѣ, то есть

$$\binom{A_0}{A_0} = 1.$$

Наконецъ, приходится условиться считать символъ S^μ равнымъ единицѣ при $\mu = 0$, какова бы ни была подстановка S.

§ 9.

Пусть S будетъ нѣкоторая подстановка. Напишемъ рядъ ея степеней, начиная съ нулевой,

(1) $$1\,,\ S\,,\ S^2,\ S^3,\ \ldots$$

Такъ какъ общее число различныхъ между собою подстановокъ конечное (именно, равное N), то въ рядѣ (1), достаточно далеко продолженномъ, должна повториться одна изъ предыдущихъ подстановокъ.

Положимъ, что получается: $S^{\mu+\nu} = S^{\mu}$, или, что то же, $S^{\mu}S^{\nu} = S^{\mu}$. Отсюда слѣдуетъ, что подстановка S^{ν} не мѣняетъ переставляемыхъ буквъ, то есть она есть не что иное, какъ тождественная, именно:

(2) $$S^{\nu} = 1\,.$$

Возвышая равенство (2) въ нѣкоторую произвольную степень q, получимъ: $(S^{\nu})^q = 1$, или $S^{\nu q} = 1$. Далѣе, умножая на S^r, получимъ, если r цѣлое число.

(3) $$S^{r+\nu q} = S^r.$$

Отсюда мы видимъ, что рядъ постановокъ (1) періодическій, и что періодъ состоитъ изъ подстановокъ

(4) $$1\,,\ S\,,\ S^2,\ \ldots\ S^{r-1}.$$

Нетрудно видѣть, что подстановки (4) будутъ всѣ различны между собой, если ν будетъ наименьшимъ показателемъ, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство (2). Въ самомъ дѣлѣ, равенство: $S^{\mu_1+\nu_1} = S^{\mu_1}$ въ предположеніи числа $\mu_1 + \nu_1$ меньшаго, чѣмъ ν, влекло бы за собой $S^{\nu_1} = 1$, что невозможно, ибо $\nu_1 < \nu$. Итакъ, будемъ называть *порядкомъ* подстановки наименьшій показатель ν, при которомъ $S^{\nu} = 1$.

Другими словами, порядокъ подстановки показываетъ число разъ, которое нужно перемножить подстановку, чтобы прійти къ первоначальному перемѣщенію.

§ 10.

Условимся распространить равенство $S^{r+\nu q} = S^r$ на отрицательныя значенія показателя r. Опредѣлимъ отрицательную степень S^{-r} подстановки равенствомъ: $S^{-r} = S^{\nu q - r}$. При $r = 1$ можно взять $q = 1$, и мы получаемъ: $S^{-1} = S^{\nu-1}$.

Подстановки S и S^{-1} даютъ въ произведеніи единицу и называются поэтому *обратными* одна относительно другой.

Очевидно, что если

$$S = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix},$$

то будетъ имѣть мѣсто формула:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}.$$

§ 11

Теорема. *Если порядокъ подстановки* S *есть* ν, *то порядокъ подстановки* S^μ *будетъ* $\frac{\nu}{\theta}$, *гдѣ* θ *общій наибольшій дѣлитель чиселъ* ν *и* μ.

Дѣйствительно, для нахожденія порядка подстановки S^μ необходимо найти наименьшее число x, при которомъ $(S^\mu)^x = 1$, или $S^{\mu x} = 1$. Мы видимъ, что μx должно быть числомъ, кратнымъ порядка ν подстановки, то есть $\mu x = \nu q$, гдѣ q цѣлое число.

Отсюда

$$x = \frac{\nu}{\theta} \frac{q}{\frac{\mu}{\theta}},$$

гдѣ θ общій наибольшій дѣлитель чиселъ μ и ν.

Очевидно, что наименьшее значеніе для x получится при $q = \frac{\mu}{\theta}$ и равно $\frac{\nu}{\theta}$

Если числа μ и ν взаимно простыя, то $\theta = 1$ и, слѣдовательно, порядокъ подстановки $T = S^\nu$ равенъ ν, то есть такой же, какъ у подстановки S.

Нетрудно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ подстановки

$$1,\ T,\ T^2,\ T^3,\ \ldots,\ T^{\nu-1}$$

такія же, какъ и въ рядѣ (4) § 9, но порядокъ ихъ будетъ иной.

Нетрудно указать такое число x, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство: $S = T^x$. Въ самомъ дѣлѣ, разложимъ дробь $\frac{\nu}{\mu}$ въ непрерывную и обозначимъ предпослѣднюю подходящую черезъ $\frac{x}{y}$. Тогда, какъ извѣстно, будемъ имѣть:

$$\frac{\nu}{\mu} - \frac{x}{y} = \pm \frac{1}{\mu y}.$$

Отсюда получаемъ:

$$\mu x - \nu y = \mp 1 .$$

Если мы соотвѣтственнымъ образомъ подберемъ знаки чиселъ x и y, то эти числа будутъ удовлетворять равенству:

$$(1) \qquad \mu x - \nu y = 1 .$$

Нетрудно видѣть, что и обратно возможность удовлетворить равенству (1) цѣлыми значеніями x и y влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, что числа μ и ν взаимно-простыя, такъ какъ очевидно, что эти числа не могутъ имѣть общаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы, ибо на этого общаго дѣлителя должна была бы дѣлиться вторая часть, которая $=1$.

Если числа μ и ν имѣютъ нѣкотораго общаго дѣлителя δ, то очевидно, что всегда можно найти такія числа x и y, что будетъ

$$\mu x - \nu y = \delta .$$

Итакъ, возвращаясь къ нашей задачѣ, предположимъ, что мы подобрали числа x и y удовлетворяющими равенству (1). Тогда имѣемъ:

$$S^{\mu x - \nu y} = S .$$

Но

$$S^{\nu} = 1 , \ S^{\mu} = T .$$

Слѣдовательно, имѣемъ:

$$S = T^{x} .$$

Разложеніе подстановокъ на циклы.

§ 12.

Пусть будетъ

$$A_0 = a \, b \, c \, \ldots k \, l$$

одно изъ перемѣщеній заданныхъ n буквъ.

Если вычеркнемъ букву a, занимающую первое мѣсто, и перемѣстимъ ее, помѣстивъ направо отъ послѣдней буквы l, то получимъ новое перемѣщеніе:

$$A_1 = b \, c \ldots k \, l \, a .$$

Разсмотримъ подстановку:

$$\binom{A_1}{A_0} = \begin{pmatrix} b & c & d & \ldots & l & a \\ a & b & c & \ldots & k & l \end{pmatrix} .$$

Чтобы выполнить эту подстановку, достаточно раздѣлить окружность круга на n частей, написать въ точкахъ дѣленія буквы

$$a, b, c, \ldots, k, l$$

по порядку и замѣнять каждую букву слѣдующей за нею въ одну сторону вдоль по кругу. Другими словами, расположеніе A_1 буквъ получимъ изъ расположенія A_0 поворотомъ окружности на $\frac{1}{n}$ часть 2π. Поэтому подстановка, которую мы разсматриваемъ, называется *круговою*, или *цикломъ*.

Очевидно, что порядокъ круговой подстановки равенъ числу n буквъ, которыя эта подстановка перемѣщаетъ, ибо послѣ n поворотовъ кругъ возвращается въ первоначальное свое положеніе.

Разсматриваемую круговую подстановку мы будемъ для сокращенія обозначать знакомъ

$$(a, b, c, \ldots, k, l),$$

гдѣ въ скобкахъ написано то расположеніе буквъ, въ которомъ онѣ слѣдуютъ вдоль по кругу. Первая буква послѣдняго обозначенія круговой подстановки произвольна, то есть ту же самую подстановку мы будемъ обозначать знаками:

$$(b, c, \ldots, k, l, a), (c, \ldots, k, l, a, b), \ldots,$$

причемъ можемъ начинать съ любой буквы, лишь бы расположеніе всѣхъ буквъ соотвѣтствовало ихъ чередованію на кругѣ въ одну и ту же сторону.

Циклъ, состоящій изъ двухъ буквъ

$$(a, b),$$

будемъ называть *транспозиціей* этихъ буквъ

§ 13.

Теорема I. *Каждая подстановка, если она не круговая, есть произведеніе нѣсколькихъ круговыхъ, не имѣющихъ общихъ буквъ.*

Пусть S будетъ нѣкоторая подстановка. Беремъ одну изъ буквъ, перемѣщаемыхъ этой подстановкой, напримѣръ a. Пусть эта буква замѣняется нѣкоторою другою b. Пусть затѣмъ буква b замѣняется буквою c и такъ далѣе Продолжая слѣдить за рядомъ послѣдовательныхъ буквъ $a, b, c, \ldots$, необходимо дойдемъ, наконецъ, до такой буквы f, которая замѣняется первой буквой a

Получаемъ такимъ образомъ циклъ

$$C_0 = (a, b, c, \ldots, f)$$

Если этимъ цикломъ исчерпываются всѣ буквы, перемѣщаемыя подстановкой S, то сама подстановка S есть не что иное, какъ круговая C_0. Если же подстановка S не круговая, то циклъ C_0 не исчерпываетъ перемѣщаемыхъ буквъ. Беремъ какую-нибудь изъ остальныхъ буквъ и, оперируя по прежнему, составляемъ новую группу буквъ образующихъ новый циклъ C_1.

Продолжая далѣе выдѣленіе цикловъ, исчерпаемъ, наконецъ, всѣ буквы подстановки S.

Получимъ:

$$S = C_0 C_1 C_2 \ldots,$$

то есть, требуемое разложеніе подстановки на циклы

Очевидно, что множители въ послѣдней формулѣ могутъ быть перемѣщены

Напримѣръ, подстановка

$$S = \begin{pmatrix} h & k & \partial & f & b & j & a & g & e & c & i \\ a & b & c & \partial & e & f & g & h & i & j & k \end{pmatrix}$$

раскладывается на слѣдующіе циклы:

$$S = (a,\ h,\ g)(b,\ k,\ i,\ e)(c,\ \partial,\ f,\ j)$$

Если подстановка S не измѣняетъ нѣкоторыхъ буквъ, то эти буквы не входятъ въ простѣйшее выраженіе подстановки и, слѣдовательно, не входятъ также въ разложеніе по цикламъ.

Иногда желательно не терять изъ виду этихъ неизмѣняемыхъ подстановкой буквъ. Тогда является полезнымъ разсматривать циклы изъ одной буквы, напримѣръ

$$(a),$$

причемъ знакомъ (a) указывать, что буква не мѣняется.

Тогда, напримѣръ подстановку

$$S = \begin{pmatrix} \partial & c & b & a & e & f \\ a & b & c & \partial & e & f \end{pmatrix}$$

можно переписать такъ:

$$S = (a,\ \partial)(b,\ c)(e)(f)$$

§ 14.

Теорема II. *Порядокъ подстановки есть наименьшее кратное порядковъ ея цикловъ.*

Пусть будетъ

$$S = C_0 C_1 C_2 \ldots,$$

гдѣ C_0, C_1, C_2, ... — циклы.

Тогда, обозначая черезъ ν порядокъ подстановки S, получимъ:

$$C_0^\nu C_1^\nu C_2^\nu \ldots = 1.$$

Такъ какъ циклы не имѣютъ общихъ буквъ, то изъ предыдущаго равенства вытекаютъ, какъ необходимыя слѣдствія, слѣдующія

$$C_0^\nu = 1, \; C_1^\nu = 1, \; C_2^\nu = 1, \ldots$$

Отсюда слѣдуетъ, что число ν должно быть кратнымъ порядковъ всѣхъ цикловъ.

§ 15

Будемъ называть подстановку *правильною*, если порядки всѣхъ ея цикловъ одинаковы, и *неправильною* въ обратномъ случаѣ.

Напримѣръ, подстановка

$$\begin{pmatrix} d & f & b & e & a & c \\ a & b & c & d & e & f \end{pmatrix} = (a, d, e)(b, f, c)$$

есть правильная.

Подстановка же

$$\begin{pmatrix} a & c & e & f & b & g & d \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix} = (a)(b, c, e)(d, f, g)$$

неправильная.

§ 16.

Теорема III. *Степень μ круговой подстановки порядка ν есть сама круговая подстановка, если μ и ν — числа взаимно-простыя. Если же μ и ν имѣютъ общаго множителя θ, отличнаго отъ единицы, то S^μ будетъ правильная подстановка изъ θ цикловъ по $\frac{\nu}{\theta}$ буквъ въ каждомъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, расположимъ буквы круговой подстановки S вдоль по кругу. Тогда подстановка S^μ будетъ соотвѣтствовать повороту круга на уголъ $\mu\frac{2\pi}{\nu}$. Будемъ раскладывать эту подстановку на циклы. Начнемъ съ какой-нибудь буквы, находящейся на нѣкоторой точкѣ круга. Эта буква замѣняется другою, отстоящей на разстояніи: $\mu\frac{2\pi}{\nu}$ по дугѣ круга. Эта послѣдняя замѣнена будетъ новою, находящеюся отъ первой буквы

на растоянии: $\mu\frac{2\pi}{\nu}2$. И такъ далѣе. Наконецъ, мы прійдемъ къ первоначальной буквѣ, когда въ выраженіи: $\mu\frac{2\pi}{\nu}x$ цѣлое число x будетъ наименьшее, при которомъ число: $\mu\frac{2\pi}{\nu}x$ сдѣлается кратностью 2π, то есть, когда будетъ: $\mu\frac{2\pi}{\nu}x = q2\pi$. Отсюда видимъ, что число x прійдется искать, какъ наименьшее, удовлетворяющее равенству: $\mu x = \nu q$. На основаніи соображеній, приведенныхъ въ § 11, замѣчаемъ, что искомое значеніе x есть $\frac{\nu}{\theta}$, откуда слѣдуетъ справедливость теоремы. Если μ и ν — числа взаимно-простыя, $\theta = 1$, и подстановка S есть круговая.

Примѣръ:

$$S = (a, b, c, d, e, f)$$

$$S^2 = (a, c, e)(b, d, f)$$

$$S^3 = (a, d)(b, e)(c, f)$$

$$S^4 = (a, e, c)(b, f, d)$$

$$S^5 = (a, f, e, d, c, b)$$

$$S^6 = 1.$$

Въ этой таблицѣ мы получили круговую подстановку только для пятой степени, ибо 5—единственное число, кромѣ 1, меньшее 6 и взаимно простое съ нимъ.

§ 17.

Теорема IV. *Правильная подстановка есть степень нѣкоторой круговой* (теорема, обратная предыдущей).

Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно убѣдиться, что правильная подстановка

$$S = (a_1, b_1, \ldots, g_1)(a_2, b_2, \ldots, g_2) \ldots (a_\theta, b_\theta, \ldots, g_\theta).$$

составленная изъ θ цикловъ по $\frac{\nu}{\theta}$ буквъ въ каждомъ, есть степень θ такой круговой подстановки ν буквъ:

$$C = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\theta, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\theta, \ldots, g_1, g_2, \ldots, g_\theta),$$

такъ что

$$S = C^\theta.$$

§ 18.

Двѣ подстановки мы будемъ называть *подобными*, если онѣ состоятъ изъ одинаковаго числа цикловъ, причемъ порядки этихъ цикловъ въ обѣихъ подстановкахъ представляютъ одну и ту-же систему чиселъ.

Напримѣръ, подобны подстановки:

$$(a, b, c)(d, e)(f), \quad (b, e, f)(c, a)(d).$$

§ 19.

Теорема V. *Если S и S' суть двѣ подобныя подстановки, то существуетъ такая подстановка P, что имѣетъ мѣсто равенство:*

$$PS' = SP; \tag{1}$$

и обратно, если существуетъ подстановка P, удовлетворяющая предыдущему равенству, то S и S' подобныя подстановки.

Напишемъ обѣ подстановки S и S' разложенными на циклы (съ указаніемъ цикловъ изъ одной буквы) одну подъ другую такимъ образомъ, чтобы подъ каждымъ цикломъ одной подстановки былъ написанъ циклъ другой, состоящій изъ того-же числа буквъ.

Тогда, если мы пропустимъ скобки въ циклахъ, то получимъ два перемѣщенія изъ n буквъ, написанныхъ одно подъ другимъ:

$$a\ b\ c \ldots k\ l, \tag{2}$$

$$a'\ b'\ c' \ldots k'\ l', \tag{3}$$

гдѣ буквы (3) суть тѣ-же, что и буквы (2), только написанныя въ другомъ порядкѣ.

Такъ напримѣръ, для подстановокъ:

$$(a, b, c)(d, e)(f),$$

$$(b, e, f)(c, a)(d)$$

перемѣщенія (2) и (3) будутъ такія:

$$a\ b\ c\ d\ e\ f,$$

$$a'\ b'\ c'\ d'\ e'\ f',$$

гдѣ

$$a' = b,\ b' = e,\ c' = f,\ d' = c,\ e' = a,\ f' = d.$$

Будемъ разсматривать подстановку P, состоящую въ замѣнѣ каждой буквы ряда (2) соотвѣтственною, стоящею въ рядѣ (3).

Принимая обозначеніе (3), можно сказать, что подстановка P состоитъ въ добавленіи къ каждой буквѣ значка.

Будемъ разсматривать рядъ перемѣщеній.

$$A, B, \ldots$$

Пусть онъ при помощи подстановки P обращается въ рядъ слѣдующихъ перемѣщеній:

$$A', B', \ldots$$

Тогда очевидно, что подстановку P можно написать въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$\binom{A'}{A}, \binom{B'}{B} \ldots$$

Нетрудно видѣть, что если одна изъ двухъ подстановокъ есть:

$$S = \binom{B}{A},$$

то другая подстановка будетъ

$$S' = \binom{B'}{A'}.$$

Но очевидно, что

$$S' = \binom{A}{A'}\binom{B}{A}\binom{B'}{B}.$$

Далѣе имѣемъ:

$$\binom{A'}{A} = \binom{B'}{B} = P,$$

откуда

$$\binom{A}{A'} = P^{-1}.$$

Получаемъ:

$$S' = P^{-1}SP$$

Такимъ образомъ мы нашли подстановку P, удовлетворяющую равенству (1).

Обратная теорема также справедлива.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ S произвольную подстановку, а черезъ P одну изъ равносильныхъ:

$$\binom{A'}{A}, \quad \binom{B'}{B},$$

состоящую въ замѣнѣ ряда буквъ (2) рядомъ буквъ (3), получаемъ изъ равенства:

$$S' = P^{-1}SP$$

такое:

$$S' = \binom{A}{A'}\binom{B}{A}\binom{B'}{B} = \binom{B'}{A'}.$$

Отсюда видимъ что подстановка S' будетъ подобна подстановкѣ S, ибо происходитъ изъ этой послѣдней черезъ замѣну буквъ (2), находящихся въ циклахъ, буквами (3).

Слѣдствіе. *Два произведенія: ST и TS двухъ произвольныхъ подстановокъ суть подстановки подобныя.* Въ самомъ дѣлѣ, обозначая: $ST = P$, $TS = Q$, получимъ изъ второго равенства: $S = T^{-1}Q$. Подставляя въ первое равенство, получимъ: $P = T^{-1}QT$, откуда слѣдуетъ, что подстановки Q и P подобныя.

Напримѣръ, разсмотримъ двѣ подстановки.

$$S = (a, b, c, \partial)(e, f),$$

$$T = (a, b, c)(\partial, e, f).$$

Получимъ

$$ST = (a, c, e, \partial, b)(f).$$

$$TS = (a, c, b, \partial, f)(e).$$

§ 20.

Мы видѣли уже два примѣра обратимыхъ подстановокъ, а именно таковы степени одной и той же подстановки, а также подстановки, не имѣющія общихъ буквъ.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію самаго общаго вида обратимыхъ подстановокъ. Если двѣ подстановки обратимы, то имѣетъ мѣсто равенство: $TS = ST$ или $S = T^{-1}ST$. Но мы видѣли, что подстановка $T^{-1}ST$ выводится изъ подстановки S черезъ производство подстановки T въ циклахъ подстановки S.

Послѣднее равенство показываетъ, что подобное преобразованіе подстановки S при помощи подстановки T не должно въ этомъ случаѣ мѣнять этой подстановки. Слѣдовательно, подстановка T должна производить только слѣдующее перемѣщеніе буквъ:

перемѣщеніе цикловъ одинаковаго порядка подстановки S одного на мѣсто другого и

простое перемѣщеніе буквъ каждаго цикла, состоящее изъ передвиженія какой-либо буквы на первое мѣсто безъ измѣненія послѣдовательности буквъ.

Напримѣръ, если задана подстановка:

$$S = (a, b, c)(\partial, e, f)(g, h)(k)$$

и мы эту же самую подстановку подпишемъ подъ нею по правиламъ, указаннымъ выше, допуская при этомъ только измѣненіе расположенія цикловъ съ одинаковымъ числомъ буквъ, а также измѣненіе первой буквы цикловъ, то новый видъ подстановки, напримѣръ

$$(d, e, f)(b, c, a)(h, g)(k),$$

приведетъ къ подстановкѣ:

$$T = \begin{pmatrix} d & e & f & b & c & a & h & g & k \\ a & b & c & d & e & f & g & h & k \end{pmatrix},$$

которая будетъ обратима съ заданною.

§ 21.

Покажемъ теперь, что *каждую подстановку можно представить, какъ произведеніе транспозицій*.

Возьмемъ произвольную подстановку:

$$S = \begin{pmatrix} a' & b' & c' & . & . & k' & l' \\ a & b & c & . & . & k & l \end{pmatrix},$$

гдѣ $a'\ b'\ c' \ldots k'\ l'$ иное перемѣщеніе буквъ: $a, b, c, \ldots k, l$. Умножимъ подстановку S на транспозицію (l, l') Тогда въ произведеніи: $S' = S(l, l')$ буква l не перемѣщается и, слѣдовательно, подстановка S' перемѣщаетъ $n-1$ остальныхъ буквъ: $a, b, c, \ldots k$ и можетъ быть написана такъ

$$S' = \begin{pmatrix} a'' & b'' & . & . & k'' \\ a & b & \ldots & & k \end{pmatrix}.$$

Но, принимая во вниманіе, что $(l, l')^2 = 1$, получаемъ:

(1) $$S = S'(l, l').$$

Умножая далѣе S' на транспозицію (k, k''), получимъ подстановку S'', перемѣщающую только $n-2$ оставшіяся буквы. Слѣдовательно, выходитъ: $S' = S''(k, k'')$, откуда, на основаніи равенства (1), получаемъ: $S = S''(k, k'')(l, l')$.

Продолжая дальнѣйшее преобразованіе подстановки S'', представимъ окончательно подстановку S въ видѣ произведенія транспозицій.

Очевидно, что такое разложеніе можетъ быть произведено не однимъ способомъ.

Докажемъ, что *если при одномъ способѣ разложенія мы представимъ подстановку въ видѣ произведенія четнаго (нечетнаго) числа транспози-*

цій, то и при другомъ способѣ разложенія получимъ четное (нечетное) число множителей.

Предположимъ, что данная подстановка S разбита на циклы

Посмотримъ, какое вліяніе на число цикловъ будетъ имѣть умноженіе данной подстановки S на транспозицію

$$T = (a, f)$$

Разсмотримъ два случая:

1) обѣ буквы a и f принадлежатъ къ одному циклу подстановки S;

2) эти буквы принадлежатъ къ разнымъ цикламъ.

Разсмотримъ сначала первый случай, пусть циклъ, заключающій буквы транспозиціи T, будетъ:

$$C = (a, b, \ldots, e, f, g, \ldots, k).$$

Нетрудно видѣть, что C, послѣ умноженія на T слѣва, распадается на два цикла:

$$(a, g, \ldots, k)(f, b \ldots, e).$$

Итакъ, транспозиція T разбиваетъ циклъ C на 2 новыхъ. Остальные же циклы транспозиціи T оставляетъ безъ перемѣны.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію случая, когда буквы транспозиціи:

$$T = (a, a')$$

принадлежатъ къ двумъ различнымъ цикламъ:

$$C = (a, b, \ldots, g), \; C' = (a', b', \ldots, k')$$

Тогда имѣемъ:

$$TCC' = (a, b', \ldots, k', a', b, \ldots g).$$

Другими словами, транспозиція T соединяетъ два цикла, не измѣняя ихъ.

Предположимъ, что подстановка S состоитъ изъ ν цикловъ и можетъ быть представлена въ видѣ произведенія μ транспозицій.

Тогда, умножая это произведеніе на транспозиціи въ обратномъ порядкѣ, прійдемъ къ тождественной подстановкѣ, имѣющей n однобуквенныхъ цикловъ (n число всѣхъ буквъ).

Получается, слѣдовательно, пріобрѣтеніе $n - \nu$ цикловъ.

Но такъ какъ умноженію на каждую транспозицію должно соотвѣтствовать пріобрѣтеніе или потеря одного цикла, то очевидно, что число μ

транспозицій, на которыя разлагается подстановка, можетъ отличаться только на четное число отъ числа $n - \nu$.

Но число $n - \nu$ зависитъ только отъ числа цикловъ заданной подстановки и не зависитъ отъ метода разложенія ея на транспозиціи. Отсюда слѣдуетъ, что высказанное утвержденіе справедливо.

§ 22.

Теорема IV. *Всѣ подстановки изъ n буквъ распадаются на два рода, изъ которыхъ подстановки перваго рода могутъ быть разложены на четное число транспозицій двухъ буквъ, подстановки же второго рода на нечетное.*

Нетрудно видѣть, что въ каждомъ родѣ заключается одинаковое число подстановокъ, а именно $\frac{1}{2}N$, ибо умноженіемъ на транспозицію каждая подстановка перваго рода переходитъ въ подстановку второго рода, и обратно.

О группахъ подстановокъ.

§ 23.

Очевидно, что образуетъ группу такая совокупность подстановокъ что каждыя двѣ подстановки этой совокупности даютъ въ произведеніи подстановку той же совокупности.

Мы будемъ называть порядкомъ группы подстановокъ число подстановокъ, образующихъ группу. Число n перемѣщаемыхъ буквъ мы назовемъ *степенью* группы подстановокъ.

§ 24.

Всѣ N подстановокъ степени n образуютъ группу.

Функціи отъ n буквъ, не мѣняющіяся при всѣхъ N подстановкахъ, называются симметрическими. Отсюда группу всѣхъ N подстановокъ называютъ *симметрическою*.

§ 25.

Нетрудно видѣть, что *подстановки перваго рода, эквивалентныя четному числу перестановокъ, образуютъ группу.*

Разсмотримъ такую функцію:

$$\begin{aligned} U = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \; \ldots \; &(x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3) \; \ldots \; &(x_2 - x_n) \\ \ldots\ldots\ldots &\ldots \\ \ldots\ldots\ldots &\ldots \\ &(x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

отъ n независимыхъ перемѣнныхъ.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, x_n.$$

Тутъ функція U мѣняетъ свой знакъ при транспозиціи двухъ изъ числа n значковъ

$$1, 2, \ldots, n,$$

и мы видимъ, что функція U принимаетъ два различныхъ значеній $+U$ и $-U$, причемъ она

равна $+U$ при подстановкахъ перваго рода
и равна $-U$ при подстановкахъ второго рода

Функціи, подобныя U, измѣняющія при подстановкѣ неизвѣстныхъ только свой знакъ, называются *знакоперемѣнными.*

Поэтому группа подстановокъ перваго рода, не мѣняющихъ функціи U, носитъ названіе *знакоперемѣнной группы.*

§ 26.

Укажемъ еще примѣры группъ подстановокъ.

a) Степени:

$$1, S, S^2, \ldots, S^{\nu-1},$$

образующія періодъ подстановки S составляютъ, очевидно, группу порядка ν.

Эту группу будемъ называть *циклическою.*

b) Подстановки оставляющія безъ перемѣны k буквъ, образуютъ группу порядка:

$$1, 2, 3 \ldots (n-k)$$

(число всѣхъ подстановокъ, мѣняющихъ остальныя $n-k$ буквъ).

c) Подстановки, оставляющія безъ перемѣны нѣкоторую функцію, образуютъ всегда группу.

Напримѣръ, функція:

$$x_1x_2 + x_3x_4$$

отъ четырехъ буквъ:

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

не мѣняется при слѣдующихъ подстановкахъ четырехъ цифръ: 1, 2, 3, 4:

1, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4), (1, 3) (2, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 4, 2, 3).

Эти подстановки образуютъ группу восьмого порядка.

§ 27.

Изъ опредѣленія понятія о группѣ подстановокъ слѣдуетъ, что въ каждой группѣ должна, во первыхъ, заключаться тождественная подстановка, а во вторыхъ, каждой подстановкѣ группы должна соотвѣтствовать входящая въ эту группу обратная подстановка. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую нибудь подстановку S группы; тогда въ группу должны входить, очевидно, всѣ степени подстановки S:

$$S, S^2, S^3, \ldots S^{\nu-1}, S^{\nu}=1,$$

гдѣ ν порядокъ подстановки S.

Итакъ, мы видимъ, что *въ группу входятъ* 1 *и* $S^{\nu-1}=S^{-1}$.

§ 28.

Если двѣ группы Γ и G таковы, что всѣ подстановки группы G входятъ въ составъ группы Γ, то группа G называется *дѣлителемъ группы* Γ, или *подгруппой*.

Теорема Langrange'a. *Порядокъ дѣлителя* G *есть дѣлитель порядка группы* Γ.

Пусть μ порядокъ группы G, а m порядокъ группы Γ. Не предполагая дѣлитель G тождественнымъ съ Γ, мы должны допустить, что

$$m>\mu.$$

Разсмотримъ всѣ μ подстановокъ группы G.

(1) $$1, S_1, S_2, \ldots S_{\mu-1}.$$

Такъ какъ $m>\mu$, то среди подстановокъ группы Γ будетъ существовать, по крайней мѣрѣ, одна T_1, не принадлежащая дѣлителю G. Умножимъ подстановку (1) справа на T_1; тогда получимъ систему подстановокъ:

(2) $$T_1, S_1T_1, S_2T_1, \ldots, S_{\mu-1}T_1.$$

Всѣ подстановки системы (2) принадлежатъ группѣ Γ и, очевидно, различны между собой, ибо равенство:

$$S_iT_1=S_jT_1$$

влекло бы за собой:

$$S_i=S_j,$$

что невозможно, ибо въ рядѣ (1) указаны различныя между собой подстановки группы G.

Далѣе, ни одна изъ подстановокъ (2) не можетъ входить въ составъ группы (1), ибо, допустивъ обратное, т. е., что

$$S_i T_1 = S_j ,$$

получили бы:

$$T_1 = S_i^{-1} S_j ,$$

т. е. выходило бы, что T_1 принадлежитъ къ группѣ (1), ибо въ составъ группы (1) входитъ, на основаніи сказаннаго въ § 27, подстановка:

$$S_i^{-1}$$

Если двумя системами (1) и (2) исчерпана группа Γ, то слѣдовательно,

$$m = 2\mu ,$$

и теорема доказана.

Если же $m > 2\mu$, то должна существовать въ группѣ Γ подстановка T_2, не входящая ни въ одну изъ системъ (1) и (2). Умножая справа на эту подстановку всѣ подстановки группы (1), получимъ новую систему:

(3) $$T_2 ,\ S_1 T_2 ,\ S_2 T_2 , \ldots , S_{\mu-1} T_2 .$$

Подобно предыдущему убѣждаемся, что подстановки системы (3) всѣ различны между собой и отличны отъ подстановокъ группы (1). Нетрудно убѣдиться, что подстановки (3) отличны также отъ подстановокъ (2). Въ самомъ дѣлѣ, если бы было:

$$S_i T_2 = S_j T_1 ,$$

то мы имѣли бы:

$$T_2 = S_i^{-1} S_j T_1 ;$$

но $S_i^{-1} S_j$ принадлежитъ къ группѣ (1) и, слѣдовательно, T_2 принадлежала бы къ системѣ (2), что противорѣчитъ сдѣланному предположенію.

Если тремя системами (1), (2), (3) исчерпывается группа Γ, то $m=3\mu$, и теорема доказана; если $m > 3\mu$, то продолжаемъ разсужденіе далѣе. Очевидно, что мы въ концѣ концовъ получимъ:

(4) $$m = q\mu ,$$

гдѣ q есть цѣлое число, и группа Γ разбивается на q системъ:

$$\begin{array}{lllll}
1 , & S_1 , & S_2 , & \ldots , & S_{\mu-1} ; \\
T_1 , & S_1 T_1 , & S_2 T_1 , & \ldots , & S_{\mu-1} T_1 ; \\
T_2 , & S_1 T_2 , & S_2 T_2 , & \ldots , & S_{\mu-1} T_2 ; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
T_{q-1} , & S_1 T_{q-1} , & S_2 T_{q-1} , & \ldots , & S_{\mu-1} T_{q-1}
\end{array}$$

Системы (5) будемъ называть *сопряженными съ группой* (1).

Нетрудно показать, что *изъ сопряженныхъ системъ только одна первая (1) есть группа.*

Въ самомъ дѣлѣ, если бы система:

$$T_i, \; S_1 T_i, \; S_2 T_i, \; \ldots, \; S_{\mu-1} T_i$$

была группой, то было бы:

$$(S_k T_i)(S_l T_i) = S_r T_i,$$

откуда

$$S_k T_i S_l = S_r,$$

или, окончательно,

$$T_i = S_k^{-1} S_r S_l^{-1},$$

т. е. подстановка T_i принадлежала бы къ дѣлителю (1), что невозможно.

§ 29.

Сопряженныя системы (5) предыдущаго §-а получились умноженіемъ подстановокъ группы G справа на подстановки:

$$1, \; T_1, \; T_2, \ldots \ldots T_{q-1}.$$

Подобнымъ же образомъ можно найти подстановки:

$$1, \; U_1, \; U_2, \ldots \ldots U_{q-1},$$

умноженіемъ на которыя слѣва получимъ разложеніе группы T на сопряженныя системы слѣдующаго вида:

$$\begin{array}{lllll}
1, & S_1, & S_2, & \ldots & S_{\mu-1}; \\
U_1, & U_1 S_1, & U_1 S_2, & \ldots & U_1 S_{\mu-1}; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots; \\
U_{q-1}, & U_{q-1} S_1, & \ldots & \ldots & U_{q-1} S_{\mu-1}.
\end{array}$$

§ 30.

Очевидно, что всякая группа подстановокъ представляетъ дѣлителя симметрической группы, и, слѣдовательно, порядокъ всякой группы долженъ быть дѣлителемъ числа:

$$N = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots n.$$

Кромѣ того, порядокъ группы долженъ равняться кратному порядковъ отдѣльныхъ, входящихъ въ составъ ея подстановокъ, ибо, если ν будетъ порядокъ подстановки S группы, то группа:

$$1,\ S,\ S^2 \ldots S^{\nu-1}$$

порядка ν будетъ дѣлителемъ разсматриваемой группы, и, слѣдовательно, порядокъ группы долженъ быть кратнымъ порядка ν входящей въ нее подстановки S.

Если число n перемѣщаемыхъ буквъ простое, то всякая группа порядка n должна состоять изъ степеней круговой подстановки этихъ буквъ.

Въ самомъ дѣлѣ, порядокъ каждой изъ входящихъ въ группу подстановокъ, будучи дѣлителемъ простого числа n, долженъ равняться или n или единицѣ; слѣдовательно, группа должна состоять изъ степеней одной подстановки. Покажемъ, что эта подстановка должна быть круговая.

Такъ какъ порядокъ входящаго въ подстановку цикла долженъ быть дѣлителемъ порядка подстановки, то въ данномъ случаѣ у подстановки должны быть циклы одного изъ двухъ порядковъ: 1 или n; слѣдовательно, подстановка должна состоять изъ одного цикла порядка n.

§ 31.

Подстановки, общія двумъ группамъ, образуютъ, очевидно, группу, которая называется *наибольшимъ общимъ дѣлителемъ данныхъ группъ.*

Пусть порядокъ группы будетъ m, а порядокъ ея дѣлителя будетъ μ, причемъ

$$m = q\mu.$$

Цѣлое число q называется *индексомъ дѣлителя*

О дѣлителяхъ симметрической группы.

§ 32.

Одной изъ наиболѣе важныхъ по приложеніямъ къ алгебрѣ задачъ теоріи группъ подстановокъ, является задача нахожденія всѣхъ группъ подстановокъ изъ даннаго числа буквъ, или иначе, задача нахожденія всѣхъ дѣлителей симметрической группы.

Lagrange и послѣ него рядъ выдающихся математиковъ занимались этой задачей, но, несмотря на ихъ усилія, до сихъ поръ наука владѣетъ

лишь небольшимъ числомъ общихъ предложеній, относящихся къ этой задачѣ.

Мы изложимъ результаты, имѣющіе наиболѣе важное значеніе.

§ 33.

Индексы всѣхъ дѣлителей симметрической группы должны быть, конечно, дѣлителями числа:

$$N = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, . \,,\, n \,.$$

Наименьшій изъ такихъ дѣлителей есть 2. Мы видѣли уже, что знакоперемѣнная группа имѣетъ индексъ, равный 2.

Покажемъ теперь предложеніе обратное, а именно, что *группа съ индексомъ 2 не можетъ отличаться отъ знакоперемѣнной.*

Итакъ, разсмотримъ группу индекса 2:

$$1 \,,\, S_1 \,,\, S_2 \,,\, . \,. \,. \,,\, S_{\frac{N}{2}-1} \,. \tag{1}$$

Умножимъ группу (1) справа и слѣва на подстановку T симметрической группы, получимъ двѣ системы:

$$T,\ TS_1 \,.\, TS_2 \,,\, . \,. \,.\, TS_{\frac{N}{2}-1} \,; \tag{2}$$

$$T,\ S_1T,\ S_2T \,.\, . \,. \,.\,,\, S_{\frac{N}{2}-1}T \tag{3}$$

Обѣ системы (2) и (3) совпадаютъ, какова бы ни была подстановка T.

Въ самомъ дѣлѣ, если подстановка T принадлежитъ къ группѣ (1), то обѣ системы совпадаютъ съ группой (1) и, слѣдовательно, совпадаютъ между собой; если же подстановка T не принадлежитъ къ группѣ (1), то обѣ системы (2) и (3) также совпадаютъ, ибо въ случаѣ индекса 2 должна существовать только одна система, сопряженная съ группой.

Итакъ, всегда всякому значку i можно будетъ сопоставить такой значокъ j, что будетъ

$$TS_i = S_jT,$$

или

$$S_i = T^{-1}S_jT.$$

Отсюда мы видимъ, что группа (1) должна заключать всѣ подстановки, подобныя съ какою нибудь S_j, ибо T произвольная подстановка.

Можно утверждать, что въ группѣ (1) не должно быть ни одной транспозиціи, состоящей изъ двухъ буквъ. Допустивъ обратное, а именно, что къ группѣ (1) принадлежитъ какая нибудь перестановка двухъ буквъ,

мы прійдемъ къ ложному заключенію, что въ группу входятъ всѣ перестановки двухъ буквъ, т. е. группа симметрическая.

Представимъ себѣ теперь, что T есть транспозиція двухъ буквъ; тогда очевидно, что всѣ транспозиціи двухъ буквъ должны входить въ составъ сопряженной системы (2), ибо онѣ не входятъ въ группу (1). Если мы, далѣе, умножимъ обѣ системы (1) и (2) на транспозицію U двухъ буквъ, то системы (1) и (2) перейдутъ одна въ другую; слѣдовательно, группа (1) заключаетъ всѣ произведенія по двѣ транспозиціи двухъ буквъ и потому совпадаетъ съ знакоперемѣнной, что и требовалось показать.

§ 34.

Теорема. *Всѣ подстановки знакоперемѣнной группы могутъ быть представлены въ видѣ произведеній тройныхъ цикловъ.*

Справедливость теоремы доказывается тѣмъ, что всякая пара перестановокъ двухъ буквъ даетъ въ произведеніи одинъ или два тройныхъ цикла. Въ самомъ дѣлѣ,

$$(a, b)(a, c) = (a, b, c),$$

а

$$(a, b)(c, d) = (a, c, d)(a, c, b).$$

§ 35.

Теорема. *Группа, заключающая всѣ транспозиціи по двѣ буквы*

$$a, b, c, \ldots, k, l,$$

съ общей буквой, такъ, напримѣръ, транспозиціи

$$(1) \qquad (a, b), (a, c), \ldots, (a, k), (a, l),$$

есть симметрическая.

Доказательство основывается на томъ, что всякая транспозиція двухъ буквъ равносильна одной или нѣсколькимъ изъ ряда (1). Въ самомъ дѣлѣ,

$$(b, c) = (a, b)(a, c)(a, b).$$

§ 36.

Теорема. *Если группа заключаетъ всѣ тройные циклы съ двумя одинаковыми буквами, то она должна заключать знакоперемѣнную группу, какъ дѣлителя.*

Пусть перемѣщаемыя буквы будутъ

$$a_1, a_2, \ldots, a,$$

и пусть въ составъ группы входятъ циклы

$$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, a_4), \ldots, (a_1, a_2, a_n).$$

Нетрудно убѣдиться, что въ группу должны входить всѣ тройные циклы и, слѣдовательно, вся знакоперемѣнная группа. Въ справедливости сказаннаго убѣждаемся изъ формулъ

$$(a_2, a_1, a_3) = (a_1, a_2, a_3)^2,$$

$$(a_1, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_3)(a_2, a_1, a_4)(a_2, a_1, a_3),$$

$$(a_2, a_3, a_4) = (a_2, a_1, a_3)(a_1, a_2, a_4)(a_1, a_2, a_3),$$

$$(a_3, a_4, a_5) = (a_2, a_1, a_3)(a_2, a_4, a_5)(a_1, a_2, a_3).$$

§ 37.

Будемъ называть по примѣру Cauchy группу *транзитивною*, если среди ея подстановокъ можетъ быть указана такая, которая переводитъ одну изъ буквъ въ произвольно выбранную другую

Въ обратномъ случаѣ группа называется *интранзитивною*. Такъ, напримѣръ, группа подстановокъ, не мѣняющая нѣкоторую букву a, интранзитивная, ибо въ группѣ не существуетъ подстановокъ, замѣняющихъ букву a на нѣкоторую другую.

Высказанное понятіе о транзитивности группы можетъ быть обобщено слѣдующимъ образомъ: группа называется *m разъ транзитивною*, если подстановки группы допускаютъ замѣну нѣкоторыхъ опредѣленныхъ m буквъ на m произвольно выбранныхъ другихъ.

Если группа m разъ транзитивна, то она способна замѣнять m произвольно выбранныхъ буквъ

(1) $$a_1, a_2, \ldots a_m$$

на другія, также произвольно выбранныя

(2) $$b_1, b_2, \ldots, b_m,$$

ибо по опредѣленію существуетъ m буквъ, которыя замѣняются, какъ буквами (1), такъ и буквами (2)

Нетрудно видѣть, что *симметрическая группа есть n 1 разъ транзитивная.*

Покажемъ, что *знакоперемѣнная группа можетъ быть разсматриваема, какъ $n-2$ разъ транзитивная*. Въ этомъ можно убѣдиться такъ: составимъ подстановку, замѣняющую однѣ опредѣленныя $n-2$ буквы

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$$

на другія, произвольно указанныя

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}.$$

Видъ такой подстановки будетъ

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

гдѣ

$$a_{n-1}, a_n, b_{n-1}, b_n$$

остальныя перемѣщаемыя буквы. Пишемъ въ нашей подстановкѣ эти остальныя буквы въ произвольномъ порядкѣ. Если подстановка оказывается не принадлежащей знакоперемѣнной группѣ, то достаточно переставить буквы b_{n-1} и b_n, чтобы получить подстановку знакоперемѣнной группы.

Если въ группу входитъ круговая подстановка всѣхъ буквъ, то группа, очевидно, транзитивная.

§ 38.

Если всѣ n переставляемыхъ буквъ распадаются на нѣсколько рядовъ

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_k; \\ a_{k+1}, & a_{k+2}, & \ldots, & a_{2k}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-k+1}, & a_{n-k+2}, & \ldots, & a_n, \end{array}$$

по k буквъ въ каждомъ рядѣ, причемъ всѣ подстановки группы перемѣщаютъ буквы только такъ, что буквы рядовъ (1) не раздѣляются, другими словами, двѣ буквы одного ряда не могутъ замѣниться буквами разныхъ, то группа называется *импримитивною*. Ряды (1) называются *системами импримитивности*.

Если нельзя разбить переставляемыя буквы на системы, обладающія вышеуказанымъ свойствомъ, то группа называется *примитивною*.

Такъ напримѣръ, группа степеней круговой подстановки изъ шести буквъ

$$
\begin{aligned}
&1\\
&S = (a, b, c, d, e, f)\\
&S_2 = (a, c, e)\ (b, d, f)\\
&S_3 = (a, d)\ (b, e)\ (c, f)\\
&S_4 = (a, e, c)\ (b, f, d)\\
&S_5 = (a, f, e, d, c, b)
\end{aligned}
$$

двойнымъ образомъ импримитивна, причемъ за системы импримитивности можно выбрать или

$$
\begin{matrix} a, c, e, & & a, d \\ & \text{или} & b, e \\ b, d, f. & & c, f. \end{matrix}
$$

§ 39

Теорема. *Если транзитивная группа подстановокъ содержитъ отдѣльную транспозицію двухъ буквъ, то она или симметрическая, или импримитивная.*

Итакъ, пусть транзитивная группа содержитъ транспозицію

$$(a_1, a_2).$$

Пусть, кромѣ того, въ группѣ содержатся транспозиціи

$$(a_1, a_3)\ (a_1, a_4), \ldots .(a_1, a_m),$$

переводящія букву a_1 въ другія

$$a_2, \ldots .a_m.$$

Число m можетъ быть равно 2; тогда въ группу входитъ только одна транспозиція

$$(a_1, a_2).$$

Если $m = n$, гдѣ n число всѣхъ буквъ, то по теоремѣ § 34 группа должна быть симметрическою.

Если $m < n$, то покажемъ, что группа импримитивная.

Возьмемъ какую нибудь букву b, не принадлежащую къ системѣ

(1) $$a_1, a_2 \ldots, a_m$$

Въ группѣ не можетъ заключаться транспозиція, перемѣщающая букву b съ какою нибудь изъ буквъ

$$a_2, \ldots, a_m$$

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное, т. е. что въ группѣ находится транспозиція (a_i, b); тогда замѣчаемъ, что должна находиться въ этой группѣ также транспозиція

$$(a_1, b) = (a_1, a_i)(a_i, b)(a_1, a_i),$$

что противорѣчитъ предположенію.

Такъ какъ группа транзитивна, то будетъ существовать нѣкоторая подстановка T_1, переводящая букву a_1 въ b_1, гдѣ b_1 не входитъ въ систему (1).

Покажемъ, что подстановка T_1 должна переводить всѣ другія буквы

$$a_2, a_3, \ldots, a_m$$

въ буквы

$$b_2, b_3, \ldots, b_m,$$

не входящіе въ систему (1).

Допустимъ обратное, а именно, что какая нибудь буква a_i подстановкою T_1 превращается въ букву a_k той же системы (1); тогда, преобразовывая при помощи подстановки T_1 транспозицію (a_1, a_i), должны получить

$$T_1^{-1}(a_1, a_i)\,T_1 = (b_1, a_k).$$

Итакъ, въ группѣ должна заключаться транспозиція (b_1, a_k), что какъ мы видѣли, невозможно.

Если системами (1) и

(2) $$b_1, b_2, \ldots, b_m$$

не исчерпывается совокупность переставляемыхъ буквъ, то должна существовать подстановка T_2, переводящая букву a_1 въ букву c_1 не заключающуюся въ системахъ (1) и (2). Нетрудно видѣть, что вся система буквъ (1) переходитъ черезъ подстановку T_2 въ новую систему

(3) $$c_1, c_2, \ldots, c_m.$$

Мы видимъ, что система (3) не можетъ имѣть буквъ, общихъ съ системой (1).

Покажемъ теперь, что система (3) не заключаетъ также элементовъ системы (2). Допустимъ, что подстановка T_2 переводитъ нѣкоторую букву, напримѣръ a_2, системы (1) въ нѣкоторую букву b_i системы (2); тогда въ группѣ должна заключаться транспозиція

$$T_2^{-1}(a_1, a_2)\,T_2 = (c_1, b_i).$$

Преобразуемъ теперь полученную транспозицію при помощи подстановки T_1^{-1}; получаемъ

$$T_1 T_2^{-1}(a_1, a_2)\,T_2\,T_1^{-1} = T_1\,(c_1, b_i)\,T_1^{-1}.$$

Подстановка T_1^{-1}, обратная подстановкѣ T_1, переводитъ буквы системы (2) въ буквы системы (1); слѣдовательно, буква b_i замѣняется нѣкоторою a_k. Пусть подстановка T_1^{-1} переводитъ букву c_1 въ нѣкоторую α, которая навѣрно не принадлежитъ системѣ (1); тогда въ нашей группѣ должна существовать транспозиція

$$T_1\ (c_1,\ b_i)\ T_1^{-1} = (\alpha,\ a_k),$$

что невозможно.

Итакъ, мы видимъ, что группа импримитивна, если только не обращается въ симметрическую.

Если число n буквъ простое, то группа не можетъ быть импримитивною, и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ транзитивная группа, заключающая одну перестановку двухъ буквъ, должна быть симметрическою.

Я долженъ предупредить на этомъ мѣстѣ русскихъ читателей, что въ книгѣ H. Weber, Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande 1912 S. 215 доказательство послѣдней теоремы совершенно ошибочно Тамъ говорится, что, если въ группу входятъ транспозиціи $(a_1\ a_2)$, $(a_1\ a_3)$ $\ldots$ $(a_1\ a_m)$, то въ нее должна входить вся симметрическая группа Σ_m элементовъ $a_1\ a_2\ \ldots\ a_m$ Это, конечно, вѣрно, но дальнѣйшее заявленіе, что группа Σ_m есть нормальный дѣлитель заданной, представляетъ грубый просмотръ, ибо заданная группа транзитивна, а, значитъ, заключаетъ подстановку S, переводящую a_1 въ a_{m+1}. Преобразуя при помощи S подстановки группы Σ_m, введемъ новую букву a_{m+1}, которой въ этихъ подстановкахъ раньше не было и, слѣдовательно, Σ_m послѣ преобразованія переходитъ въ другую группу.

§ 40.

Теорема. *Если транзитивная группа заключаетъ тройной циклъ, то она или дѣлится на знакоперемѣнную группу, или импримитивна.*

Пусть группа заключаетъ циклъ $(a_1\ a_2\ a_3)$.

Разсмотримъ случай болѣе общій, когда въ группу входитъ рядъ цикловъ

$$(a_1\ a_2\ a_3),\ (a_1\ a_2\ a_4)\ \ldots\ (a_1\ a_2\ a_m),\ \text{гдѣ}\ m \geqq 3.$$

Если $m = n$, то по теоремѣ § 36 мы замѣчаемъ, что группа должна дѣлиться на знакоперемѣнную

Предположимъ, что $m < n$. По указанной теоремѣ разсматриваемая группа должна заключать знакоперемѣнную группу изъ элементовъ

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m.$$

Покажемъ теперь, что въ группѣ не должно заключаться ни одного цикла, связывающаго одну изъ буквъ ряда (1) съ новыми буквами

$$a_{m+1},\ a_{m+2},\ \ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ обратное, а именно, что существуетъ въ группѣ тройной циклъ

$$(2) \qquad (a_1, a_{m+1}, a_{m+2})$$

Такъ какъ группа заключаетъ всѣ подстановки знакоперемѣнной группы изъ буквъ (1), то, слѣдовательно, въ группѣ заключается тройной циклъ, переводящій букву a_1 въ любую букву a_k ряда (1). Преобразуя циклъ (2) при помощи этого послѣдняго цикла, мы замѣчаемъ, что въ группѣ долженъ заключаться циклъ

$$(a_k, a_{m+1}, a_{m+2})$$

т. е. другими словами, всѣ циклы

$$(a_{m+1}, a_{m+2}, a_1), (a_{m+1}, a_{m+2}, a_2), \ldots, (a_{m+1}, a_{m+2}, a_m),$$

т. е. въ группѣ заключается знакоперемѣнная группа буквъ

$$a_1, \ldots, a_{m+2},$$

а, слѣдовательно, и циклы (a_1, a_2, a_{m+1}), (a_1, a_2, a_{m+2}), что противорѣчитъ предположенію, что m наибольшій значекъ, съ которымъ циклъ (a_1, a_2, a_m) входитъ въ группу. Подобнымъ же образомъ мы придемъ къ противорѣчію, если допустимъ, что въ групну входитъ циклъ (a_i, a_k, a_{m+1}), гдѣ a_i и a_k суть два элемента изъ ряда (1).

Въ самомъ дѣлѣ, преобразуя послѣдній циклъ при помощи (a_i, a_k, a_1), получимъ циклъ

$$(a_k, a_1, a_{m+1}).$$

Преобразовывая далѣе при помощи цикла

$$(a_k, a_1, a_2),$$

приходимъ къ циклу

$$(a_1, a_2, a_{m+1}),$$

существованіе котораго въ группѣ противорѣчитъ предположенію.

Итакъ, группа, если она не дѣлится на знакоперемѣнную, должна быть импримитивною, ибо всѣ ея подстановки должны или замѣнять буквы системы (1) новыми буквами, или же замѣнять другимъ расположеніемъ буквъ той же системы

Допустивъ обратное, а именно предположивъ, что существуетъ подстановка, замѣняющая нѣкоторыя буквы системы (1) буквами той же системы, а другія буквы этой системы новыми, мы прійдемъ къ противорѣчію, ибо, взявъ тройной циклъ, элементы котораго принадлежатъ къ бу-

квамъ системы (1), взятымъ изъ обѣихъ указанныхъ категорій, мы получили бы, преобразовывая этотъ циклъ при помощи разсматриваемой подстановки, тройной циклъ, связывающій буквы системы (1) съ новыми, что невозможно. Слѣдовательно, группа импримитивна.

§ 41.

Въ теоріи алгебраическаго рѣшенія уравненій представляетъ большую важность разсмотрѣніе группъ подстановокъ возможно высокихъ порядковъ, другими словами, группъ съ возможно малыми индексами

Мы видѣли уже въ § 2, что знакоперемѣнная группа есть единственная съ наименьшимъ послѣ симметрической группы индексомъ 2.

Далѣе очевидно, что подстановки, не мѣняющія одной изъ n буквъ, образуютъ интранзитивную группу, порядокъ которой есть

$$1 . 2 . 3 , \ldots (n-1) ,$$

а индексъ n.

Ruffini, разсматривая главнымъ образомъ уравненія пятой степени, пришелъ къ заключенію, что въ случаѣ пяти буквъ индексъ группы, если онъ больше двухъ, то не меньше пяти.

Cauchy обобщилъ этотъ результатъ и показалъ, что *индексъ группы подстановокъ не можетъ быть въ одно и то же время больше 2 и меньше наибольшаго изъ простыхъ чиселъ, не превосходящихъ n.*

Такимъ образомъ, въ случаѣ *n простого* получается теорема, что *индексъ группы не можетъ заключаться между числами 2 и n.*

Обращаясь къ случаю n составнаго, Cauchy показалъ, что для случая $n=6$ индексъ не можетъ заключаться между числами 2 и 6.

Наконецъ, Bertrand'y удалось доказать окончательно слѣдующую теорему.

Теорема Bertrand'а: *При $n>4$ индексъ группы не можетъ заключаться между числами 2 и n.*

Теорема Bertrand'а получила извѣстность, кромѣ своего значенія въ алгебрѣ, еще по тѣмъ серіознымъ затрудненіямъ, которыя она встрѣтила при своемъ доказательствѣ. Такъ напримѣръ, авторъ ея принужденъ былъ ввести для ея доказательства въ разсмотрѣніе, какъ постулатъ, такое предложеніе теоріи чиселъ:

Если $n>7$, то существуетъ по крайней мѣрѣ одно простое число между $\frac{n}{2}$ и $n-2$.

Постулатъ этотъ былъ лишь впослѣдствіи вполнѣ строго доказанъ Чебышевымъ

Кромѣ приведенной теоремы, укажемъ еще одну теорему, замѣченную Bertrand'омъ.

Теорема: *При $n > 9$ индексъ группы, если онъ больше числа n, то не меньше $2n$.*

Въ 1849 году Serret представилъ Парижской Академіи Наукъ мемуаръ, въ которомъ освободилъ доказательство теоремы Bertrand'а отъ вышеуказаннаго постулата и привелъ рядъ представляющихъ интересъ новыхъ предложеній. Укажемъ здѣсь нѣкоторыя.

I. Если индексъ группы равенъ числу n переставляемыхъ буквъ, то группа состоитъ изъ подстановокъ $n-1$ буквъ. Единственное исключеніе представляетъ случай $n = 6$.

II. Если индексъ группы n буквъ больше $2n$, то онъ не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$, если $n > 12$.

Съ усовершенствованіемъ теоріи группъ доказательство теоремы Bertrand'а было упрощено. Мы приведемъ здѣсь доказательство, помѣщенное въ сочиненіи Weber'а: „Lehrbuch der Algebra" (Grenzen des Index eines Theilers der symmetrischen Permutationsgruppe. Band II, § 36, Seite 143. Zweite Auflage), исправивъ лишь несущественный промахъ [1]), допущенный знаменитымъ авторомъ.

Разобьемъ доказательство теоремы на три части.

Теорема I. *Если $n > 4$, то индексъ импримитивнаго дѣлителя симметрической группы больше n.*

Пусть Q будетъ импримитивный дѣлитель симметрической группы P съ индексомъ j, и пусть всѣ буквы распадаются на r системъ импримитивности по s буквъ въ каждой, такъ что $n = rs$.

Легко получить число, не меньшее порядка группы Q, если пересчитать всевозможныя подстановки, образованныя перемѣщеніемъ буквъ въ каждой изъ r системъ, а также перемѣщеніемъ самихъ системъ. Число такихъ подстановокъ, очевидно, равно

$$(1) \qquad [\Pi(s)]^r \Pi(r),$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что если мы раздѣлимъ порядокъ симметрической группы на число (1), то получимъ число, не большее индекса j, т. е.

$$j > \frac{\Pi(n)}{[\Pi(s)]^r \Pi(r)}.$$

---

[1]) См. статью Д. Граве: *О теоремѣ Bertrand'а* (*Университетскія Извѣстія* (Кіевъ, 1901 г.), или отдѣльный оттискъ оттуда; также: *Протоколы* Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Университетѣ Св. Владиміра за тотъ же годъ).

Покажемъ, что при $n > 4$ это число больше n. Оба числа s и r мы предполагаемъ, конечно, большими единицы, причемъ одно изъ этихъ чиселъ должно быть больше 2. Предполагая $s > 2$, получимъ

$$(2) \qquad \frac{\Pi(n)}{[\Pi(s)]^r\Pi(r)} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots n}{(2\,.\,3\ldots s)^r} =$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{r+1}{2}\,\frac{r+2}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}\right)\left(\frac{2r}{3}\,\frac{2r+1}{3}\cdots\frac{3r-1}{3}\right)\cdots\left(\frac{(s-1)r}{s}\,\frac{(s-1)r+1}{s}\cdots\frac{n-1}{s}\right).$$

Отсюда

$$j > \frac{n}{2}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1}\left(\frac{2r}{3}\right)^r\cdots\left(\frac{(s-1)r}{s}\right)^r.$$

Всѣ множители

$$\frac{r+1}{2}\,,\ \frac{2r}{3}\ldots\frac{(s-1)r}{s}$$

больше единицы.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{r+1}{2} > 1\,,$$

ибо $r > 1$, а вычитая единицу изъ каждаго слѣдующаго числа $\frac{(h-1)r}{h}$, получимъ число

$$\frac{(h-1)r}{h} - 1 = \frac{(h-1)r - h + 1 - 1}{h} = \frac{(h-1)(r-1) - 1}{h}$$

положительное, такъ какъ

$$r > 1\,,\quad h > 2\,.$$

При $r > 2$ имѣемъ

$$\left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1} > 2$$

и, слѣдовательно,

$$j > \frac{n}{2}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1} > \frac{n}{2}\,.\,2\,,$$

т. е. $j > n$.

Если $r = 2$, то

$$\left(\frac{r+1}{2}\right)^{r-1}\left(\frac{2r}{3}\right)^r = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} > 2$$

Слѣдовательно, также выходитъ, что $j > n$.

Если $s = 2$, а $r > 2$, то тогда

$$j > \frac{n}{2}\left(\frac{r+1}{2}\,\frac{r+2}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}\right).$$

Слѣдовательно, можно взять два первыхъ множителя; такимъ образомъ получаемъ

$$i > \frac{n(n+1)}{4},$$

т. е. $i > n$.

Случай $n=4$, $r=2$, $s=2$ даетъ исключеніе, именно,

$$\frac{\Pi(n)}{[\Pi(s)]^r\Pi(r)} = \frac{1.2.3.4}{(1.2)^2.1.2} = 3.$$

Въ самомъ дѣлѣ, группа, указанная въ пунктѣ с) § 26, есть какъ разъ импримитивная группа четырехъ буквъ восьмого порядка, имѣющая, слѣдовательно, индексъ 3. Эта группа, очевидно, импримитивная, съ системами импримитивности

$$1, 2$$

$$3, 4.$$

Теорема II. *Индексъ интранзитивнаго дѣлителя симметрической группы равенъ или больше n, причемъ онъ равенъ n, когда дѣлитель не перемѣщаетъ одной буквы и состоитъ изъ всѣхъ подстановокъ остальныхъ $n-1$ буквъ.*

Если группа Q интранзитивна, то можно разбить всѣ буквы на двѣ системы одну изъ a буквъ, другую изъ b буквъ, такъ что

$$a+b=n,$$

притомъ такихъ, что буквы одной системы не могутъ быть подстановками группы Q замѣнены буквами другой. Ясно, что всѣ подстановки группы Q должны заключаться между подстановками, перемѣщающими отдѣльно буквы этихъ системъ. Слѣдовательно, порядокъ Q не можетъ превосходить числа

$$\Pi(a)\Pi(b).$$

Значитъ,

$$i \geqq \frac{\Pi(n)}{\Pi(a)\Pi(b)} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{b+1}{a}.$$

Индексъ i можетъ равняться n только въ случаѣ $a=1$, что очевидно.

Если оба числа a и b отличны отъ единицы, то, предполагая $b \geqq a$, замѣтимъ, что всѣ числа

$$\frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3},\ \ldots,\ \frac{b+1}{a}$$

больше единицы, и, слѣдовательно, получаемъ:

$$j > n.$$

Теорема III. *Если $a = 1$, такъ что группа Q не перемѣщаетъ одну букву, то ея порядокъ есть дѣлитель числа $\Pi(n-1)$. Если же $a > 1$, то порядокъ Q равенъ или меньше $\Pi(n-2)\Pi(2)$.*

Первая часть теоремы очевидна изъ того соображенія, что всякая группа, перемѣщающая $n-1$ буквъ, должна быть дѣлителемъ симметрической группы этихъ буквъ.

Вторая же часть теоремы слѣдуетъ изъ того, что биноміальные коэффиціенты возрастаютъ по мѣрѣ приближенія къ среднему члену разложенія и, слѣдовательно,

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(a)\Pi(b)} \geqq \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-2)\Pi(2)},$$

что даетъ неравенство

$$j \geqq \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-2)\Pi(2)},$$

или, окончательно,

$$\frac{\Pi(n)}{j} \leqq \Pi(n-2)\Pi(2),$$

что и требовалось доказать.

Теорема IV. *Кромѣ знакоперемѣнной группы, не существуетъ транзитивнаго и примитивнаго дѣлителя Q симметрической группы, индексъ котораго не больше n. Единственное исключеніе представляетъ случай $n = 6$.*

Пусть будетъ Q примитивный и транзитивный дѣлитель индекса j симметрической группы цифръ

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots\ n-1,$$

предполагая $j > 2$.

На основаніи сказаннаго въ § 28, можно симметрическую группу разбить на j сопряженныхъ системъ

(3) $$Q,\ QT_1,\ QT_2,\ \ldots,\ QT_{j-1},$$

причемъ знакомъ QT_i мы обозначаемъ совокупность подстановокъ, получающихся отъ умноженія подстановокъ группы Q справа на T_i.

Если группа Q примитивная и транзитивная, то она не можетъ заключать ни одной транспозиціи (см. § 39)

(4) $$(0,\ 1),\ (0,\ 2),\ \ldots\ (0,\ n-1)$$

Если $j < n$, то по крайней мѣрѣ двѣ транспозиціи, напримѣръ $(0, 1)$ и $(0, 2)$, должны входить въ одну изъ системъ (3), напримѣръ въ систему QT_1. Значитъ, въ группѣ Q должны быть двѣ подстановки S_1, S_2, дающія $S_1T_1 = (0, 1)$ и $S_2T_1 = (0, 2)$.

Отсюда получаемъ

$$S_1T_1T_1^{-1}S_2^{-1} = (0, 1)(0, 2),$$

или, иначе,

$$S_1S_2^{-1} = (0, 1, 2).$$

Итакъ, группа Q должна заключать тройной циклъ, что невозможно, если она не заключаетъ знакоперемѣнной группы (см. § 40).

Разсмотримъ теперь случай $j = n$ и покажемъ, что онъ невозможенъ для всякаго n, кромѣ $n = 6$.

При $j = n$ порядокъ группы Q, если она существуетъ, долженъ быть

$$\Pi(n-1)$$

Тогда $n-1$ транспозиціи (4) должны входить по одной въ различныя системы

$$QT_1,\ QT_2,\ QT_3, \ldots, QT_{n-1}$$

и симметрическую группу можно представить, какъ совокупность системъ

$$Q,\ Q(0, 1),\ Q(0, 2), \ldots, Q(0, n-1),$$

ибо за подстановки

$$T_1,\ T_2, \ldots, T_{n-1}$$

можно будетъ принять транспозиціи (4).

Разсмотримъ теперь какую нибудь новую транспозицію, напримѣръ $(2, 3)$. Эта транспозиція, очевидно, не можетъ входить въ системы

$$Q(0, 2),\ Q(0, 3),$$

ибо въ обратномъ случаѣ группа Q заключала бы тройные циклы

$$(0, 2)(2, 3).\ (0, 3)(2, 3).$$

Не нарушая общности, можно предположить, что транспозиція $(2, 3)$ входитъ въ систему $Q(0, 1)$, а значитъ въ группу Q входитъ подстановка

$$(0, 1)(2, 3).$$

Разсмотримъ дѣлителя Q_0 группы Q, образованнаго подстановками, не перемѣщающими цифры 0.

Такъ какъ группа Q транзитивна, то въ ней заключаются подстановки

$$S_1, S_2, \ldots, S_{n-1},$$

замѣняющія цифру 0 послѣдовательно цифрами

$$1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Нетрудно видѣть, что группа Q должна состоять изъ слѣдующей системы

$$Q_0, Q_0 S_1, Q_0 S_2, \ldots, Q_0 S_{n-1}.$$

Итакъ, порядокъ g группы Q_0 получается отъ дѣленія на n порядка Q, т. е.

$$g = \frac{\Pi(n-1)}{n}.$$

Такъ какъ порядокъ всякой группы есть цѣлое число, то должно дѣлиться на n произведеніе $\Pi(n-1)$, а потому мы прійдемъ къ противорѣчію въ случаѣ, когда n число простое или равно 4.

Итакъ, мы должны предполагать n не меньше 6. Покажемъ, что группа Q_0 должна быть транзитивною относительно цифръ

$$1, 2, \ldots, n-1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное, т. е., что группа Q_0 интранзитивная, мы получимъ одно изъ двухъ (см. теорему III): или $\Pi(n-2)$ дѣлится на g, или

$$\Pi(n-3)\Pi(2) \geqslant g.$$

Отсюда получаемъ, что или должно равняться цѣлому числу число

$$\frac{\Pi(n-2)}{\frac{\Pi(n-1)}{n}} = \frac{n}{n-1},$$

или же

$$n^2 - 5n + 2 \leqslant 0.$$

При $n > 5$ оба предположенія невозможны.

Итакъ, группа Q_0 должна быть транзитивною относительно сказанныхъ буквъ.

Разсмотримъ дѣлителя $Q_{0,1}$ группы Q, не перемѣщающаго двухъ цифръ

$$0, 1.$$

Такъ какъ Q_0, разсматриваемая, какъ группа отъ $n-1$ цифръ, есть транзитивный дѣлитель Q, то, примѣняя разсужденія, подобныя приведеннымъ выше, получаемъ, что порядокъ g_1 дѣлителя $Q_{0,1}$ равенъ $\frac{g}{n-1}$, т. е.

$$g_1 = \frac{\Pi(n-2)}{n}.$$

Покажемъ, что группа $Q_{0,1}$ транзитивная относительно буквъ

$$2, 3, \ldots, n-1.$$

Если бы это было не такъ, то имѣло бы мѣсто одно изъ двухъ: или $\Pi(n-3)$ дѣлится на g_1, или же

$$g_1 \leqq \Pi(n-4)\Pi(2).$$

Первое предположеніе невозможно при $n>4$; второе же неравенство даетъ

$$n^2-7n+6 \leqq 0,$$

что невозможно при $n>6$.

Въ случаѣ $n=6$ противорѣчіе отсутствуетъ.

Разсмотримъ теперь дѣлитель $Q_{0,1,2}$ группы Q, который не перемѣщаетъ трехъ элементовъ

$$0, 1, 2.$$

Его порядокъ есть

$$g_2 = \frac{\Pi(n-3)}{n}.$$

При $n=6$

$$g_2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$$

и группа $Q_{0,1,2}$ сводится къ тождественной подстановкѣ.

Оставляя пока въ сторонѣ случай $n=6$ и предполагая, слѣдовательно, $n>6$, замѣтимъ, что $Q_{0,1,2}$ не можетъ не перемѣщать какой нибудь четвертый элементъ, напримѣръ 3; если бы это было такъ, то его порядокъ долженъ былъ бы дѣлить число

$$\Pi(n-4),$$

т. е. должно было бы быть цѣлымъ число

$$\frac{n\Pi(n-4)}{\Pi(n-3)}.$$

Другими словами,

$$\binom{n}{3}_n > 2, \; n \leq 6,$$

что противорѣчитъ предположенію.

Итакъ, мы видимъ, что при $n > 6$ въ группу Q должна входить подстановка S, переводящая элементы 0, 1, 2, 3 въ элементы 0, 1, 2, 4, гдѣ 4 есть отличный отъ 3 элементъ. Группа Q, какъ мы видѣли, имѣетъ подстановку $(0, 1)(2, 3)$; слѣдовательно, она должна будетъ также заключать подстановку

$$S^{-1}(0, 1)(2, 3)S = (0, 1)(2, 4),$$

а потому въ группѣ Q должна заключаться слѣдующая подстановка

$$(0, 1)(2, 3)(0, 1)(2, 4) = (2, 3, 4),$$

что невозможно.

Итакъ, теорема наша доказана для всѣхъ случаевъ, кромѣ $n = 6$.

Нетрудно убѣдиться, что при $n = 6$ теорема несправедлива, и что *существуетъ примитивный и транзитивный дѣлитель симметрической группы шести элементовъ, имѣющій индексъ 6 и порядокъ 120.*

Въ самомъ дѣлѣ, этотъ дѣлитель можетъ быть образованъ слѣдующимъ образомъ. Беремъ три основныя подстановки

$$U = (0, 1, 2, 3)$$
$$V = (0, 4, 2, 3, 1)$$
$$W = (0, 4, 1, 2, 3, 5);$$

тогда подстановки вида

$$U^i V^j W^k,$$

гдѣ i, j, k всевозможныя цѣлыя числа, образуютъ требуемую группу.

О нормальныхъ дѣлителяхъ группъ.

§ 42.

Въ § 19 мы видѣли, что подстановка

$$S_1 = T^{-1}ST$$

подобна подстановкѣ S и получается черезъ производство въ циклахъ подстановки S измѣненія буквъ, указаннаго подстановкою T. Будемъ говорить, что подстановка S_1 есть *преобразованіе подстановки S при помощи T.*

§ 43.

Разсмотримъ группу H, состоящую изъ подстановокъ

(1) $$1, S_1, S_2, \ldots, S_{\mu-1}$$

и пусть группа H есть дѣлитель другой группы G порядка m, причемъ, очевидно,

$$m = \mu\nu,$$

гдѣ ν нѣкоторое цѣлое число.

Возьмемъ какую нибудь подстановку T группы G, не входящую въ составъ дѣлителя H. Преобразуемъ при помощи T всѣ подстановки (1), получаемъ тогда подстановки

(2) $$1, T^{-1}S_1T, T^{-1}S_2T, \ldots, T^{-1}S_{\mu-1}T$$

Нетрудно видѣть, что *подстановки* (2) *образуютъ также группу*, ибо имѣемъ равенство

$$(T^{-1}S_iT)(T^{-1}S_jT) = T^{-1}(S_iS_j)T.$$

Группу (2) мы будемъ называть *преобразованіемъ группы H при помощи подстановки T* и обозначать для сокращенія знакомъ

$$T^{-1}HT.$$

§ 44.

Двѣ группы одного порядка

$$1, S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$$

и

$$1, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{m-1}$$

мы будемъ называть *изоморфными*, если возможно такимъ образомъ сопоставить элементы одной группы элементамъ другой, что всякому соотношенію

(1) $$S_iS_k = S_l$$

подстановокъ одной группы соотвѣтствуетъ подобное же соотношеніе

(2) $$\Sigma_i\Sigma_k = \Sigma_l$$

для другой съ тѣми же индексами

$$i, k, l.$$

Очевидно, что *группы H и $T^{-1}HT$* предыдущаго §-а *изоморфны*.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая

$$\Sigma_1 = T^{-1}ST,$$

мы замѣтимъ, что равенству (1) будетъ соотвѣтствовать равенство (2).

§ 45.

Будемъ называть группу $T^{-1}HT$, которая есть, очевидно, также дѣлитель группы G, *сопряженнымъ съ H дѣлителемъ*. Выбирая за T всевозможныя подстановки группы G, получимъ всевозможные сопряженные съ H дѣлители.

Если всѣ сопряженные съ H дѣлители группы G совпадаютъ съ самимъ дѣлителемъ H, то группа H называется *нормальнымъ дѣлителемъ* [1]).

§ 46.

Приведемъ примѣры нормальныхъ дѣлителей:

a) Нетрудно видѣть, что *знакоперемѣнная группа есть нормальный дѣлитель симметрической*.

Въ самомъ дѣлѣ, будемъ преобразовывать знакоперемѣнную группу при помощи произвольной подстановки T. Такъ какъ, при преобразованіи каждой подстановки S знакоперемѣнной группы, число цикловъ и ихъ порядки не мѣняются, то послѣ преобразованія подстановка S превращается въ другую подстановку S_1, принадлежащую той же знакоперемѣнной группѣ (см. § 33).

b) Разсмотримъ теперь дѣлитель H группы G, не совпадающій съ сопряженными дѣлителями

(1) $$H_1, H_2, \ldots$$

Нетрудно убѣдиться, что *подстановки, общія всѣмъ сопряженнымъ дѣлителямъ*

$$H, H_1, H_2 \ldots$$

образуютъ группу R, которая будетъ нормальнымъ дѣлителемъ группы G.

Возьмемъ произвольную подстановку T группы G; тогда въ рядъ группъ

(2) $$T^{-1}HT, T^{-1}H_1T, T^{-1}H_2T, \ldots$$

входятъ только группы (1).

---

[1]) Нѣкоторые авторы называютъ нормальные дѣлители *инваріантными подгруппами*.

Общія подстановки ряда группъ (2), очевидно, будутъ образовывать группу

$$T^{-1}RT.$$

Но такъ какъ рядъ (2) образованъ тѣми же самыми группами (1), то должно быть

$$R = T^{-1}RT,$$

т. е. группа R есть нормальный дѣлитель, ибо T есть произвольная подстановка группы G.

Конечно, общій дѣлитель R сопряженныхъ группъ (1) можетъ приводиться въ единицѣ, которая, очевидно, является нормальнымъ дѣлителемъ всякой группы

§ 47.

Будемъ называть группу *простою*, если она не имѣетъ нормальныхъ дѣлителей, отличныхъ отъ единицы и самой себя, и *составною*, если она имѣетъ нормальныхъ дѣлителей.

Группа простого порядка, очевидно, *простая.*

Симметрическая группа при всякомъ числѣ перемѣщаемыхъ буквъ *составная*, ибо у нея всегда имѣется въ качествѣ нормальнаго дѣлителя знакоперемѣнная группа

§ 48.

Разсмотримъ симметрическую группу трехъ элементовъ

$$0, 1, 2.$$

Эта группа состоитъ, очевидно, изъ подстановокъ

$$1. (0, 1), (0, 2). (1. 2), (0, 1, 2), (0, 2, 1)$$

и имѣетъ нормальнымъ дѣлителемъ знакоперемѣнную

$$1, (0, 1, 2), (0, 2, 1),$$

которая, будучи простого порядка. есть простая.

§ 49

Разсмотримъ теперь симметрическую группу четырехъ элементовъ $0, 1, 2, 3$:

$$1, (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2). (1, 3), (2, 3)$$

$$(0, 1)(2, 3), (0, 2)(1, 3), (0, 3)(1, 2)$$

$$(0, 1, 2), (0, 2, 1); (0, 1, 3), (0, 3, 1); (0, 2, 3), (0, 3, 2); (1, 2, 3), (1, 3, 2)$$

$$(0, 1, 2, 3), (0, 3, 2, 1); (0, 1, 3, 2), (0, 2, 3, 1); (0, 2, 1, 3), (0, 3, 1, 2).$$

Знакоперемѣнная группа состоитъ изъ двѣнадцати подстановокъ

$$1,\ (0,\ 1)(2,\ 3),\ (0,\ 2)(1,\ 3),\ (0,\ 3)(1,\ 2)$$

$$(0,\ 1,\ 2),\ (0,\ 2,\ 1);\ (0,\ 1,\ 3),\ (0,\ 3,\ 1);\ (0,\ 2,\ 3),\ (0,\ 3,\ 2);\ (1,\ 2\ 3),\ (1,\ 3,\ 2).$$

Нетрудно видѣть, что эта группа имѣетъ нормальнаго дѣлителя съ индексомъ 3

$$1,\ (0,\ 1)(2,\ 3),\ (0,\ 2)(1,\ 3),\ (0,\ 3)\ (1,\ 2).$$

Эта группа въ свою очередь имѣетъ нормальнымъ дѣлителемъ индекса 2 группу

$$1,\ (0,\ 1)(2,\ 3),$$

которая, будучи второго порядка, будетъ простою.

§ 50.

Покажемъ теперь, *что при числѣ элементовъ большемъ четырехъ знакоперемѣнная группа есть группа простая.*

Пусть Q будетъ нормальный дѣлитель знакоперемѣнной группы n элементовъ $1, 2, 3 \dots n$.

Покажемъ прежде всего, что при $n > 4$ группа Q *не можетъ заключать* подстановки, состоящей изъ одиночнаго тройного цикла. Допустимъ обратное, а именно, что въ группѣ Q есть подстановка $(1\ 2\ 3)$; тогда въ ней будетъ заключаться всякій тройной циклъ (abc), ибо на основаніи § 37 знакоперемѣнная группа $n-2$ разъ транзитивная и, слѣдовательно, при $n > 4$ *три* элемента 1 2 3 могутъ обратиться въ *три* произвольно выбранные. Значитъ въ знакоперемѣнной группѣ существуетъ подстановка, переводящая 1 2 3 въ abc. Пусть эта подстановка будетъ

$$s = \begin{pmatrix} a & b & c & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Въ нормальномъ дѣлителѣ Q должна входить подстановка $s^{-1}(1\ 2\ 3)s = (a\ b\ c)$, другими словами, въ Q входитъ произвольный тройной циклъ и, значитъ, Q совпадаетъ съ самой знакоперемѣнною группой, что противорѣчитъ предположенію.

Дальнѣйшее доказательство несуществованія при $n > 4$ нормальнаго дѣлителя Q знакоперемѣнной группы можетъ быть произведено такъ. Допустимъ обратное, а именно, что существуетъ нормальный дѣлитель Q знакоперемѣнной группы, отличный отъ нея самой и единицы.

Пусть S будетъ одна изъ входящихъ въ него подстановокъ, а T произвольно взятая подстановка знакоперемѣнной группы. Въ группу Q

должны будутъ входить обѣ подстановки S и $T^{-1}ST$, а, слѣдовательно, и подстановка

$$U = S^{-1}T^{-1}ST.$$

Мы докажемъ невозможность существованія нормально дѣлителя Q, показавъ, что можно подобрать подстановки S и T такимъ образомъ, чтобы U обращалась въ тройной циклъ, ибо по выше доказанному группа Q не должна заключать тройныхъ цикловъ.

Для сказаннаго подбора подстановокъ S и T предположимъ, что онѣ разложены на циклы. Мы имѣемъ право обращать наше вниманіе только на тѣ циклы, буквы которыхъ измѣняются подстановкой T, ибо остальные циклы уничтожаются въ произведенія подстановокъ $S^{-1}S$.

Разсмотримъ всѣ возможные различные случаи:

1) S содержитъ циклъ болѣе, чѣмъ изъ трехъ элементовъ.

Напримѣръ, $S = (1\ 2\ 3\ 4 \ldots m)(\ \ )(\ldots)\ldots$

Возьмемъ $T = (1\ 2\ 3)$, тогда $S^{-1}T^{-1}S = S^{-1}(1\ 3\ 2)S = (2\ 4\ 3)$. Значитъ, $U = (2\ 4\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 4)$. Итакъ, приходимъ къ противорѣчію, а именно, что дѣлитель Q долженъ заключать тройной циклъ $U = (1\ 2\ 4)$.

2) Въ S входятъ два тройныхъ цикла. $S = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)\ldots$ Возьмемъ $T = (1\ 3\ 4)$. Въ этомъ случаѣ $S^{-1}T^{-1}S = S^{-1}(1\ 4\ 3)S = (2\ 5\ 1)$ и, значитъ, $U = (2\ 5\ 1)(1\ 3\ 4) = (1\ 2\ 5\ 3\ 4)$

Итакъ, въ группѣ Q оказывается подстановка, заключающая циклъ болѣе, чѣмъ изъ трехъ буквъ. Эту подстановку можно принять за S, причемъ тогда получимъ предыдущій случай.

3) Подстановка S заключаетъ только одинъ тройной циклъ, остальные же циклы двойные и одиночные.

Очевидно, что квадратъ такой подстановки сводится къ тройному циклу

4) Циклы подстановки S только двойные и одиночные; число двойныхъ цикловъ не можетъ равняться единицѣ, ибо въ этомъ случаѣ подстановка S есть нечто иное, какъ транспозиція двухъ только буквъ, которая не можетъ входить въ составъ знакоперемѣнной группы.

Остается разсмотрѣть при $n > 4$ два случая.

α) Въ S входятъ только двойные циклы, число которыхъ, слѣдовательно, больше двухъ

$$S = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)\ldots$$

Возьмемъ $T = (1\ 3\ 5)$. Получаемъ $S^{-1}T^{-1}S = S^{-1}(1\ 5\ 3)S = (2\ 6\ 4)$, откуда $U = (2\ 6\ 4)(1\ 3\ 5)$ и, слѣдовательно, приходимъ къ случаю II

β) Въ S входитъ по крайней мѣрѣ одинъ одиночный циклъ

$$S = (1\ 2)(3\ 4)(5)\ldots$$

Возьмемъ $T = (1\ 2\ 5)$. Получаемъ $S^{-1}T^{-1}S = S^{-1}(1\ 5\ 2)S = (2\ 5\ 1)$. Откуда $U = (2\ 5\ 1)(1\ 2\ 5) = (1\ 2\ 5)^2 = (1\ 5\ 2)$, что невозможно.

Итакъ, при $n > 4$ мы исчерпали всѣ случаи, и всѣ они приводятъ къ противорѣчію; слѣдовательно, высказанная теорема справедлива.

Случай $n = 4$ представляетъ исключеніе, ибо тогда возможна комбинація для подстановки S, состоящая изъ двухъ транспозицій. Въ этомъ случаѣ существуетъ нормальный дѣлитель

$$1,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3).$$

§ 51.

Покажемъ теперь, что *при $n > 4$ симметрическая группа не имѣетъ отличнаго отъ знакоперемѣнной нормальнаго дѣлителя.*

Пусть P будетъ симметрическая группа, а Q знакоперемѣнная группа. Допустимъ, что симметрическая группа имѣетъ нормальнаго дѣлителя R, отличнаго отъ Q. Нетрудно убѣдиться, что общій наибольшій дѣлитель группъ R и Q не можетъ быть отличенъ отъ единицы.

Допустимъ, что этотъ общій дѣлитель W (образующій, очевидно, группу) отличенъ отъ единицы, тогда онъ долженъ быть нормальнымъ дѣлителемъ знакоперемѣнной группы Q, что невозможно при $n > 4$. Въ самомъ дѣлѣ, любая подстановка S группы W отъ преобразованія любою подстановкой группы P обращается въ подстановку, съ одной стороны принадлежащую къ группѣ Q, ибо Q нормальный дѣлитель P, съ другой стороны, обращается въ подстановку группы R, ибо R также нормальный дѣлитель. Другими словами, подстановка S переходитъ въ подстановку изъ того же общаго дѣлителя. Итакъ W будетъ нормальнымъ дѣлителемъ какъ для P, такъ и для Q

Итакъ, нормальный дѣлитель R симметрической группы, отличный отъ знакоперемѣнной, можетъ имѣть съ нею общею подстановкой только единицу; слѣдовательно, всѣ другія его подстановки принадлежатъ ко второму роду (см. § 22).

Возьмемъ двѣ какія нибудь подстановки S_1 и S_2 группы R, отличныя отъ единицы. Тогда двѣ подстановки S_1^2 и S_1S_2, съ одной стороны, должны входить въ группу R, съ другой стороны, будучи подстановками перваго рода, обѣ онѣ должны обращаться въ единицу и, слѣдовательно, получается равенство $S_1^2 = S_1S_2$ или $S_1 = S_2$.

Другими словами, всѣ остальныя подстановки группы R должны быть равны между собой; слѣдовательно, группа R должна быть второго порядка и, кромѣ единицы, должна заключать только одну подстановку S. Такъ какъ по предположенію группа R нормальный дѣлитель симметри-

ческой группы, то отъ преобразованія всякой подстановкой T подстановка S не должна мѣняться, что невозможно.

Въ самомъ дѣлѣ, подстановка S, будучи второго порядка, должна разлагаться на циклы второго порядка, изъ которыхъ одинъ пусть будетъ (12). Если число буквъ больше двухъ, то существуетъ подстановка, преобразующая циклъ (12) въ новый (13) и, слѣдовательно, преобразованная подстановка не можетъ равняться первоначальной."

Связь подстановокъ съ общею теоріей группъ.

§ 52

Обратимся къ разсмотрѣнію нѣкоторой абстрактной группы P порядка n, образованной элементами

(1) $$1 = A_0, A_1, A_2, \ldots A_n.$$

Разсмотримъ совокупность PA_i. Эта совокупность, какъ извѣстно, тождественна съ самой группой и можетъ отличаться отъ нея только порядкомъ расположенія элементовъ. Разсмотримъ подстановку n буквъ A съ различными индексами

$$\begin{pmatrix} A_i & A_1A_i & A_2A_i & \ldots & A_{n-1}A_i \\ A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_{n-1} \end{pmatrix},$$

дающую новое перемѣщеніе элементовъ (1). Будемъ эту подстановку обозначать для краткости знакомъ

$$\begin{pmatrix} PA_i \\ P \end{pmatrix}$$

Подстановки

(2) $$1, \begin{pmatrix} PA_1 \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} PA_2 \\ P \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} PA_{n-1} \\ P \end{pmatrix}$$

образуютъ, очевидно, группу, ибо

$$\begin{pmatrix} PA_i \\ P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} PA_k \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA_i \\ P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} PA_iA_k \\ PA_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA_iA_k \\ P \end{pmatrix}.$$

Изъ сопоставленія крайнихъ частей послѣдняго равенства слѣдуетъ, что группа подстановокъ (2) однозначно изоморфна съ группой элементовъ (1). Получаемъ такимъ образомъ теорему.

Всякая абстрактная группа порядка n однозначно изоморфна съ нѣкоторой транзитивной группой подстановокъ n буквъ

Транзитивность группы (2) слѣдуетъ изъ того соображенія, что всегда можно указать такой элементъ A_t, при которомъ произведеніе $A_t A_i$ обратится въ новый элементъ A_l.

Весьма важнымъ является вопросъ о нахожденіи для группы даннаго порядка изоморфной транзитивной группы подстановокъ возможно меньшаго числа буквъ.

§ 53.

Очевидно, что всякую группу подстановокъ можно разсматривать какъ нѣкоторое линейное преобразованіе. Напримѣръ подстановку

$$(x_1 x_3 x_2)(x_4 x_5)$$

можно разсматривать какъ линейное преобразованіе буквъ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 въ такія новыя x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', причемъ существуетъ преобразованіе

$$\begin{aligned}
x_1' &= \ldots x_3 \ldots \\
x_2' &= x_1 \quad \ldots \\
x_3' &= \ldots x_2 \ldots \\
x_4' &= \ldots \quad x_5 \\
x_5' &= \ldots x_4
\end{aligned}$$

съ матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель матрицы подобнаго преобразованія всегда равенъ ± 1.

§ 54.

Уравненіе

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} - x, & a_2^{(1)} & , \ldots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & , a_2^{(2)} - x, & \ldots & a_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n)} & , a_2^{(n)} & , \ldots & a_n^{(n)} - x \end{vmatrix} = 0,$$

получающееся отъ вычисленія неизвѣстнаго x изъ всѣхъ элементовъ глав-

ной діагонали опредѣлителя матрицы $|a_i^{(k)}|$ носитъ названіе *характеристическаго* уравненія [1]) матрицы $\| a_i^{(k)} \|$.

Нетрудно убѣдиться, что, если мы представимъ подстановку S въ циклахъ

$$S = C_1^{(k_1)} C_2^{(k_2)} \dots C_e^{(k_e)},$$

гдѣ верхній значекъ k_i указываетъ порядокъ цикла $C_i^{(k_i)}$, то характеристическое уравненіе соотвѣтствующей матрицы будетъ имѣть видъ

$$(x^{k_1}-1)(x^{k_2}-1)\dots(x^{k_e}-1)=0.$$

Напримѣръ, для матрицы § 53 получаемъ

$$\begin{vmatrix} x, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & -x, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -x, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & x, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & -x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -(x^3-1)(x^2-1).$$

---

[1]) См. Д. Граве Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Кіевъ. 1913. Глава XIII, § 27.

ГЛАВА VI

Основы исчисленія инваріантовъ.

Геометрическіе инваріанты.

§ 1.

Теорія инваріантовъ есть та часть алгебры, которая развилась подъ непосредственнымъ вліяніемъ геометріи, а потому мы придадимъ нашему изложенію также геометрическій характеръ.

§ 2.

Разсмотримъ въ трехмѣрномъ пространствѣ движеніе нѣкоторой неизмѣняемой фигуры. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, это движеніе можно указать, какъ преобразованіе прямоугольныхъ координатъ

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x' &= a + \alpha x + \beta y + \gamma z \\
y' &= b + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\
z' &= c + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z\,,
\end{aligned}
$$

гдѣ a, b, c суть координаты новаго начала, а девять косинусовъ α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 связаны шестью соотношеніями

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= 1\,, & \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= 0\,, \\
\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 &= 1\,, & \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 &= 0\,, \\
\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= 1\,, & \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= 0\,,
\end{aligned}
\qquad
\begin{vmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma \\ \alpha_1\,, & \beta_1\,, & \gamma_1 \\ \alpha_2\,, & \beta_2\,, & \gamma_2 \end{vmatrix} = 1\,.
$$

Движенія въ пространствѣ, очевидно, образуютъ безконечную группу, если подъ композиціей движеній мы будемъ понимать выполненіе этихъ

движеній одного за другимъ въ извѣстномъ порядкѣ. Единицей этой группы будетъ *покой*, т. е. отсутствіе движенія. Обратнымъ элементомъ явится обратное движеніе, переводящее фигуру изъ ея конечнаго положенія въ первоначальное.

§ 3.

Существуетъ рядъ свойствъ фигуръ, не измѣняющихся при движеніи; эти свойства можно назвать *инваріантами* группы движеній.

Къ числу инваріантовъ движенія принадлежатъ, такъ напримѣръ, два основныхъ: разстояніе каждыхъ двухъ точекъ движущейся фигуры и уголъ между двумя прямыми.

Если свойство неизмѣнности указанныхъ *геометрическихъ инваріантовъ* перевести на языкъ алгебры, то мы получимъ *алгебраическіе инваріанты*, т. е. формулы, не мѣняющіяся при преобразованіяхъ вида (1) § 2.

Формулы (1) § (2) преобразуютъ координаты (x, y, z) въ (x', y', z'). Если мы разсмотримъ другую точку (x_0, y_0, z_0), переходящую отъ движенія въ точку (x_0', y_0', z_0'), то на основаніи (1) § 2 получимъ

$$x'-x_0'=\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)$$
$$y'-y_0'=\alpha_1(x-x_0)+\beta_1(y-y_0)+\gamma_1(z-z_0)$$
$$z'-z_0'=\alpha_2(x-x_0)+\beta_2(y-y_0)+\gamma_2(z-z_0);$$

возвышая въ квадратъ и складывая, будемъ имѣть

$$(x'-x_0')^2+(y'-y_0')^2+(z'-z_0')^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$

что показываетъ, что формула

$$+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

выражающая разстояніе двухъ точекъ, есть инваріантъ

Возьмемъ двѣ прямыхъ линіи въ пространствѣ

$$(1)\qquad \frac{x-\xi}{l}=\frac{y-\eta}{m}=\frac{z-\zeta}{n};\quad \frac{x-\xi_1}{l_1}=\frac{y-\eta_1}{m_1}=\frac{z-\zeta_1}{n_1};$$

косинусъ угла между ними выражается по формулѣ

$$(2)\qquad \frac{ll_1+mm_1+nn_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};$$

легко провѣрить, что эта формула есть дѣйствительно инваріантъ преобразованія (1) § 2.

Отъ преобразованія прямыя (1) переходятъ въ такія

$$\frac{x'-\xi'}{l'}=\frac{y'-\eta'}{m'}=\frac{z'-\zeta'}{n'}; \quad \frac{x'-\xi_1'}{l_1'}=\frac{y'-\eta_1'}{m_1'}=\frac{z'-\zeta'}{n_1},$$

гдѣ новые угловые коэффиціенты связаны съ первоначальными при помощи равенствъ

$$\rho l'=\alpha l+\beta m+\gamma n\ ,\quad \rho_1 l_1'=\alpha l_1+\beta m_1+\gamma n_1$$

$$\rho m'=\alpha_1 l+\beta_1 m+\gamma_1 n\ ,\quad \rho_1 m'=\alpha_1 l_1+\beta_1 m_1+\gamma_1 n_1$$

$$\rho n'=\alpha_2 l+\beta_2 m+\gamma_2 n\ ,\quad \rho_1 n_1'=\alpha_2 l_1+\beta_2 m_1+\gamma_2 n_1\ ,$$

гдѣ ρ и ρ_1 произвольные множители.

Послѣ простыхъ преобразованій, принимая во вниманіе формулы (2) § 2, получимъ

$$\rho\rho_1(l'l_1'+m'm_1'+n'n_1')=ll_1+mm_1+nn_1$$

$$\rho\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

$$\rho_1\sqrt{l_1'^2+m_1'^2+n_1'^2}=\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}\ ,$$

откуда окончательно

$$\frac{l'l_1'+m'm_1'+n'n_1'}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}\sqrt{l_1'^2+m_1'^2+n_1'^2}}=\frac{ll_1+mm_1+nn_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.$$

Итакъ, мы видимъ, что формула (2) есть инваріантъ.

§ 4.

Разсмотримъ теперь общее проективное преобразованіе однородныхъ координатъ трехмѣрнаго пространства [1])

$$(1)\qquad \begin{aligned} x'&=ax+by+cz+\partial u\\ y'&=a_1x+b_1y+c_1z+\partial_1 u\\ z'&=a_2x+b_2y+c_2z+\partial_2 u\\ u'&=a_3x+b_3y+c_3z+\partial_3 u \end{aligned}$$

---

[1]) См. Д. Граве. Основы аналитической геометріи. Часть II, геометрія въ пространствѣ 1913 (литографія).

съ неравнымъ нулю опредѣлителемъ

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} a , & b , & c , & d \\ a_1 , & b_1 , & c_1 , & d_1 \\ a_2 , & b_2 , & c_2 , & d_2 \\ a_3 , & b_3 , & c_3 , & d_3 \end{vmatrix} ,$$

который мы будемъ называть *модулемъ* преобразованія.

Линейное преобразованіе (1) мы будемъ называть *особеннымъ*, если опредѣлитель ε равенъ нулю и *неособеннымъ* въ обратномъ случаѣ.

Очевидно, что неособенныя проективныя преобразованія образуютъ группу, ибо послѣдовательное примѣненіе двухъ преобразованій равносильно одному также проективному преобразованію, какъ это мы видѣли въ § 20 Глава IV. Единицей группы является тождественное преобразованіе.

$$x' = x , \; y' = y , \; z' = z , \; u' = z ,$$

имѣющее матрицу

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Обратнымъ элементомъ группы является преобразованіе новыхъ перемѣнныхъ x', y', z', u' въ первоначальныя x, y, z, u. Это преобразованіе получается черезъ рѣшеніе четырехъ уравненій (1) относительно четырехъ неизвѣстныхъ x, y, z, u.

Назовемъ проективнымъ такое свойство фигуръ, которое не нарушается при проективномъ преобразованіи.

Къ числу такихъ проективныхъ свойствъ принадлежатъ напримѣръ, нахожденіе трехъ точекъ на одной прямой, прохожденіе четырехъ плоскостей черезъ одну точку, касаніе двухъ кривыхъ, или кривой съ поверхностью, или двухъ поверхностей и т. д.

Изъ курса аналитической геометріи извѣстенъ одинъ весьма важный алгебраическій инваріантъ проективнаго преобразованія, а именно, такъ называемое *ангармоническое* отношеніе.

§ 5.

Сказанное въ двухъ предыдущихъ параграфахъ можно заключить въ слѣдующемъ общемъ опредѣленіи.

Разсматривается группа G преобразованій геометрическихъ образовъ въ пространствѣ n измѣненій, причемъ подъ композиціей двухъ преобразованій разумѣется послѣдовательное осуществленіе ихъ одного за другимъ.

Всякая величина, связанная съ разсматриваемыми геометрическими образами, не измѣняющаяся отъ преобразованій группы G, носитъ названіе инваріанта группы G.

Относительные инваріанты.

§ 6.

Данное нами выше понятіе объ инваріантѣ группы преобразованій можетъ быть значительно расширено, если допустить нѣкоторое намѣненіе инваріанта въ зависимости отъ даннаго линейнаго преобразованія.

Мы будемъ называть величину $\mathfrak{A}$ *относительнымъ инваріантомъ* группы линейныхъ преобразованій, если отъ преобразованія получаемъ новую величину $\mathfrak{A}'$ этого инваріанта, связанную съ первоначальною величиною при помощи равенства

$$\mathfrak{A}' = \varepsilon^k \mathfrak{A}$$

гдѣ ε модуль преобразованія, а k—число, называемое *вѣсомъ* инваріанта.

Если $k=0$, то мы приходимъ къ первоначальному данному нами опредѣленію инваріанта. Будемъ называть инваріантъ въ случаѣ $k=0$ *абсолютнымъ*.

На слѣдующемъ простомъ примѣрѣ можно пояснить понятіе объ относительномъ инваріантѣ.

Возьмемъ бинарную квадратичную форму

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

и подвергнемъ перемѣнныя независимыя слѣдующему преобразованію

$$\begin{matrix} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{matrix}, \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0;$$

тогда форма (1) преобразуется въ такую

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2,$$

гдѣ

$$A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2$$

$$B' = A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\gamma\beta$$

$$C' = A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2,$$

Простыя выкладки убѣждаютъ въ справедливости формулы

$$B'^2 - A'C' = (B^2 - AC)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \varepsilon^2(B^2 - AC);$$

итакъ, величина $B^2 - AC$ есть относительный инваріантъ, вѣсъ котораго равенъ 2.

Эквивалентность.

§ 7.

Пусть A и B будутъ: или два геометрическихъ образа, или два алгебраическихъ выраженія, или двѣ системы подобныхъ предметовъ.

Опредѣленіе. Если A и B такъ связаны съ нѣкоторой группой преобразованій, что существуетъ въ этой группѣ преобразованіе, переводящее A въ B; то A и B называются эквивалентными по отношенію къ группѣ.

Можно установить понятіе объ эквивалентности по отношенію къ системѣ преобразованій, не образующей группы. Придется только требовать существованіе обратнаго преобразованія, переводящаго B въ A

§ 8.

Пояснимъ понятіе объ эквивалентности на примѣрѣ

Разсмотримъ двѣ системы n линейныхъ формъ отъ n перемѣнныхъ независимыхъ

$$(1)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{l} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + \ldots + b_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n \end{array}\right.$$

Можно доказать теорему:

Системы (1) и (2) эквивалентны по отношенію къ группѣ не особенныхъ линейныхъ преобразованій, когда оба опредѣлителя $|a_{ik}|$ и $|b_{ik}|$ не равны нулю.

Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, преобразованія

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{l} x_1' = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n \\ x_2' = b_{21}x_1 + \ldots + b_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = b_{n1}x_1 + \ldots + b_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

которыя приводятъ системы (1) и (2) къ одному и тому же нормальному виду

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' \ \ldots \\ \ldots\ x_2' \ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ x_n' \end{array}\right.$$

Но преобразованія a и b допускаютъ обратныя, а потому преобразованіе $b^{-1}a$ преобразуетъ (2) въ (1), и теорема доказана.

§ 9.

Въ связи съ понятіемъ объ эквивалентности устанавливается понятіе о такъ называемой *полной системѣ* независимыхъ инваріантовъ.

Самый простой примѣръ пояснитъ дѣло. Если мы разсмотримъ группу пространственныхъ движеній, то понятіе объ *эквивалентности* двухъ треугольниковъ совпадетъ съ даннымъ въ началѣ элементарной геометріи понятіемъ о *равенствѣ*. Инваріантами движенія, какъ было сказано выше, являются длины и углы; значитъ, стороны и углы треугольника. Извѣстно, что для эквивалентности (равенства) треугольниковъ достаточно существованія только трехъ независимыхъ между собой инваріантовъ: или двухъ сторонъ и угла между ними, или двухъ угловъ, прилежащихъ къ одной сторонѣ, или, наконецъ, трехъ сторонъ.

Мы устанавливаемъ такое опредѣленіе полной системы инваріантовъ. *Полной называется такая система I абсолютныхъ инваріантовъ, которые одинаковы для каждыхъ двухъ эквивалентныхъ предметовъ, причемъ эквивалентность нарушается, если хоть одинъ изъ инваріантовъ системы I перестаетъ быть одинаковымъ для этихъ двухъ предметовъ.*

Алгебраическая теорія инваріантовъ.

§ 10.

Въ 19 столѣтіи разрабатывалась теорія инваріантовъ, которой можно дать названіе *алгебраической*, причемъ главнымъ образомъ разсматривались относительные инваріанты. Эта теорія, вызванная къ жизни теоріей алгебраическихъ линій и поверхностей, ставила себѣ болѣе широкія цѣли улучшенія пріемовъ вычисленія, относящихся къ цѣлымъ функціямъ, въ томъ случаѣ, когда трудности происходятъ отъ большого числа перемѣнныхъ независимыхъ и высокихъ степеней этихъ функцій. Въ послѣднее время замѣчается значительное охлажденіе интереса къ этой теоріи, вызванное въ значительной степени тѣмъ обстоятельствомъ, что полученные результаты не оправдали надеждъ, первоначально возлагавшихся на теорію. Изученіе формъ бинарныхъ разрослось въ цѣлую науку, тогда какъ при большемъ числѣ перемѣнныхъ независимыхъ теорія инваріантовъ представляла на каждомъ шагу непреодолимыя трудности. Теорія линейныхъ формъ какого угодно числа перемѣнныхъ независимыхъ, давшая теорію опредѣлителей, осталась единственнымъ примѣромъ символики, упрощавшей дѣйствія и вычисленія при большомъ числѣ входящихъ буквъ. Ни-

чого подобнаго при формахъ высшихъ степеней не найдено. Квадратичныя формы представляли единственное исключеніе, ибо онѣ, какъ мы увидимъ далѣе, сводились при помощи билинеарныхъ формъ къ теоріи опредѣлителей.

Современное состояніе теоріи поверхностей третьяго порядка — лучшій примѣръ, иллюстрирующій несовершенство теоріи кубическихъ формъ съ четырьмя перемѣнными.

Подъ вліяніемъ новыхъ задачъ, между прочимъ подъ вліяніемъ теоріи Galois, о которой будетъ сказано въ концѣ книги, теорія инваріантовъ линейныхъ преобразованій видоизмѣняетъ свой внѣшній видъ и переходитъ въ теорію групповыхъ инваріантовъ.

Не имѣя цѣли по характеру книги входить въ подробное изученіе алгебраической теоріи инваріантовъ, отошлемъ читателя къ классическому учебнику *Salmon, G.*, „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen". Deutsch von W. Fiedler. 2 Auflage 1877. Для первоначальнаго же знакомства съ групповыми инваріантами можно посовѣтовать „Siebenter Abschnitt. Gruppeninvarianten" второго тома „Lehrbuch der Algebra von H. Weber. 1899.

Мы ограничимся изложеніемъ лишь опредѣленій и теоремъ, сдѣлавшихся классическими.

Инваріанты и коваріанты.

§ 11.

Опредѣленіе I. Раціональная функція коэффиціентовъ одной формы или системы формъ, которая получаетъ множителемъ k-ую степень (k число цѣлое) модуля не особеннаго преобразованія, приложеннаго къ этимъ формамъ, называется относительнымъ инваріантомъ или просто инваріантомъ разсматриваемыхъ формъ.

Опредѣленіе II. Цѣлое число k носитъ названіе вѣса инваріанта.

Абсолютные инваріанты можно разсматривать какъ относительные, вѣсъ которыхъ есть нуль.

Относительный инваріантъ обращается въ абсолютный для преобразованія съ модулемъ $+1$.

§ 12.

Если мы разсмотримъ систему n линейныхъ формъ

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases},$$

то опредѣлитель $|a_{ik}|$ будетъ, очевидно, инваріантомъ системы (1).

Подвергнемъ въ самомъ дѣлѣ, систему (1) линейному преобразованію

$$(2)\qquad \begin{array}{l} x_1 = c_{11}x_1' + \ldots + c_{1n}x_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_{n1}x_1' + \ldots + c_{nn}x_n' \end{array}$$

съ модулемъ $\varepsilon = |c_{ik}|$, отличнымъ отъ нуля.

Преобразованіе (2) переводитъ систему (1) въ новую

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}'x_1' + \ldots + a_{1n}'x_n' \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}'x_1' + \ldots + a_{nn}'x_n'. \end{array} \right.$$

гдѣ

$$a_{ik}' = a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \ldots + a_{in}c_{nk}.$$

такъ что дѣло сводится къ умноженію матрицъ.

$$\| a_{ik}' \| = \| a_{ik} \| \cdot \| c_{ik} \| .$$

Переходя къ опредѣлителямъ, получимъ $|a_{ik}'| = \varepsilon |a_{ik}|$, т. е. $|a_{ik}|$ есть инваріантъ, вѣсъ котораго есть 1.

§ 13.

Опредѣленіе. Разсматривается рядъ системъ независимыхъ перемѣнныхъ

$$(x, y, z, \ldots), (x_1, y_1, z_1 \ldots), (x_2, y_2, z_2, \ldots), \ldots$$

Если всѣ эти системы подвергнуты одному и тому же линейному преобразованію, то говорятъ, что эти системы преобразуются когредіентно. Когредіентное измѣненіе можно геометрически характеризовать такъ. Если задано проективное преобразованіе многомѣрнаго пространства, то очевидно, что координаты всѣхъ точекъ пространства измѣняются когредіентно.

§ 14.

Придадимъ изложенію геометрическій характеръ въ смыслѣ языка, оставаясь по существу въ области чистой алгебры.

Опредѣленіе 1. Раціональная функція отъ коэффиціентовъ одной формы или системы формъ отъ n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, заключающая кромѣ этихъ коэффиціентовъ еще координаты нѣкотораго конечнаго числа точекъ $(y_1, y_2, \ldots y_n)$, $(z_1, z_2, \ldots z_n) \ldots$, называется относительнымъ коваріантомъ формы или системы формъ, если она пріобрѣтаетъ цѣлую степень ε^k модуля не особеннаго преобразованія, когда

этому преобразованію когредіентно подвергнуты какъ перемѣнныя x_1, $x_2, \ldots x_n$ основныхъ формъ, такъ и координаты $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ $(z_1, z_2, \ldots z_n)$. точекъ.

Коваріантъ можетъ не заключать совершенно коэффиціентовъ основныхъ формъ, а только координаты точекъ.

Опредѣленіе II. Показатель k носитъ названіе вѣса коваріанта.

§ 15.

Опредѣлитель

$$|x_i^{(k)}| = \begin{vmatrix} x_1' & \ldots & x_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

есть относительный коваріантъ вѣса 1 системы точекъ

$$(x_1', \ldots x_n'),\ (x_1'', \ldots x_n'') \ldots (x_1^{(n)}, \ldots x_n^{(n)}),$$

ибо, выполняя преобразованіе

$$x_1 = c_{11}X_1 + \ldots + c_{1n}X_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = c_{n1}X_1 + \ldots + c_{nn}X_n,$$

получаемъ

$$\begin{vmatrix} x_1' & \ldots & x_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = |c_{ik}| . \begin{vmatrix} X_1' & \ldots & X_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^{(n)} & \ldots & X_n^{(n)} \end{vmatrix};$$

откуда, обозначая модуль преобразованія черезъ ε, получимъ

$$|X_i^{(k)}| = \varepsilon^{-1} . |x_i^{(k)}|,$$

что доказываетъ поставленную теорему.

§ 16.

Система, состоящая изъ формы $f(x_1, \ldots x_n)$ и точки $(y_1, \ldots y_n)$, имѣетъ относительно линейнаго преобразованія абсолютный коваріантъ

$$f(y_1, y_2 \ldots y_n),$$

гдѣ $f(y_1, y_2, \ldots y_n)$ результатъ подстановки координатъ y_i въ форму на мѣсто независимыхъ перемѣнныхъ.

Для доказательства разсмотримъ уравненіе

(1) $$f(x_1, \ldots x_n) = K,$$

гдѣ K произвольная постоянная величина, уравненіе (1) опредѣляетъ нѣкоторый образъ въ многомѣрномъ пространствѣ, которой мы можемъ назвать *сверхповерхностью*.

Если точка $(y_1, \ldots y_n)$ лежитъ на сверхповерхности (1), то имѣетъ мѣсто тождество

$$f(y_1, \ldots, y_n) = K,$$

Это равенство можно написать подробнѣе, если указать коэффиціенты $a_1, a_2, \ldots$ формы f.

(2) $$f(a_1, a_2, \ldots; y_1, \ldots y_n) = K.$$

Очевидно, что свойство точки находиться на извѣстной сверхповерхности не можетъ нарушиться отъ преобразованія координатъ; то мы имѣемъ послѣ преобразованія

(3) $$f(a_1', a_2', \ldots, y_1', \ldots y_n') = K.$$

Сопоставляя (2) и (3), получимъ

$$f(a_1', a_2', \ldots; y_1', \ldots y_n') = f(a_1, a_2, \ldots; y_1, \ldots y_n)$$

и разсматриваемое выраженіе есть, дѣйствительно, коваріантъ.

Контрагредіентныя преобразованія.

§ 17.

Понятіе о контрагредіентныхъ преобразованіяхъ взято изъ геометріи. Разсмотримъ трехмѣрное пространство, точки котораго опредѣляются четырьмя однородными координатами

$$x_1, x_2, x_3, x_4.$$

Коэффиціенты

$$u_1, u_2, u_3, u_4$$

уравненія плоскости

(1) $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

можно считать *координатами* плоскости (1), т. е. величинами, опредѣляющими положеніе плоскости (1) въ пространствѣ. Это такъ называемыя *однородныя плоскостныя координаты*.

§ 18.

Посмотримъ, какимъ преобразованіямъ подвергаются плоскостныя координаты, когда точныя координаты x, подвергаются проективному преобразованію с

(c) $$x_i' = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 + c_{i4}x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

съ отличнымъ отъ нуля опредѣлителемъ

$$\varepsilon = |c_{ik}|.$$

Обозначая черезъ C_{ik} алгебраическія добавленія элементовъ опредѣлителя ε, получимъ обратное преобразованіе

$$(\mathfrak{c}^{-1}) \qquad x_i = \frac{C_{1i}}{\varepsilon} x_1' + \frac{C_{2i}}{\varepsilon} x_2' + \frac{C_{3i}}{\varepsilon} x_3' + \frac{C_{4i}}{\varepsilon} x_4' (i = 1, 2, 3, 4)$$

Подставляя эти выраженія x_i черезъ x_i' въ основное уравненіе (1), дающее соотношеніе между u_i и x_i, получимъ

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' + u_4'x_4' = 0,$$

гдѣ

$$(\mathfrak{b}) \qquad u_i' = \frac{C_{i1}}{\varepsilon} u_1 + \frac{C_{i2}}{\varepsilon} u_2 + \ldots + \frac{C_{i4}}{\varepsilon} u_4 (i = 1, 2, 3, 4)$$

Итакъ мы видимъ, что плоскосныя координаты преобразовываются при помощи преобразованія

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{c}^{-1})',$$

сопряженнаго съ обратнымъ отъ $\mathfrak{c}$.

§ 18

Двѣ системы n перемѣнныхъ независимыхъ называются контрагредіентными, если при неособенномъ линейномъ преобразованіи одной другая преобразуется при помощи сопряженнаго съ обратнымъ отъ перваго.

Получимъ теорему.

Если двѣ системы контрагредіентныхъ перемѣнныхъ

$$x_1, \ldots x_n \text{ и } u_1, \ldots u_n$$

преобразовываются въ новыя

$$x_1', \ldots x_n'; u_1', \ldots u_n',$$

то выраженіе

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n$$

переходитъ въ

$$u_1'x' + u_2'x_2' + \ldots + u_n'x_n.$$

Въ связи съ контрагредіентными перемѣнными вводится понятіе о такъ называемомъ *контраваріантѣ*.

Контраваріантомъ называется всякая раціональная функція отъ коэффиціентовъ заданныхъ формъ и отъ контрагредіентныхъ перемѣнныхъ

$$(u_1, \ldots, u_n), (u_1', \ldots u_n), \ldots$$

которая пріобрѣтаетъ нѣкоторую цѣлую степень модуля преобразованія.

Очевидно, что понятіе о контраваріантѣ является излишнимъ, если контрагредіентныя перемѣнныя разсматривать какъ коэффиціенты линейныхъ формъ. Тогда контраваріантъ обращается въ инваріантъ.

Тоже самое относится къ болѣе общему понятію *смѣшаннаго комитанта* (Zwischenform), въ который кромѣ коэффиціентовъ формъ и контрагредіентныхъ перемѣнныхъ входятъ еще и когредіентныя.

Вообще является недостаткомъ излагаемой теоріи введеніе большого числа названій [1]), причемъ составляются изъ этихъ названій теоремы, часто являющіяся совершенно тривіальными, какъ, напримѣръ, слѣдующая.

Комитантъ коваріанта есть комитантъ первоначальной формы.

Ортогональныя преобразованія.

§ 19.

Разсмотримъ задачу: найти тождественныя контрагредіентныя преобразованія.

Употребляя символы § 17, можемъ формулировать задачу, какъ нахожденіе матрицы $\mathfrak{c}$, для которой

$$(\mathfrak{c}^{-1})' = \mathfrak{c}.$$

Разсмотримъ случай трехъ перемѣнныхъ независимыхъ

$$\mathfrak{c} = \left\| \begin{matrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{matrix} \right\|, \quad \varepsilon = \left| \begin{matrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{matrix} \right|.$$

Обозначая большими буквами $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2$ алгебраическія дополненія элементовъ $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2$, приведемъ задачу къ ряду равенствъ

(1) $$A = a\varepsilon, \quad B = b\varepsilon, \quad C = c\varepsilon$$

(2) $$A_1 = a_1\varepsilon, \quad B_1 = b_1\varepsilon, \quad C_1 = c_1\varepsilon$$

(3) $$A_2 = a_2\varepsilon, \quad B_2 = b_2\varepsilon, \quad C_2 = c_2\varepsilon$$

---

[1]) Такъ, напримѣръ, кромѣ указанныхъ выше имѣются названія, эвектантъ, эманантъ, ... и т. д

Умножая равенство (1) на a, b, c и складывая, получимъ

$$\varepsilon = \varepsilon(a^2 + b^2 + c^2)$$

но $\varepsilon \neq 0$, слѣдовательно, будетъ

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

подобнымъ же образомъ получаемъ

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1.$$

Кромѣ того

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

$$aa_2 + bb_2 + cc_2 = 0$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Далѣе

$$\varepsilon^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2, & aa_1 + bb_1 + cc_1 \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда $\varepsilon = \pm 1$.

§ 20.

Мы пришли къ такъ называемому *ортогональному* преобразованію, опредѣляемому равенствами:

(1)
$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} \quad 0 \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n & \\ & i \neq k \\ k = 1, 2, \ldots n & \end{pmatrix}.$$

Въ случаѣ $n = 3$, какъ извѣстно, получается вращеніе прямоугольной системы координатъ около начала, откуда происходитъ и само названіе ортогональнаго преобразованія.

Изъ равенствъ (1) вытекаетъ:

I. $\varepsilon = |c_{ik}| = \pm 1$, ибо

$$\varepsilon^2 = \begin{vmatrix} c_{11}^2 + c_{21}^2 + \ldots c_{n1}^2, & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

II. Обозначая алгебраическое дополненіе элемента c_{ik} черезъ C_{ik}, получимъ

$$(2)\qquad C_{ik} = \varepsilon c_{ik},$$

ибо можно будетъ написать рядъ тождествъ

$$(C_{1k} - \varepsilon c_{1k})c_{11} + (C_{2k} - \varepsilon c_{2k})c_{21} + \ldots + (C_{nk} - \varepsilon c_{nk})c_{n1} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(C_{1k} - \varepsilon c_{1k})c_{1n} + (C_{2k} - \varepsilon c_{2k})c_{2n} + \ldots + (C_{nk} - \varepsilon c_{nk})c_{nn} = 0,$$

изъ которыхъ получаются соотношенія (2), ибо отличенъ отъ нуля опредѣлитель $|c_{ik}| = \varepsilon$.

III. Получаются равенства

$$c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \ldots + c_{in}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$c_{i1}c_{j1} + c_{i2}c_{j2} + \ldots + c_{in}c_{jn} = 0 \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n & \\ j = 1, 2, \ldots n & i \neq j \end{pmatrix}.$$

Послѣднія равенства получаются, если умножить на c_{jk} равенства (2) и просуммировать по k.

Преобразованія съ опредѣлителемъ $+1$ мы будемъ называть *собственными*, а съ опредѣлителемъ -1 — *несобственными*.

§ 21

Ортогональныя преобразованія были предметомъ разнообразныхъ изслѣдованій и имѣютъ довольно богатую литературу.

Укажемъ здѣсь на главнѣйшіе вопросы, интересовавшіе математиковъ.

Такъ какъ ортогональное преобразованіе соотвѣтствуетъ тому случаю, когда контрагредіентное преобразованіе совпадаетъ съ начальнымъ то въ этомъ случаѣ можно замѣнить перемѣнныя u_i на x_i, и мы замѣтимъ, что ортогональное преобразованіе переводитъ выраженіе

$$x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots x_nx_n$$

въ новое

$$x_1'x_1' + x_2'x_2' + \ldots + x_n'x_n'$$

Это можно выразить такъ: *ортогональное преобразованіе переводитъ квадратичную форму*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

въ самое себя.

Hermite [1]) поставилъ болѣе общій вопросъ изученія преобразованій, переводящихъ общаго вида квадратичную форму $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ въ самое себя. Задача Hermit'а имѣетъ особенное значеніе для теоріи чиселъ, когда формы разсматриваются съ цѣлыми коэффиціентами, ибо, какъ намъ извѣстно изъ элементарнаго курса теоріи чиселъ, подстановки съ цѣлыми коэффиціентами, переводящія бинарную квадратичную форму въ самое себя, связаны съ уравненіемъ Pell'а. Такъ что задача Hermite'а для формъ съ цѣлыми коэффиціентами связана съ труднѣйшими и глубочайшими изслѣдованіями теоріи чиселъ.

Оставаясь въ области алгебры, тоесть, не предполагая коэффиціентовъ подстановки числами цѣлыми, ограничимся относительно преобразованій Hermite'а указаніемъ на то, что опредѣлитель такого преобразованія равенъ ± 1. Это будетъ ясно изъ слѣдующей главы, посвященной алгебраической теоріи квадратичныхъ формъ.

Особенное вниманіе было обращено на разсмотрѣніе характеристическаго уравненія ортогональной матрицы. Brioschi [2]) замѣтилъ, что это уравненіе возвратное, а именно, что, если λ есть одинъ его корень, то будетъ существовать другой $\frac{1}{\lambda}$. Frobenius [3]) при помощи теоріи элементарныхъ дѣлителей подвергъ это уравненіе подробному изслѣдованію.

§ 22.

Такъ какъ между n^2 коэффиціентами ортогональнаго преобразованія существуетъ $n + \frac{n(n-1)}{2}$ соотношеній, то независимыми изъ числа этихъ коэффиціентовъ остаются только $\frac{n.(n-1)}{2}$. Можно выразить всѣ коэффиціенты въ видѣ функцій отъ $\frac{n(n-1)}{2}$ независимыхъ перемѣнныхъ.

Euler [4]) показалъ, какъ составить элементы ортогональной матрицы опредѣлителя ± 1 при помощи $\frac{n(n-1)}{2}$ произвольныхъ вспомогательныхъ угловъ. Для трехмѣрнаго пространства ($n = 3$) получаются знаменитые Euler'овы углы, постоянно употребляющіеся въ механикѣ.

Euler представляетъ ортогональную матрицу какъ произведеніе $\frac{n(n-1)}{2}$ матрицъ вида

[1]) Hermite. Euvres 1, 195 (1854).

[2]) Brioscki. Journal de Liouville. 19, 258 (1854).

[3]) Frobenius. Journ. j. r. u. a. Math. 84, 48 (1878).

[4]) Leonhardi Euleri. Commentationes arithmeticae. T. 1, 427

$$\begin{Vmatrix} Cos\,\varphi, & Sin\,\varphi & 0 & 0 & \\ Sin\,\varphi, & Cos\,\varphi & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1\ . & .\ 1 \end{Vmatrix},$$

у которыхъ всѣ элементы главной діагонали, кромѣ двухъ, равны 1; эти два суть $Cos\,\varphi$ и $Cos\,\varphi$; этимъ двумъ элементамъ діагонали соотвѣтствуютъ два элемента $-Sin\,\varphi$ и $Sin\,\varphi$, расположенные на тѣхъ же горизонталяхъ и колоннахъ, остальные элементы нули. Взявъ всевозможныя сочетанія n элементовъ діагонали по два, получимъ формулы Euler'а. Такъ напримѣръ, въ случаѣ трехъ измѣненій надо ввести три угла φ, ψ, θ

$$\begin{Vmatrix} Cos\,\varphi, & Sin\,\varphi, & 0 \\ Sin\,\varphi, & Cos\,\varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} Cos\,\psi, & 0, & Sin\,\psi \\ 0, & 1, & 0 \\ Sin\,\psi, & 0, & -Cos\,\psi \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & Cos\,\theta, & Sin\,\theta \\ 0, & Sin\,\theta, & Cos\,\theta \end{Vmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаемъ окончательно матрицу Euler'а [1])

$$\begin{Vmatrix} Cos\,\varphi\,Cos\,\psi, & Sin\,\varphi\,Cos\,\theta + Cos\,\varphi\,Sin\,\theta\,Sin\,\psi, & Sin\,\varphi\,Sin\,\theta - Cos\,\varphi\,Cos\,\theta\,Sin\,\psi \\ Sin\,\varphi\,Cos\,\psi, & Cos\,\varphi\,Cos\,\theta + Sin\,\varphi\,Sin\,\theta\,Sin\,\psi, & Cos\,\varphi\,Sin\,\theta \quad Sin\,\varphi\,Cos\,\theta\,Sin\,\psi \\ Sin\,\psi, & -Cos\,\psi\,Sin\,\theta, & Cos\,\psi\,Cos\,\theta \end{Vmatrix}.$$

Для случая пространства четырехъ измѣненій надо перемножить шесть матрицъ

$$\begin{Vmatrix} Cos\,\varphi_1, & Sin\,\varphi_1, & 0 & 0 \\ Sin\,\varphi_1, & Cos\,\varphi_1, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 1 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} Cos\,\varphi_2, & 0, & Sin\,\varphi_2, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ Sin\,\varphi_2, & 0, & Cos\,\varphi_2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} Cos\,\varphi_3, & 0, & 0, & -Sin\,\varphi_3 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ Sin\,\varphi_3, & 0, & 0, & Cos\,\varphi \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & Cos\,\varphi_4, & Sin\,\varphi_4, & 0 \\ 0, & Sin\,\varphi_4, & -Cos\,\varphi_4 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & Cos\,\varphi_5, & 0, & Sin\,\varphi_5 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & Sin\,\varphi_5, & 0, & -Cos\,\varphi_5 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & Cos\,\varphi_6, & Sin\,\varphi_6 \\ 0, & 0, & Sin\,\varphi_6, & -Cos\,\varphi_6 \end{Vmatrix}$$

Подобныя же соображенія относятся къ какому угодно числу измѣреній.

---

[1]) Здѣсь я показываю, какъ получить несобственную матрицу

§ 21.

Если ввести функціи $\tau_i = tg \frac{\varphi_i}{2}$, гдѣ φ_i Euler'овскіе углы, какъ новыя независимыя перемѣнныя, то коэффиціенты ортогональнаго преобразованія выразятся раціонально черезъ τ_i. Итакъ, можетъ быть поставленъ вопросъ о наиболѣе общемъ представленіи коэффиціентовъ ортогональнаго преобразованія въ видѣ раціональныхъ функцій отъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Euler'у принадлежатъ наиболѣе замѣчательныя представленія такого рода, относящіяся къ случаямъ $n = 3$ и $n = 4$. Для $n = 3$

$$c_{11} = \frac{p^2 + q^2 - r^2 - s^2}{u}, \quad c_{12} = \frac{2qr + 2ps}{u}, \quad c_{13} = \frac{2qs - 2pr}{u},$$

$$c_{21} = \frac{2qr - 2ps}{u}, \quad c_{22} = \frac{p^2 - q^2 + r^2 - s^2}{u}, \quad c_{23} = \frac{2pq + 2rs}{u}.$$

$$c_{31} = \frac{2qs + 2pr}{u}, \quad c_{32} = \frac{2rs - 2pq}{u}, \quad c_{32} = \frac{p^2 - q^2 + s^2 - r^2}{u}.$$

гдѣ

$$u = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

Для $n = 4$ Euler даетъ такую матрицу

$$\begin{vmatrix} ap+bq+cr+ds & ar-bs-cp+dq & -as-br+cq+dp & aq-bp+cs-dr \\ -aq+bp+cs-dr & as+br+cq+dp & ar-bs+cp-dq & ap+bq-cr-ds \\ ar+bs-cp-dq & -ap+bq-cr+ds & aq+bp+cs+dr & as-br-cq+dp \\ -as+br-cq+dp & aq-bp+cs+dr & ap+bq+cr-ds & ar+bs+cp+dq \end{vmatrix}.$$

Въ этой матрицѣ суммы квадратовъ каждой горизонтали и каждой колонны даютъ одно и тоже число

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2),$$

а суммы произведеній элементовъ двухъ различныхъ горизонталей или колоннъ равны нулю.

Euler заявляетъ, что всѣ его попытки дать подобныя формулы для пространства болѣе четырехъ измѣреній были неудачны.

Чебышевъ [1]) и Cayley [2]) дали подобныя формулы для произвольнаго числа n, которыя нельзя однако считать общими.

---

[1]) Чебышевъ. Полное собраніе сочиненій Т. I. Стр. 226

[2]) Cayley. Journ. f. u. Math 22, 120 (1846)

§ 25.

Особенно важное значеніе имѣетъ разсмотрѣніе конечныхъ группъ ортогональныхъ преобразованій. Нетрудно видѣть, что будетъ ортогональнымъ преобразованіе, которое мы разсматривали въ § 53 Главы V и которое соотвѣтствуетъ подстановкѣ перемѣнныхъ независимыхъ. Въ этихъ преобразованіяхъ матрица состоитъ изъ нулей и единицъ, причемъ въ каждой горизонтали и въ каждой колоннѣ находится по одному элементу, равному единицѣ, тогда какъ остальные суть нули. Группы подстановокъ n буквъ находиться, слѣдовательно, среди ортогональныхъ группъ

Будемъ называть матрицы, соотвѣтствующія подстановкамъ, Y матрицами. Матрица, соотвѣтствующая транспозиціи (i, k), имѣетъ видъ

$$
\begin{array}{ccc|c|c|c}
 & & & i\text{-ая колонна} & & k\text{-ая колонна} \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \;\ldots\; 0 \\
0 & 1 & 0\ldots & 0 & \ldots & 0 \;\ldots\; 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & \ldots & 1 \;\ldots\; 0 \\
\hline
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1\ldots & 0 \;\ldots\; 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots 1 & 0 \;\ldots \\
\hline
0 & 0 & 0\ldots & 1 & 0\ldots 0 & 0 \;\ldots\; 0 \\
 & & & & & \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots 0 & 0 \;\ldots\; 1
\end{array} \tag{1}
$$

и получается изъ единичной матрицы черезъ перестановку двухъ горизонталей или колоннъ i-ой и k-ой.

Матрица (1), соотвѣтствующая транспозиціи (ik), имѣетъ опредѣлитель $\varepsilon = -1$.

Матрица $Y.(ik)$ происходитъ изъ Y черезъ перестановку двухъ колоннъ i-ой и k-ой, а матрица $(ik)Y$ происходитъ изъ Y черезъ перестановку двухъ горизонталей.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что подстановкамъ знакоперемѣнной группы соотвѣтствуютъ собственныя преобразованія, подстановкамъ же, равносиль-

нымъ нечетному числу транспозицій, соотвѣтствуютъ несобственныя преобразованія.

§ 25.

Вся группа ортогональныхъ преобразованій, какъ собственныхъ, такъ и несобственныхъ, коэффиціенты которыхъ произвольныя вещественныя или комплексныя числа, имѣетъ подгруппой группу собственныхъ преобразованій.

Принимая во вниманіе сказанное, мы замѣчаемъ, что среди конечныхъ группъ ортогональныхъ преобразованій заключаются прежде всего группы подстановокъ, то есть, группы собственныхъ и несобственныхъ преобразованій вида Y.

Далѣе можно указать на группы преобразованій Y', получающихся изъ Y замѣной единицъ на ± 1.

Группы преобразованій Y и Y' сводятся къ измѣненію названій осей координатъ, причемъ группы собственныхъ преобразованій Y можно характеризовать какъ группы вращеній системы координатъ около начала, когда однѣ оси приходятъ въ совпаденіе съ другими по положенію и по направленію. Порядокъ группы всѣхъ преобразованій Y есть $n!$, а порядокъ всѣхъ преобразованій Y' есть $2^n n!$

§ 26.

Обращаясь далѣе къ разсмотрѣнію конечныхъ группъ ортогональныхъ вещественныхъ преобразованій, отличныхъ отъ Y и Y', мы замѣтимъ, что для трехмѣрнаго пространства задача рѣшена вполнѣ

Скажемъ въ немногихъ словахъ, въ чемъ состоитъ это рѣшеніе

Обращаемся сначала къ конечнымъ группамъ собственныхъ преобразованій, отличныхъ отъ Y, Y'.

Пусть задана конечная группа вращеній порядка n, тогда этой группѣ соотвѣтствуетъ n положеній нѣкотораго тѣла, неизмѣнно связаннаго съ вращающеюся средой. Эти n положеній тѣла образуютъ правильную фигуру, которая совпадетъ съ самое собою при указанной группѣ вращеній.

Если перемѣщающимся тѣломъ будетъ плоскость, то мы естественно приходимъ къ правильнымъ многогранникамъ.

Перебирая всѣ возможные случаи конечныхъ группъ вращеній, мы должны будемъ разсмотрѣть слѣдующія тѣла: правильную пирамиду, двойную пирамиду, тетраэдръ, октаэдръ, кубъ, додекаэдръ и икосаэдръ.

Правильная пирамида съ g боковыми гранями совпадетъ съ самое собой при g-кратномъ повтореніи поворота около оси на уголъ $2\pi : g$

Двойная пирамида, т. е. такая, ребра которой продолжены за вершину, если она имѣетъ четное число боковыхъ граней, можетъ быть со-

вмѣщена съ самое собою, кромѣ вращеній около оси, еще при помощи опрокидыванія на 180 градусовъ около вершины.

Обращаясь къ правильнымъ многогранникамъ въ собственномъ смыслѣ слова, мы замѣтимъ, какъ по виду многогранника найти порядокъ соотвѣтствующей ему группы. Въ самомъ дѣлѣ, многогранникъ можетъ быть приведенъ въ совпаденіе съ самимъ собой наложеніемъ одной его грани на всѣ остальныя, при этомъ наложеніе можно произвести на столько способовъ сколько вершинъ заключаетъ эта грань.

Приходимъ къ такому способу. Порядокъ группы вращеній правильнаго тѣла равенъ:

1) произведенію числа граней на число угловъ въ каждой грани,

2) произведенію числа вершинъ на число граней, встрѣчающихся въ каждой вершинѣ,

3) двойному числу реберъ.

По этому счисленію порядокъ группы будетъ:

для тетраэдра	12,
для куба и октаэдра. . .	24,
для додекаэдра и икосаэдра .	60.

Надо замѣтить, что, если мы около октаэдра опишемъ шаръ и продолжимъ до пересѣченія съ шаромъ перпендикуляры, опущенные изъ центра на 8 граней, то получимъ кубъ, вписанный въ тотъ же шаръ. Этотъ кубъ мы назовемъ сопряженнымъ съ октаэдромъ. Группа вращеній куба совпадаетъ съ группой вращенія сопряженнаго октаэдра. Подобнымъ же образомъ додекаэдръ и икосаэдръ суть сопряженныя между собой тѣла и имѣютъ общую группу.

Итакъ, мы приходимъ къ пяти группамъ вращеній:

1) группа пирамиды,

2) группа двойной пирамиды,

3) группа тетраэдра,

4) группа октаэдра,

5) группа икосаэдра.

§ 27

Перейдемъ теперь къ конечнымъ группамъ ортогональныхъ преобразованій общаго вида какъ собственныхъ, такъ и несобственныхъ. Нетрудно видѣть, что несобственныя преобразованія можно считать получающимися изъ собственныхъ черезъ умноженіе на одну несобственную матрицу

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Эта матрица соотвѣтствуетъ преобразованію

$$x_1 = x\,,\; y_1 = y\,,\; z_1 = -z\,,$$

измѣняющему лишь знакъ координаты z.

Это преобразованіе можно разсматривать какъ зеркальное изображеніе фигуры, если зеркальною поверхностью является плоскость xy.

Допустивъ кромѣ вращеній еще операцію зеркальнаго опрокидыванія фигуры, мы приходимъ къ конечнымъ группамъ, носящимъ названіе *группъ кристаллографическихъ.*

Русскій извѣстный минералогъ Ѳедоровъ исчерпывающимъ образомъ изучилъ симметрію пространственныхъ фигуръ, а потому задача нахожденія кристаллографическихъ группъ сводится къ его изслѣдованіямъ и допускаетъ полное рѣшеніе.

Было бы важно рѣшить задачу нахожденія конечныхъ группъ ортогональныхъ преобразованій для произвольнаго числа измѣреній, ибо изученіе симметріи многомѣрныхъ пространствъ приводитъ къ рѣшенію важныхъ задачъ теоріи чиселъ. Эта задача была предметомъ занятій на моемъ семинарѣ по алгебрѣ въ 1913 г. въ Университетѣ св. Владиміра. Полное ея рѣшеніе для четырехъ измѣреній далъ Goursat [1]).

Я утверждаю, что, начиная съ пяти измѣреній, дѣло исчерпывается группами Y и Y'. Вопросъ имѣетъ связь съ вопросомъ о представленіи группъ при помощи группъ подстановокъ наименьшаго числа предметовъ.

Полная система инваріантовъ.

§ 28.

Въ § 9 этой главы мы дали понятіе о полной системѣ независимыхъ инваріантовъ. Въ излагаемой нами алгебраической теоріи инваріантовъ названіе *полная система* употребляется въ нѣсколько болѣе узкомъ смыслѣ слова. Здѣсь мы разсмотримъ цѣлые, раціональные, относительные инваріанты. Подъ полной системой такихъ инваріантовъ понимается совокупность извѣстнаго числа такъ выбранныхъ инваріантовъ, что всякій инваріантъ выражается черезъ выбранные въ видѣ цѣлой раціональной функціи. Пояснимъ сказанное на простомъ примѣрѣ.

Мы видѣли уже въ § 12, что опредѣлитель a системы линейныхъ формъ

$$(1)\qquad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}$$

есть инваріантъ этой системы.

[1]) Goursat. Annales sc. de l'École Normale Supérieure Série III T. VI 1889.

Покажемъ теперь, что въ нашемъ случаѣ опредѣлитель a есть единственный независимый инварiантъ, при чемъ всякiй другой инварiантъ будетъ степенью этого инварiанта съ натуральнымъ показателемъ, взятою съ постояннымъ множителемъ.

Сдѣлаемъ линейное преобразованiе, имѣющее матрицу $\|c_{ik}\|$ съ опредѣлителемъ $c = |c_{ik}|$. Пусть новая система линейныхъ формъ будетъ

$$a'_{11}x_1' + \ldots + a'_{1n}x_n'$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a'_{n1}x_1' + \ldots + a'_{nn}x_n'.$$

Обозначая опредѣлитель новой системы черезъ a', получимъ, очевидно,

$$a' = ac.$$

Пусть

$$I(a_{11}, \ldots a_{nn})$$

произвольный инварiантъ системы (1) и, обозначая для краткости $I' = I(a_{11}', \ldots a_{nn}')$, получимъ по опредѣленiю понятiя объ инварiантѣ

$$I' = c^k I,$$

гдѣ k вѣсъ инварiанта I. Примѣнимъ такое преобразованiе, которое переводитъ систему линейныхъ формъ въ нормальный видъ

$$\begin{matrix} x_1' \ldots\ldots \\ \ldots x_2' \ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots x_n'. \end{matrix} \tag{2}$$

Въ этомъ случаѣ $a' = 1$, т. е. $ac = 1$, $c = a^{-1}$.

Обозначимъ черезъ I_0 постоянное число, въ которое обращается инварiантъ I для системы (2), тогда мы получимъ

$$I_0 = c^k I = a^{-k} I,$$

откуда

$$I = I_0 a^k,$$

что и требовалось показать.

Нетрудно видѣть, что если система m линейныхъ формъ отъ n перемѣнныхъ независимыхъ состоитъ изъ меньшаго числа формъ, чѣмъ число перемѣнныхъ независимыхъ ($m < n$), то система не имѣетъ совсѣмъ цѣлыхъ рацiональныхъ инварiантовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, добавляя $n - m$ формъ съ произвольными коэффицiентами, получимъ какъ единственный инварiантъ степень опредѣли-

теля. Этотъ инваріантъ не можетъ быть инваріантомъ заданныхъ формъ, ибо онъ заключаетъ произвольные элементы.

§ 29.

Задача о нахожденіи полной системы раціональныхъ инваріантовъ обобщается такимъ образомъ, что къ инваріантамъ присоединяются еще и коваріанты.

Какъ было сказано въ § 10, теорія инваріантовъ подъ вліяніемъ приложеній постепенно переходитъ въ теорію групповыхъ инваріантовъ, т. е. теорію формъ $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, не мѣняющихся или пріобрѣтающихъ постояннаго множителя при линейномъ преобразованіи перемѣнныхъ независимыхъ, принадлежащемъ къ нѣкоторой группѣ такихъ преобразованій. Hilbert'у [1]) принадлежитъ такая важная теорема.

Число независимыхъ абсолютныхъ инваріантовъ всякой конечной группы однородныхъ линейныхъ преобразованій— конечно.

Ариѳметическіе инваріанты.

§ 30.

Кромѣ геометрическихъ и алгебраическихъ инваріантовъ приходится иногда разсматривать, такъ называемые, числовые или ариѳметическіе инваріанты.

Примѣръ такого рода инваріантовъ представляетъ рангъ матрицы коэффиціентовъ системы n линейныхъ формъ отъ n перемѣнныхъ независимыхъ. Нетрудно видѣть [2]), что этотъ рангъ не измѣняется отъ умноженія матрицы на матрицу неособеннаго линейнаго преобразованія.

Второй примѣръ подобнаго инваріанта представляетъ матрица однородныхъ координатъ m точекъ $n-1$ мѣрнаго пространства

$$\begin{matrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots & x_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & \ldots & x_n^{(m)} \end{matrix}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если рангъ матрицы есть 1, то точки совпадаютъ, что очевидно не нарушается при проективномъ преобразованіи пространства. Подобнымъ же образомъ, если рангъ есть 2, точки лежатъ на одной прямой, обстоятельство также сохраняющееся при проективномъ преобра-

[1]) D. Hilbert. Math. Ann. 36, 473 (1890) H. Weber. Algebra. 2 B. 218.

[2]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Изданіе второе. 1913 стр. 287.

зованіи. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что каковъ бы рангъ матрицы ни былъ, онъ сохраняется, при линейномъ преобразованіи.

Какъ примѣръ полной системы инваріантовъ можно привести соображенія § 57 главы IV: *рангъ и элементарные дѣлители составляютъ полную систему инваріантовъ для группы элементарныхъ преобразованій матрицы.*

Билинеарныя формы.

§ 31.

Билинеарными называются такія квадратичныя формы относительно $2n$ перемѣнныхъ

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots y_n),$$

когда каждый ихъ членъ будетъ первой степени какъ относительно x, такъ и относительно y.

Общаго вида билинеарная форма при $n = 3$ будетъ

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 +$$
$$+ a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 +$$
$$+ a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + a_{33}x_3y_3 .$$

Ее можно обозначить кратко такъ:

$$\sum_1^3 a_{ij}x_iy_j .$$

Матрица

$$\mathfrak{a} = \| a_{ij} \|$$

носитъ названіе матрицы билинеарной формы

Опредѣлитель матрицы билинеарной формы называется *опредѣлителемъ формы.* Если опредѣлитель равенъ нулю, то форма называется *особенной.*

Билинеарную форму можно предполагать происходящею изъ линейныхъ формъ двоякимъ образомъ. Или разсматривается система линейныхъ формъ относительно $y_1, y_2, \ldots y_n$ съ матрицей $\mathfrak{a}$, которыя умножаются по порядку на $x_1, x_2, \ldots x_n$ и складываются, или берутся формы относительно $x_1, x_2, \ldots x_n$ съ сопряженной матрицей $\mathfrak{a}'$, умножаются по порядку на $y_1, y_2, \ldots y_n$ и складываются.

Если возьмемъ первый способъ образованія, то явится очевиднымъ, что, если мы подвергнемъ буквы y преобразованію съ матрицей $\mathfrak{b}$, то новая матрица формы будетъ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Если же возьмемъ второй способъ образованія и подвергнемъ буквы x преобразованію съ матрицей $\mathfrak{c}$, то сопряженная матрица обратится въ $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}$, откуда настоящая матрица билинеарной формы обратится въ $(\mathfrak{a}'\mathfrak{c})' = \mathfrak{c}'\mathfrak{a}$.

Итакъ, если въ билинеарной формѣ подвергнуть одновременно буквы y преобразованію съ матрицей $\mathfrak{b}$, а буквы x преобразованію съ матрицей $\mathfrak{c}$, то матрица $\mathfrak{a}$ формы обратится въ такую

$$\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

Переходя къ опредѣлителямъ и замѣчая что $|\mathfrak{c}'| = |\mathfrak{c}|$, ибо опредѣлитель не мѣняетъ величины отъ замѣны горизонталей колоннами и обратно, мы можемъ высказать предложеніе:

Опредѣлитель формы получаетъ множителемъ произведеніе опредѣлителей преобразованій буквъ x и буквъ y.

Рангъ билинеарной формы будетъ очевидно инваріантомъ неособеннаго преобразованія перемѣнныхъ x и y.

Билинеарная форма называется *симметрической*, если ея матрица симметрическая, т. е.

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}.$$

§ 32.

Приведемъ въ заключеніе нѣсколько просто доказываемыхъ свойствъ билинеарныхъ формъ.

Если въ симметрической формѣ буквы x и y преобразованы когредіентно, то получается снова симметрическая форма, ибо

$$(\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{c})' = \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

Билинеарная форма

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

тогда и только тогда не измѣняетъ своего вида, если x и y измѣняются контрагредіентно, ибо

$$\mathfrak{c}'.\,1\,.\,\mathfrak{b} = 1,\quad \mathfrak{c}'\mathfrak{b} = 1.$$

Двѣ билинеарныя формы эквивалентны [1]), когда обѣ имѣютъ одинъ и тотъ же рангъ.

Такъ какъ всякая матрица ранга r сводится къ ея эквивалентной, у которой r діагональныхъ элементовъ единицы, всѣ же остальные элементы нули, то всякая билинеарная форма ранга r приводится неособенными, линейными преобразованіями x и y къ нормальному виду

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ry_r.$$

[1]) Переводятся одна въ другую при помощи неособенныхъ линейныхъ преобразованій.

ГЛАВА VII.

Квадратичныя формы.

§ 1.

Мы будемъ представлять самую общую квадратичную форму отъ n перемѣнныхъ независимыхъ въ такомъ видѣ:

$$\sum_1^n a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1}$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

Матрицу коэффиціентовъ

$$\mathfrak{a} = \begin{Vmatrix} a_{11}, & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

мы будемъ называть *матрицей квадратичной формы*, ея опредѣлителя $a = |\mathfrak{a}|$ мы будемъ называть *дискриминантомъ* квадратичной формы, а рангъ матрицы $\mathfrak{a}$ будемъ называть рангомъ самой формы.

На основаніи того, что квадратичную форму можно считать происшедшею изъ билинеарной, въ которой обѣ системы перемѣнныхъ независимыхъ совпадаютъ, мы можемъ утверждать, что, если примѣнить къ квадратичной формѣ линейное преобразованіе

$$x_1 = c_{11}x_1' + \ldots + c_{1n}x_n'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2}$$
$$x_n = c_{n1}x_1' + \ldots + c_{nn}x_n'$$

съ матрицей $c = \| c_{ik} \|$, то квадратичная форма обратится въ новую, матрица которой будетъ

$$a_1 = c'ac, \tag{3}$$

гдѣ c' обозначаетъ матрицу, сопряженную съ c.

На основанiи теоремы [1]) о неизмѣнности ранга матрицы при умноженiи ея на другую неособенную, мы заключаемъ, что *рангъ квадратичной формы не мѣняется отъ неособеннаго линейнаго преобразованiя.*

Переходя отъ матрицъ формулы (3) къ ихъ опредѣлителямъ и замѣчая, что опредѣлитель $|c'|$ сопряженной матрицы не отличается отъ опредѣлителя $|c|$, получаемъ

$$|a_1| = |a| . |c|^2.$$

откуда слѣдуетъ теорема: *Дискриминантъ квадратичной формы есть ея относительный инварiантъ вѣса 2.*

Полярная форма.

§ 2.

Не нарушая общности теорiи квадратичныхъ формъ, когда коэффицiенты остаются произвольными, можно предполагать матрицу формы симметричною, т. е.

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Мы будемъ называть билинеарную форму

$$\sum_1^n a_{ij} y_i z_j \tag{1}$$

полярною формой по отношенiю квадратичной $\sum_1^n a_{ij} x_i x_j$.

Пусть перемѣнныя y и z подвергнуты когредiентно преобразованiю (2) § 1 съ матрицей c, тогда полярная форма (1) преобразуется въ новую

$$\sum_1^n a_{ij}^0 y_i' z_j'.$$

Если при такомъ преобразованiи c сама квадратичная форма (1) § 1 переходитъ въ такую

$$\sum_1^n a_{ij}' x_i' x_j'$$

то можно показать, что

$$a_{ij}^0 = a_{ij}'$$

---

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теорiи чиселъ. Вт. изд. 1913 § 24. Глава XIII.

Въ самомъ дѣлѣ. если мы напишемъ два равенства

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ij}' x_i' x_j' \tag{2}$$

$$\sum a_{ij} y_i z_j = \sum a_{ij}^0 y_i' z_j', \tag{3}$$

то ихъ можно считать за тождества, если подъ x_i, y_i, z_i въ лѣвыхъ частяхъ разумѣть линейныя выраженія черезъ x_i', y_i', z_i'. Тождества не нарушаются, какія бы выраженія ни подставлять вмѣсто входящихъ въ нихъ буквъ. Полагая напримѣръ въ тождествѣ (3)

$$y_i' = x_i',\ z_i' = x_i' \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

получимъ

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ij}^0 x_i' x_j'.$$

Отсюда, сравнивая съ (2), получимъ *тождество*

$$\sum a_{ij}' x_i' x_j' = \sum a_{ij}^0 x_i' x_j'. \tag{4}$$

Сравнивая въ тождествѣ (4) коэффиціенты при одинаковыхъ буквенныхъ выраженіяхъ, получимъ

$$a_{ii}^0 = a_{ii}',\ a_{ij}^0 + a_{ji}^0 = a_{ij}' + a_{ji}'.$$

Но мы знаемъ, что при когредіентномъ преобразованіи симметрическая билинеарная форма обращается также въ симметрическую; тоже самое будетъ имѣть, очевидно, мѣсто и для квадратичной формы; слѣдовательно,

$$a_{ij}^0 = a_{ji}^0,\ a_{ij}' = a_{ji}'.$$

Итакъ окончательно,

$$a_{ij}^0 = a_{ij}'.$$

Мы пришли такимъ образомъ къ теоремѣ:

Полярная форма есть абсолютный коваріантъ квадратичной формы и двухъ точекъ $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Двойная точка квадратичной формулы.

§ 3.

Подъ названіемъ *двойной точки* или *вершины* квадратичной формы $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ разумѣется точка $(c_1, c_2, \ldots c_n)$, для которой не всѣ c обращаются въ нуль, но для которой имѣетъ *тождество*

$$\Sigma a_{ij} x_i c_j = 0. \tag{1}$$

Если равенство (1) есть тождество относительнѣ x_i, то полагая $x_i = c_i$, получимъ новое тождество

$$\Sigma a_{ij} c_i c_j = 0\,,$$

выражающее такое свойство

Квадратичная форма обращается въ нуль во всѣхъ ея двойныхъ точкахъ

Приравнивая нулю въ тождествѣ (1) коэффициенты при всѣхъ x_i, получимъ рядъ тождествъ

$$a_{11}c_1 + \quad + a_{1n}c_n = 0$$

$$a_{n1}c_1 + . \quad + a_{nn}c_n = 0\,.$$

Такъ какъ опредѣлитель послѣдней системы есть дискриминантъ квадратичной формы, то мы приходимъ къ теоремѣ.

Квадратичная форма можетъ имѣть тогда и только тогда двойныя точки, если ея дискриминантъ равенъ нулю Пусть r будетъ рангъ квадратичной формы, то она имѣетъ $n - r$ линейно независимыхъ двойныхъ точекъ. Линейно зависимыя отъ послѣднихъ точки будутъ также двойныя.

Если дискримeнантъ квадратной формы равенъ нулю, то точка $(A_{i1}, A_{i2}, . \; . A_{in})$ будетъ двойная, если не всѣ ея координаты обращаются въ нуль. Здѣсь подъ A_{ik} мы разумѣемъ алгебраическое дополненіе элемента a_{ik} матрицы формы (см § 41 глава IV).

Разложеніе на сумму квадратовъ.

§ 4.

Всякую квадратичную форму можно представить въ видѣ алгебраической суммы квадратовъ независимыхъ между собой линейныхъ функцій

Для доказательства этой теоремы мы примѣнимъ методу Gauss'a, дающую непосредственно искомое разложеніе Предположимъ, что заданная квадратичная форма заключаетъ квадратъ какой нибудь перемѣнной, напримѣръ x_1, такъ что она имѣетъ видъ

$$f = a_1 x_1^2 +$$

Если x_1 не входитъ въ остальные члены, то мы можемъ сказать. что первая изъ искомыхъ линейныхъ функцій есть ничто иное какъ x_1, и такимъ образомъ выдѣленъ квадратъ этой первой функціи. Если же первая степень x_1 входитъ въ нѣсколькихъ членахъ, то, взявъ ее за скобку, получимъ

(1) $$f = a_1 x_1^2 + 2P_1 x_1 + Q_1\,.$$

гдѣ P_1 линейная форма, а Q_1 квадратичная форма отъ остальныхъ буквъ $x_2, x_3, \ldots x_n$. Тогда форму (1) можно переписать такъ

$$f = \alpha_1\left(x_1 + \frac{P_1}{\alpha_1}\right)^2 + Q_1 - \frac{1}{\alpha_1} P_1^2.$$

Обозначая

$$Q_1 - \frac{1}{\alpha_1} P_1^2 = f',$$

получимъ

$$f = \alpha_1 X_1^2 + f',$$

гдѣ

$$X_1 = x_1 + \frac{1}{\alpha_1} P_1$$

есть линейная форма, а f' есть квадратичная форма отъ $n-1$ остальныхъ буквъ $x_2, x_3, \ldots x_n$.

Совершенно подобнымъ же образомъ, если въ форму f' входитъ квадратъ какой нибудь буквы, напримѣръ x_2, то будемъ имѣть

$$f' = \alpha_2 x_2^2 + \ldots$$

Въ этой функціи можно выдѣлить квадратъ новой линейной функціи

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{\alpha_2} P_2,$$

гдѣ P_2 будетъ нѣкоторая линейная форма отъ $n-2$ буквъ $x_2, x_3, \ldots x_n$.

Предположимъ, что, продолжая такимъ образомъ далѣе, мы исчерпали послѣ k выдѣленій квадратовъ всѣ члены нашей квадратичной формы, тогда мы получаемъ слѣдующее представленіе нашей формы въ видѣ алгебраической суммы квадратовъ линейныхъ функцій

$$f = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \ldots + \alpha_k X_k^2.$$

Остается показать, что полученныя такимъ образомъ линейныя функціи $X_1, X_2, \ldots X_k$ суть независимыя между собою функціи.

Въ самомъ дѣлѣ, по способу послѣдовательнаго вычисленія этихъ функцій мы замѣчаемъ, что онѣ имѣютъ такой видъ:

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_1 + g_1^{(2)} x_2 + g_1^{(3)} x_3 + \ldots \\
X_2 &= \ldots\ldots x_2 + g_2^{(3)} x_3 + \ldots\ldots \\
X_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots x_3 + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_k &= \ldots\ldots\ldots\ldots x_k + g_k^{(k+1)} x_{k+1} + \ldots
\end{aligned}$$

Независимость этихъ функцій слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что опредѣлитель, соотвѣтствующій перемѣннымъ независимымъ, отличенъ отъ нуля, ибо онъ имѣетъ видъ

$$\begin{array}{ccccc} 1 & g_1^{(2)} & g_1^{(3)} & . & \\ 0 & 1 & g_2^{(3)} & & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

§ 5.

Соображенія § 4 требуютъ нѣкотораго добавленія, ибо можетъ случиться, что послѣ выдѣленія нѣсколькихъ квадратовъ остается такая квадратичная форма, въ которой нѣтъ ни одного квадрата перемѣнной.

Тогда дальнѣйшее выдѣленіе квадратовъ будетъ совершаться нѣсколько иначе. Возьмемъ квадратичную форму φ, которая не заключаетъ ни одного квадрата, а, значитъ, каждая буква входитъ въ эту форму въ первой степени. Разсмотримъ какія нибудь двѣ изъ независимыхъ перемѣнныхъ формы φ и обозначимъ ихъ для сокращенія x и y; тогда

$$\varphi = axy + Px + Qy + R, \tag{1}$$

гдѣ P и Q линейныя формы отъ остальныхъ буквъ, а R квадратичная форма, отъ тѣхъ же буквъ. Можемъ написать

$$\varphi = \frac{1}{a}(ax + Q)(ay + P) + R - \frac{1}{a}PQ.$$

Нетрудно видѣть, что

$$ax + Q, \quad ay + P$$

суть частныя производныя отъ функціи φ по x и по y, т. е.

$$\varphi_x' = ay + P, \quad \varphi_y' = ax + Q,$$

значитъ

$$\varphi = \frac{1}{a}\varphi_x'\varphi_y' + T,$$

гдѣ

$$T = R - \frac{1}{a}PQ$$

или иначе

$$\varphi = \frac{1}{a}\left(\frac{\varphi_x' + \varphi_y'}{2}\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{\varphi_x' - \varphi_y'}{2}\right)^2 + T.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ сразу выдѣляются два квадрата отъ линейныхъ функцій

$$\frac{\varphi_x' + \varphi_y'}{2}, \quad \frac{\varphi_x' - \varphi_y'}{2}.$$

Дальнѣйшее выдѣленіе квадратовъ въ квадратичной формѣ T будетъ продолжаться уже по указаннымъ пріемамъ. Необходимо только убѣдиться, что указанное въ настоящемъ параграфѣ видоизмѣненіе способа выдѣленія квадратовъ оставляетъ отличнымъ отъ нуля главный опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ первыхъ k перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ получаемъ двѣ такихъ горизонтали этого опредѣлителя

$$\begin{matrix} 0, & 0, & \ldots & 0, & \frac{a}{2}, & \frac{a}{2}, \\ 0, & 0, & & 0, & -\frac{a}{2}, & \frac{a}{2}, \ldots \end{matrix} \qquad (2)$$

Если мы ко второй строкѣ (2) прибавимъ первую, то получимъ двѣ такихъ строки

$$\begin{matrix} 0, & 0, & & 0, & \frac{a}{2}, & \frac{a}{2}, & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots & 0, & 0, & a, & \ldots \end{matrix}$$

такъ что и при послѣднемъ способѣ выдѣленія квадратовъ главный опредѣлитель будетъ отличенъ отъ нуля, потому что его можно преобразовать такимъ образомъ, что всѣ элементы ниже главной діагонали будутъ равны нулю, а въ элементахъ главной діагонали будутъ появляться пары отличныхъ отъ нуля элементовъ вида $\frac{a}{2}$, a.

Итакъ, можно считать доказаннымъ утвержденіе о возможности представить квадратичную форму въ видѣ алгебраической суммы квадратовъ линейныхъ формъ.

Такое представленіе квадратичной формы является простѣйшимъ ея видомъ и даетъ возможность доказать нѣкоторыя важныя предложенія, относящіяся къ квадратичнымъ формамъ. Мы остановимся на нѣсколькихъ самыхъ важныхъ теоремахъ такого рода.

§ 6.

Если квадратичная форма раскладывается на k квадратовъ независимыхъ между собою функцій, то рангъ дискриминанта долженъ равняться числу k.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$f = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \ldots + \alpha_k X_k^2, \qquad (1)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} X_1 &= b_1^{(1)}x_1 + b_1^{(2)}x_2 + \ldots + b_1^{(k)}x_k + \ldots \\ X_2 &= b_2^{(1)}x_1 + b_2^{(2)}x_2 + \ldots + b_2^{(k)}x_k + \ldots \\ &\ldots \\ X_k &= b_k^{(1)}x_1 + b_k^{(2)}x_2 + \ldots + b_k^{(k)}x_k + \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

Если функціи (2) независимыя, то главный опредѣлитель этихъ функцій долженъ быть порядка k. Пусть перемѣнныя независимыя такъ обозначены, что этотъ главный опредѣлитель будетъ опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при k первыхъ буквахъ, т. е.

$$D = \begin{vmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \ldots & b_1^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_k^{(1)} & b_k^{(2)} & \ldots & b_k^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Подставляемъ выраженія формъ (2) въ функцію (1) и составляемъ выраженія для частныхъ производныхъ отъ формы f:

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 b_1^{(1)} X_1 + \alpha_2 b_2^{(1)} X_2 + \ldots + \alpha_k b_k^{(1)} X_k, \\ &\ldots \\ f_k &= \alpha_1 b_1^{(k)} X_1 + \alpha_2 b_2^{(k)} X_2 + \ldots + \alpha_k b_k^{(k)} X_k, \\ f_{k+1} &= \alpha_1 b_1^{(k+1)} X_1 + \alpha_2 b_2^{(k+1)} X_2 + \ldots + \alpha_k b_k^{(k+1)} X_k, \\ &\ldots \\ f_n &= \alpha_1 b_1^{(n)} X_1 + \alpha_2 b_2^{(n)} X_2 + \ldots + \alpha_k b_k^{(n)} X_k. \end{aligned}$$

Послѣднія формулы показываютъ, что среди n частныхъ производныхъ $f_1, f_2, \ldots f_n$ будетъ не больше k независимыхъ между собой, ибо всѣ эти частныя производныя выражаются линейно черезъ k перемѣнныхъ

$$X_1, X_2, \ldots X_k;$$

число же независимыхъ функцій, какъ мы видѣли раньше, не можетъ превосходить числа перемѣнныхъ независимыхъ.

Нетрудно видѣть, что за независимыя между собою частныя производныя можно будетъ принять функціи

$$f_1, f_2, \ldots f_k, \qquad (3)$$

ибо будетъ отличенъ отъ нуля опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ этихъ функцій при независимыхъ перемѣнныхъ $X_1, X_2, \ldots X_k$ Этотъ опредѣлитель, очевидно, равенъ

$$a_1 a_2 \ldots a_k D \neq 0,$$

значитъ, можно будетъ выразить буквы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ линейнымъ образомъ черезъ $f_1, f_2, \ldots f_k$. Подставляя полученныя выраженія въ слѣдующія функціи

$$f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots f_n,$$

мы выразимъ окончательно всѣ частныя производныя черезъ k независимыхъ между собою функцій (3)

Итакъ, очевидно, что система частныхъ производныхъ имѣетъ рангъ k, что и требовалось доказать.

§ 7.

Изъ теоремы предыдущаго параграфа слѣдуетъ такое предположеніе:

Если дискриминантъ формы отличенъ отъ нуля, то форма раскладывается на n квадратовъ независимыхъ между собою линейныхъ функцій, если n есть число всѣхъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Кромѣ того:

Если дискриминантъ равенъ нулю, то число независимыхъ квадратовъ должно быть меньше числа независимыхъ перемѣнныхъ, и квадратовъ будетъ столько, каковъ рангъ квадратичной формы.

Какъ частный случай этой теоремы является теорема о дискриминантѣ тройничной квадратичной формы, играющая важную роль въ Аналитической Геометріи при разсмотрѣніи линій 2-го порядка.

Тамъ доказывается теорема, что равенство нулю дискриминанта есть необходимое и достаточное условіе, чтобы линія 2-го порядка обращалась въ систему двухъ прямыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы перейдемъ къ однороднымъ координатамъ, то уравненіе линіи 2-го порядка будетъ

$$f(x, y, z) = 0,$$

гдѣ первая часть есть тройничная квадратичная форма отъ однородныхъ координатъ x, y, z. Если дискриминантъ не равенъ нулю, то первая часть раскладывается на 3 квадрата; если же дискриминантъ равенъ нулю, то число квадратовъ будетъ меньше: или одинъ, или два, такъ что наше уравненіе можетъ быть переписано въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ.

$$X_1^2 = 0$$

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 = 0$$

то второе уравненіе можно переписать такъ

$$(\sqrt{\alpha_1}X_1+i\sqrt{\alpha_2}X_2)(\sqrt{\alpha_1}X_1-i\sqrt{\alpha_2}X_2)=0,$$

слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ форма раскладывается на два линейныхъ множителя, т. е., другими словами, получается система двухъ прямыхъ.

Законъ инерціи квадратичныхъ формъ.

§ 8.

Если квадратичная форма съ вещественными коэффиціентами отъ n перемѣнныхъ независимыхъ раскладывается на n квадратовъ независимыхъ линейныхъ функцій

$$f=\alpha_1X_1^2+\alpha_2X_2^2+\ldots+\alpha_nX_n^2$$

и эти квадраты имѣютъ коэффиціенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ одного знака, то эта форма сохраняетъ общій знакъ при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ независимыхъ перемѣнныхъ и можетъ обращаться въ нуль, когда обращаются сразу въ нуль всѣ эти квадраты, т. е.

$$(1)\qquad X_1=0,\ X_2=0,\ \ldots X_n=0.$$

Нетрудно видѣть, что равенства (1) имѣютъ мѣсто, когда всѣ перемѣнныя обращаются въ нуль

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots x_n=0.$$

ибо опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ не нуль.

Будемъ этотъ очевидный случай обращенія въ нуль формы при равныхъ нулю значеніяхъ всѣхъ перемѣнныхъ независимыхъ отбрасывать, такъ что, если мы будемъ говорить, что нѣкоторая форма обращается въ нуль, то подъ этимъ будемъ разумѣть тотъ случай, когда форма дѣлается равной нулю при отличныхъ отъ нуля значеніяхъ x независимыхъ перемѣнныхъ. При такой оговоркѣ мы введемъ слѣдующія названія: будемъ форму называть *опредѣленною*, если она сохраняетъ свой знакъ, не обращаясь въ нуль; будемъ форму называть *полуопредѣленною*, если она сохраняетъ свой знакъ, но можетъ обращаться въ нуль; и, наконецъ, назовемъ форму *неопредѣленною*, если она можетъ мѣнять свой знакъ.

Опредѣленныя формы мы разобьемъ въ свою очередь на формы *положительныя* и *отрицательныя* въ зависимости отъ того, какой знакъ эта форма сохраняетъ. Очевидно, что форма будетъ опредѣленною, если всѣ коэффиціенты α_i одного знака и число квадратовъ есть n; форма будетъ полуопредѣленною, если всѣ коэффиціенты одного знака, но число

квадратовъ меньше n, потому что въ этомъ случаѣ всѣ эти квадраты можно будетъ обратить въ нуль, оставляя нѣкоторыя перемѣнныя независимыя совершенно произвольными; и, наконецъ, форма будетъ неопредѣленною, если коэффиціенты a_i будутъ разныхъ знаковъ, потому что въ этомъ случаѣ мы получимъ положительное значеніе для формы, если приравняемъ нулю всѣ квадраты съ отрицательными коэффиціентами, и получимъ отрицательное значеніе, если приравняемъ нулю всѣ квадраты съ положительными коэффиціентами

§ 9.

Относительно вещественныхъ формъ имѣетъ мѣсто замѣчательный законъ, названный Sylvester'омъ закономъ инерціи.

Если мы назовемъ черезъ r число квадратовъ съ положительными коэффиціентами неопредѣленной формы, а черезъ s число квадратовъ съ отрицательными коэффиціентами той же формы, то эти числа остаются неизмѣнными, какимъ бы образомъ ни раскладывать форму на сумму n квадратовъ.

Допустимъ обратное, а именно, что форма разлагается двумя способами на k квадратовъ

$$(1)\quad \begin{aligned} &\alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 - \alpha_1' X_1'^2 - \alpha_2' X_2'^2 \ldots - \alpha_s' X_s'^2 = \\ &= \beta_1 Y_1^2 + \ldots + \beta_\rho Y_\rho^2 - \beta_1' Y_1'^2 - \beta_2' Y_2'^2 - \ldots \quad \beta_\sigma' Y_\sigma'^2, \end{aligned}$$

причемъ всѣ коэффиціенты α, α', β, β' положительныя числа, а

$$r < \rho,\ r + s = k,\ \rho + \sigma = k,\ k \leqslant n.$$

Разсмотримъ уравненія

$$(2)\quad \begin{aligned} &X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots X_r = 0 \\ &Y_1' = 0,\ Y_2' = 0,\ \ldots Y_\sigma' = 0. \end{aligned}$$

Если мы обозначимъ черезъ n общее число первоначальныхъ независимыхъ x_i, линейными формами которыхъ являются всѣ X, X', Y, Y, то изъ неравенствъ

$$r + \sigma < \rho + \sigma \leqslant n$$

замѣчаемъ, что линейныя уравненія (2) оставляютъ произвольными по крайней мѣрѣ $n - r - \sigma$ перемѣнныхъ независимыхъ x_i. Подставляя въ тождество (1) значенія x_i, удовлетворяющія уравненіямъ (2), получаемъ

$$\beta_1 Y_1^2 + \ldots + \beta_\rho Y_\rho^2 = -\alpha_1' X_1'^2 - \alpha_2' X_2'^2 - \ldots - \alpha_s' X_s'^2,$$

которое не иначе возможно, если всѣ Y и X' равны нулю

Итакъ, уравненія

(3) $$Y_1=0, \ldots Y_\rho=0$$

должны удовлетворяться при всѣхъ значеніяхъ x_i, удовлетворяющихъ уравненіямъ (2). Обозначимъ черезъ q число остающихся независимыми изъ x_i. Всѣ линейныя функціи Y, Y' суть независимыя между собой, значитъ, система уравненій

$$Y_1'=0, \ldots Y_\sigma'=0; \; Y_1=0, \ldots Y_\rho=0$$

имѣемъ рангъ, точно равный $\rho+\sigma$, значитъ

$$q \leqq n-\rho-\sigma.$$

Съ другой стороны самое общее рѣшеніе системы (2) будетъ имѣть не менѣе $n-r-\sigma$ независимыхъ величинъ, откуда

$$n-r-\sigma \leqq n-\rho-\sigma,$$

и мы приходимъ къ неравенству $\rho \leqq r$, находящемуся въ противорѣчіи съ допущеннымъ $r<\rho$

§ 10.

Если обозначить черезъ P число положительныхъ квадратовъ, а черезъ N число отрицательныхъ квадратовъ, то очевидно, что эти два числа суть ариѳметическіе инваріанты относительно линейныхъ преобразованій съ вещественными коэффиціентами.

Сумма этихъ чиселъ равна общему числу квадратовъ, то есть рангу r формы

$$P+N=r.$$

Введемъ по примѣру Frobenius'а въ разсмотрѣніе еще ихъ разность

$$P-N=s,$$

которую будемъ называть *сигнатурой* формы.

Рангъ r есть ариѳметическій инваріантъ формы по отношенію ко всевозможнымъ какъ вещественнымъ, такъ и мнимымъ неособеннымъ преобразованіямъ; сигнатура есть инваріантъ по отношенію къ вещественнымъ неособеннымъ преобразованіямъ.

§ 11.

Будемъ разсматривать квадратичныя формы въ общемъ видѣ, не ограничиваясь вещественными числами. Если рангъ формы есть r, то можно, какъ мы видѣли, привести ее къ виду

(1) $$a_1X_1^2+a_2X_2^2+\ldots+a_2X_r^2.$$

Эти функціи $X_1, X_2, \ldots X_r$ независимы между собой, т. е. уравненія

(2) $$X_1=0,\ X_2=0,\ \ldots X_r=0$$

можно рѣшить относительно r величинъ x_i; выбирая приличнымъ образомъ обозначенія, мы можемъ сказать, что уравненія (2) рѣшаются относительно

$$x_1,\ x_2,\ \ldots x_r.$$

Пусть функціи X имѣютъ видъ

$$X_1=a_1^{(1)}x_1+\ldots+a_r^{(1)}x_r+a_{r+1}^{(1)}x_r+\ldots+a_n^{(1)}x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_r=a_1^{(r)}x_1+\ldots+a_r^{(r)}x_r+a_{r+1}^{(r)}x_r+\ldots+a_n^{(r)}x_n.$$

Ихъ главный опредѣлитель

$$A=\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_r^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(r)} & \ldots & a_2^{(r)} \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю

Можно сказать, что заданная форма приводится къ виду (1), представляющему сумму квадратовъ, при помощи такого *неособеннаго* преобразованія

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1^{(1)}x_1+\ldots+a_r^{(1)}x_r+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_q &= a_1^{(r)}x_1+\ldots+a_r^{(r)}x_r+\ldots \\ X_{r+1} &= x_{r+1} \\ &\ldots\ldots \\ X_n &= x_n, \end{aligned}$$

гдѣ $X_i=x_i$ при $i>r$.

Очевидно, что отъ вида (1) можно перейти къ виду

$$k_1X_1'^2+k_2X_2'^2+\ldots+k_rX_r'^2,$$

гдѣ $k_1, \ldots k_r$ произвольно выбранныя числа, при помощи преобразованія

$$X_1=\sqrt{\frac{k_1}{\alpha_1}}X_1',\ \ldots\ X_r=\sqrt{\frac{k_r}{\alpha_r}}X_r',\ X_{r+1}=X_{r+1}',\ \ldots\ X_n=X_n'.$$

Приходимъ окончательно къ теоремѣ.

Всякая квадратичная форма ранга r приводится при помощи неособеннаго преобразованія къ нормальному виду

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2;$$

ибо можно положить $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 1$.

Приспособляясь къ терминологіи главы VI, можно будетъ высказать теорему.

Двѣ квадратичныя формы тогда и только тогда эквивалентны по отношенію къ группѣ неособенныхъ линейныхъ преобразованій, когда онѣ имѣютъ одинъ и тотъ же рангъ.

Ибо онѣ сводятся къ одному и тому же нормальному виду.

§ 12.

Разсмотримъ квадратичную форму *буквеннаго* вида, т. е. такую, въ которой всѣ коэффиціенты суть перемѣнныя независимыя между собой. Въ этомъ случаѣ соображенія § 5 не имѣютъ мѣста и, слѣдовательно, слѣдуя § 4, мы получимъ

(1) $$f = \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 X_2^2 + \ldots + \alpha_n X_n^2,$$

гдѣ

(2) $$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + g_1^{(2)} x_2 + \ldots + g_1^{(n)} x_n \\ X_2 &= \quad\;\; x_2 + \ldots + g_2^{(n)} x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= \qquad\qquad\qquad\quad x_n. \end{aligned}$$

Главный опредѣлитель системы (2) равенъ 1.

Дискриминантъ Δ_n формы f будетъ равенъ, очевидно, произведенію $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$; ибо дискриминантъ относительно перемѣнныхъ $X_1, X_2, \ldots X_n$ есть какъ разъ произведеніе $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, этотъ же дискриминантъ надо будетъ помножить на квадратъ опредѣлителя преобразованія (2).

Итакъ

$$\Delta_n = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Если мы оставимъ отличными отъ нуля только перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_{n-i}$, остальныя же приравняемъ нулю

(3) $$x_{n-i+1} = 0,\; x_{n-i+2} = 0,\; \ldots x_n = 0,$$

то форма приводится къ виду

(4) $$f^0 = \alpha_1 X_1^{02} + \ldots + \alpha_{n-i} X^{02}_{n-i},$$

гдѣ X^0 выражаетъ результатъ подстановки величинъ (3) въ функціи X. Обозначимъ дискриминантъ формы (4) черезъ Δ_{n-i}. Нетрудно видѣть, что этотъ дискриминантъ есть миноръ порядка i отъ Δ_n, въ которомъ сохранены $n-i$ верхнихъ горизонталей и $n-i$ лѣвыхъ колоннъ. На основаніи (4) мы имѣемъ

(5) $$\Delta_{n-i} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-i}$$

Примѣняя формулу (5) къ различнымъ значеніямъ i отъ $n-1$ до 0, получимъ

$$\Delta_1 = \alpha_1,\ \Delta_2 = \alpha_1\alpha_2,\ \Delta_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ \ldots \Delta_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

откуда

$$\alpha_1 = \Delta_1,\ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\ \ldots \alpha_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Мы получаемъ слѣдующую, заслуживающую вниманія формулу

(6) $$f = \Delta_1 X_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} X_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} X_3^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} X_n^2.$$

Мы предполагали коэффиціенты формы f неопредѣленными; очевидно, что формула (6) будетъ оставаться справедливой и въ томъ случаѣ, если коэффиціентамъ первоначальнаго вида формы приданы нѣкоторыя численныя значенія, лишь бы не обращался въ нуль ни одинъ опредѣлитель

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \ldots\ \Delta_n.$$

§ 13

Приведемъ теперь весьма важное замѣчаніе относительно преобразованія квадратичныхъ формъ, принадлежащее Kronecker'у. Обозначимъ черезъ $f_1, f_2, \ldots f_n$ частныя производныя отъ заданной квадратичной формы f по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Очевидно, что если рангъ квадратичной формы есть r, то независимыхъ между собой частныхъ производныхъ будетъ равно r; пусть это будутъ $f_1, f_2, \ldots f_r$.

Если мы предположимъ, что система

(1) $$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots\ f_r = 0$$

рѣшается относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_r$, то для нихъ получаются выраженія черезъ остальныя $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n$, которыя остаются совершенно произвольными. Дадимъ этимъ послѣднимъ величинамъ произвольно выбранныя значенія

$$x_{r+1} = \xi_{r+1},\ x_{r+2} = \xi_{r+2},\ \ldots x_n = \xi_n.$$

Изъ уравненій (1) получаются значенія

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$$

для буквъ $x_1, x_2, \ldots x_r$, эти значенія суть линейныя функціи отъ ξ_{r+1} $\xi_{r+2}, \ldots \xi_n$.

Kronecker разсматриваетъ преобразованіе

$$x_1 = X_1 + \xi_1, \quad x_2 = X_2 + \xi_2, \ldots x_r = X_r + \xi_r$$

$$x_{r+1} = \xi_{r+1} \quad , x_{r+2} = \xi_{r+2} \quad , \quad . x_n = \xi_n .$$

Такимъ образомъ

$$f(x_1 . x_2 \ldots x_n) = f(X_1 + \xi_1, \; X_2 + \xi_2, \ldots X_r + \xi_r, \; 0 + \xi_{r+1}, \; 0 + \xi_{r+2}, \ldots 0 + \xi_n)$$

Примѣняя формулу Taylor'a, получимъ

$$(2) \qquad f(x, x_2, \ldots x_n) = f(X_1, X_2, \ldots X_r, 0, 0, \ldots 0).$$

Въ самомъ дѣлѣ, величины ξ_i обращаютъ въ нуль всѣ частныя производныя $f_1, f_2, \ldots f_n$, ибо эти величины обращаютъ въ нуль частныя производныя $f_1, f_2, \ldots f_r$ (уравненія (1)), остальныя же частныя производныя $f_{r+1}, \ldots f_n$ также обращаются въ нуль, ибо онѣ выражаются линейно черезъ $f_1, f_2, \ldots f_r$. Значитъ, обращаются независимо отъ значеній $X_1, X_2, \ldots X_r$ въ нуль оба выраженія

$$X_1 f_1 + X_2 f_2 + \ldots + X_r f_r$$

$$f = \frac{1}{2}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n).$$

Итакъ, формула Kronecker'a (2) оказывается справедливою.

§ 14.

Въ связи съ разложеніемъ квадратичной формы на сумму квадратовъ, можно показать, что дискриминантъ есть единственный независимый инваріантъ квадратичной формы. Мы докажемъ теорему.

Всякій цѣлый раціональный инваріантъ квадратичной формы отличается постояннымъ множителемъ отъ степени дискриминанта.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая, когда дискриминантъ не равенъ нулю.

Обозначимъ черезъ c опредѣлитель преобразованія заданной формы $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ въ сумму квадратовъ $x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2$

Пусть разсматривается цѣлый раціональный инваріантъ

(1) $$I(a_{11}, \ldots a_{nn})$$

формы $\Sigma a_{ij}x_ix_j$, имѣющій вѣсъ k. Обозначимъ черезъ I_0 значеніе того же инваріанта для преобразованной формы. I_0 получается изъ выраженія (1), если подставить $a_{ii}=1$, $a_{ji}=0$. По свойству инваріанта получаемъ

(2) $$I_0=c^kI(a_{11}, \ldots a_{nn}).$$

Но мы знаемъ, что дискриминантъ $A=|a_{ij}|$ формы есть инваріантъ вѣса 2, и кромѣ того, что A обращается въ 1 для преобразованной формы $x_1'^2+\ldots+x_n'^2$; то получаемъ

(3) $$1=c^2A$$

Возвышая (2) въ квадратъ и (3) въ степень k, и исключая c, получимъ

(4) $$[I(a_{11}, \ldots a_{nn})]^2=I_0^2A^k.$$

Послѣднее равенство есть тождество, какъ слѣдствіе двухъ тождествъ. Тождество (4) имѣетъ степень k относительно a_{11}. Очевидно, что эта степень должна быть четная, то есть $k=2l$. Извлекая корень квадратный, мы получаемъ одно изъ двухъ

$$I(a_{11}, \ldots a_{nn})=I_0A^l,\quad I(a_{11}, \ldots a_{nn})=-I_0A^l,$$

и теорема доказана.

Эта теорема показываетъ, что полной системой инваріантовъ въ смыслѣ § 28 главы VI является для квадратичной формы одинъ только дискриминантъ.

§ 15.

Квадратичная форма будетъ *приводимою*, если она раскладывается на два линейныхъ множителя

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j=(b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n)(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n).$$

Эти множители могутъ быть одинаковы, тогда форма будетъ равна квадрату линейной формы

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j=(b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n)^2.$$

Такъ какъ въ первомъ случаѣ форма раскладывается на два квадрата

$$\left\{\frac{b_1+c_1}{2}x_1+\ldots\right\}^2-\left\{\frac{b_1-c_1}{2}x_1+\ldots\right\}^2,$$

а во второмъ на одинъ, то мы получаемъ теорему.

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ приводимости формы является требованіе, чтобы рангъ не превосходилъ числа 2.

Союзная форма.

§ 16.

Придадимъ изложенію геометрическій характеръ [1]. Будемъ разсматривать *сверхповерхность второго порядка,* опредѣляемую уравненіемъ

(1) $$\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$$

въ пространствѣ $n-1$ измѣренія, въ которомъ каждая точка опредѣляется n однородными координатами

(2) $$(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Возьмемъ еще одну точку

(3) $$(y_1, y_2, \ldots y_n)$$

пространства.

Координаты точки, дѣлящей въ отношеніи λ разстояніе между точками (2) и (3), будутъ

(4) $$(y_1 + \lambda x_1, y_2 + \lambda x_2, \ldots y_n + \lambda x_n)$$

Если $\lambda > 0$, то точка (4) лежитъ на прямой, соединяющей точки (2) и (3) внутри отрѣзка между этими точками.

Такъ напримѣръ, при $\lambda = 1$ получается средина отрѣзка.

Чтобы найти точки, въ которыхъ пересѣкается сверхповерхность (1) съ прямою, соединяющею точки x_i и y_i, надо будетъ найти λ изъ квадратнаго уравненія

$$\Sigma a_{ij}(y_i + \lambda x_i)(y_j + \lambda x_j) = 0,$$

которое можно переписать еще такъ

(5) $$\Sigma a_{ij}y_iy_j + 2\lambda\Sigma a_{ij}y_ix_j + \lambda^2\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0.$$

Если точка y лежитъ на сверхповерхности (1), то $\Sigma a_{ij}y_iy_j = 0$, и уравненіе (5) имѣетъ одинъ корень $\lambda = 0$. Если кромѣ того еще имѣетъ мѣсто равенство

(6) $$\Sigma a_{ij}y_ix_j = 0,$$

---

[1] Можно сравнить Д. Граве. Основы Аналитической Геометріи. Часть I глава XII.

то уравненіе (5) имѣетъ двухкратный корень $\lambda = 0$. Въ этомъ случаѣ прямая, соединяющая точки x_i и y_i, касается въ точкѣ y_i съ (1). Уравненіе (6), когда заданы координаты y_i точки, лежащей на сверхповерхности (1), будетъ уравненіемъ такъ называемой *касательной гиперплоскости*; точка y_i будетъ называться ея *точкой касанія*. Первую часть уравненія касательной сверхплоскости составляетъ, какъ мы видимъ, полярная форма.

§ 17.

Введемъ подобно тому, какъ это дѣлается для трехмѣрнаго пространства, *плоскостныя координаты* $u_1 u_2 \ldots u_n$.

Пусть разсматривается уравненіе

$$(1) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n = 0$$

нѣкоторой перемѣнной сверхплоскости. Мѣняя параметры $u_1, u_2, \ldots u_n$, заставимъ сверхплоскость мѣнять свое положеніе въ пространствѣ.

Если мы желаемъ разсматривать сверхповерхность $\Sigma a_{ij}x_ix_j = 0$, какъ огибающую плоскость (1), то мы должны выразить условіе того, что уравненіе (1) есть уравненіе касательной сверхплоскости; сравнивая съ уравненіемъ (6) § 16, мы получаемъ слѣдующій рядъ уравненій

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n &= \lambda u_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{n2}y_n &= \lambda u_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n &= \lambda u_n, \end{aligned}$$

гдѣ λ произвольный множитель пропорціональности. Если къ уравненіямъ (2) мы присоединимъ еще уравненіе

$$(3) \qquad u_1y_1 + u_2y_2 + \ldots + u_ny_n = 0,$$

выражающее, что точка касанія $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ лежитъ на касательной сверхплоскости; то, исключая изъ $n+1$ уравненія (2) и (3) $n+1$ однородно входящихъ величинъ $y_1, y_2, \ldots y_n, \lambda$, получимъ уравненіе сверхповерхности второго порядка

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} & u_2 \\ \ldots & & & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

въ плоскостныхъ координатахъ.

Мы видимъ, что въ лѣвой части уравненія (4) находится квадратичная форма

(6) $$-\Sigma A_{ij}u_iu_j$$

относительно плоскостныхъ координатъ u_i, коэффиціентами которой являются алгебраическія дополненія A_{ij} соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ a_{ij} первоначальной формы.

Форма (5) называется *союзною* относительно первоначальной формы

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j.$$

Матрица союзной формы будетъ взаимною (см. § 39 главы IV) относительно первоначальной

§ 17.

Разсмотримъ линейное преобразованіе

$$\xi = \alpha(\xi'),$$

тогда обратное преобразованіе

$$\xi' = \alpha^{-1}(\xi)$$

приводитъ къ обратной матрицѣ

$$\alpha^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{a}, & \ldots & \frac{A_{n1}}{a} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{a}, & \ldots & \frac{A_{nn}}{a} \end{Vmatrix}, \text{ гдѣ } a = |\alpha|.$$

Квадратичная форма съ обратной матрицей носитъ названіе *обратной* квадратичной формы. Принимая во вниманіе предположеніе о *симметричности* матрицы формы, мы приходимъ къ заключенію, что обратная матрица отличается лишь множителемъ $\frac{1}{a}$ отъ союзной.

Квадратичная форма съ неособенной матрицей можетъ быть преобразована въ обратную при помощи неособеннаго преобразованія:

(1) $$x_i' = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ тождество

(2) $$\Sigma a_{ij}x_ix_j = \Sigma x_ix_i'.$$

Обращая преобразованіе (1), получаемъ

$$x_i = \frac{1}{a}[A_{i1}x_1' + \ldots + A_{in}x_n'];$$

откуда, подставляя въ (2), находимъ

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j = \frac{1}{a} \Sigma A_{ij} x_i' x_j'.$$

Если заданная квадратная форма вещественна, то вещественно также и преобразованіе (1) и, слѣдовательно, *сигнатура обратной формы одинакова съ сигнатурой заданной.*

§ 18.

Теорема. Союзная форма $\Sigma A_{ij} u_i u_j$ есть инваріантъ вѣса 2 системы двухъ формъ

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j, \quad \Sigma u_i x_i$$

Разсмотримъ квадратичную форму

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2t(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n)$$

отъ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2 \ldots x_n, t$.

Ея дискриминантъ равенъ какъ разъ союзной формѣ

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix}$$

Пусть преобразованіе координатъ x_i будетъ

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= c_{11} x_1' + \ldots + c_{1n} x_n' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1} x_1' + \ldots + c_{nn} x_n'. \end{aligned}$$

Если мы добавимъ еще новое равенство

$$(3) \qquad t = t',$$

то преобразованіе $n+1$ буквъ $x_1, \ldots x_n, t$, выражаемое формулами (2) и (3), имѣетъ тотъ же опредѣлитель c, что и преобразованіе (2), разсматриваемое отдѣльно.

Дискриминантъ же (1) пріобрѣтаетъ множителя c^2 при преобразованіи (2), (3) и теорема доказана.

Можно составить инваріантъ вѣса 2 для квадратичной формы $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ и ряда линейныхъ формъ

$$\Sigma u_i x_i, \quad \Sigma v_i x_i, \quad \ldots \Sigma w_i x_i.$$

Этотъ инваріантъ будетъ имѣть видъ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & u_1 & v_1 & \ldots & w_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & u_n & v_n & \ldots & w_n \\ u_1 & \ldots & u_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ v_1 & \ldots & v_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1 & \ldots & w_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 19.

Пусть r будетъ рангъ заданной формы $\sum\limits_1^n a_{ij}x_ix_j$, а R рангъ союзной $\sum\limits_1^n A_{ij}u_iu_j$.

Если $r=n$, то дискриминантъ a формы заданной не равенъ нулю, а, слѣдовательно, не равенъ нулю также и дискриминантъ союзной формы, ибо онъ, какъ взаимный опредѣлитель, равенъ a^{n-1}; значитъ $R=n$.

Если $r=n-1$, то взаимная матрица $\|A_{ij}\|$ не равна нулю. Она имѣетъ рангъ $R=1$, ибо пропадаютъ на основаніи § 41 главы IV всѣ миноры, составленные изъ двухъ горизонталей и колоннъ.

Наконецъ, если $r<n-1$, то $R=0$.

Если $r=n-1$, то союзная форма, будучи перваго ранга, должна при разложеніи на сумму квадратовъ давать одинъ только квадратъ; и мы приходимъ къ теоремѣ.

Если квадратная форма отъ n перемѣнныхъ имѣетъ рангъ $n-1$, то союзная форма есть квадратъ линейной.

Полагая

$$\Sigma A_{ij}u_iu_j=(\Sigma\alpha_iu_i)^2=\Sigma\alpha_i\alpha_ju_iu_j,$$

получаемъ

$$A_{ij}=\alpha_i\alpha_j$$

Всѣ α_i не могутъ равняться нулю. Пусть $\alpha_h\neq0$, тогда $A_{hh}=\alpha_h^2\neq0$ и, слѣдовательно, не уничтожаются всѣ величины $(A_{h1}, A_{h2}, \ldots A_{hn})$. На основаніи § 3 точка $(A_{h1}, A_{h2}, \ldots A_{hn})$ или, что одно и тоже, точка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ будетъ двойною для первоначальной квадратичной формы

Эквивалентность формъ.

§ 20.

Въ предыдущей главѣ было установлено понятіе о предметахъ эквивалентныхъ по отношенію къ нѣкоторой группѣ преобразованій. Между

причемъ мы можемъ замѣтить, что всѣ квадратичныя формы, имѣющія одинъ и тотъ же рангъ, эквивалентны по отношенію къ группѣ неособенныхъ линейныхъ преобразованій. Подобнымъ же образомъ эквивалентны по отношенію къ вещественнымъ линейнымъ преобразованіямъ формы, имѣющія одинаковые рангъ и сигнатуру.

Эквивалентные между собой предметы образуютъ такъ называемый *классъ*, такимъ образомъ мы приходимъ къ понятію о классѣ квадратичныхъ формъ.

Во многихъ задачахъ полезно установить для каждаго класса предметовъ его представителя. Стоитъ припомнить, какъ въ элементарной теоріи чиселъ [1]) берется за представителя класса чиселъ по модулю вычетъ этого класса.

Понятіе о классѣ квадратичныхъ формъ зависитъ всецѣло отъ той группы линейныхъ преобразованій, которая кладется въ основу изслѣдованія; чѣмъ эта группа шире, тѣмъ проще рѣшается вопросъ о выборѣ представителя класса. Такъ напримѣръ, задача дѣлается совершенно тривіальной, если разсматривать неособенныя линейныя преобразованія самаго общаго вида, причемъ допустимъ комплексныя числа. Тогда классъ квадратичныхъ формъ зависитъ только отъ ранга r, такъ что за представительницу класса можно принять форму

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2,$$

всѣ формы класса приводятся къ виду (1) при помощи нѣкотораго линейнаго преобразованія.

Форма (1) носитъ названіе *канонической* или *приведенной* формы класса.

§ 21

Особенно важное научное значеніе имѣетъ такъ называемая *ариеметическая теорія* квадратичныхъ формъ. Въ этой теоріи обыкновенно разсматриваются формы $\Sigma a_{ij} x_i x_j$, коэффиціенты которыхъ a_{ij} суть цѣлыя числа; перемѣннымъ независимымъ даются также цѣлыя значенія. Линейныя преобразованія разсматриваютъ также только такія, которыя имѣютъ цѣлые коэффиціенты.

Началомъ ариеметической теоріи формъ явились вопросы теоріи чиселъ о представленіи цѣлыхъ чиселъ квадратичными формами. Въ этихъ вопросахъ было важнымъ разсматривать преобразованія съ цѣлыми коэффиціентами, опредѣлитель которыхъ равенъ ± 1, ибо, очевидно, что эк-

---

[1]) См. Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. 1913. § 6. Глава III.

вивалентныя относительно такихъ преобразованій квадратичныя формы представляютъ при цѣлыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ x_i одинаковыя числа. Въ этомъ легко убѣдиться, если замѣтить, что для такихъ преобразованій обратное преобразованіе имѣетъ также цѣлые коэффиціенты. Формы называются proprie-эквивалентными, если опредѣлитель всякаго преобразованія, переводящаго одну въ другую, есть $+1$ и improprie-эквивалентными при опредѣлителѣ -1.

Понятіе объ эквивалентности формъ въ ариѳметическомъ смыслѣ слова установлено Lagrange'омъ, при чемъ ему принадлежитъ весьма важное понятіе о *приведенной формѣ* [1]), какъ представительницѣ класса. Ввиду важности этого понятія а также ввиду замѣчательныхъ слѣдствій и обобщеній я долженъ сказать два слова о теоріи Lagrange'а.

§ 22.

Ограничимся случаемъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ, какъ это сдѣлано у Lagrange'а.

Назовемъ *приведенною* форму

(1) $$ax^2+2bxy+cy^2,$$

въ которой цѣлые коэффиціенты a, b, c удовлетворяютъ неравенствамъ

(2) $$|2b|\leqq|a|\,,\quad |2b|\leqq|c|\,.$$

Возможность привести форму (1), не удовлетворяющую неравенствамъ (2), къ виду, коэффиціенты котораго уже удовлетворяютъ неравенствамъ (2), основывается на слѣдующихъ соображеніяхъ

Если форма (1) не приведенная, то сдѣлаемъ преобразованіе перемѣнныхъ

(3) $$\begin{aligned} x &= x'-my' \\ y &= \qquad y', \end{aligned}$$

опредѣлитель котораго есть

$$\begin{vmatrix} 1, & -m \\ 0, & 1 \end{vmatrix}=1\,.$$

Новая форма будетъ

$$a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2,$$

гдѣ

$$a'=a\,,\ b'=b-am\,,\ c'=c-2bm+am^2.$$

[1]) Lagrange. Recherches d'arithmétique. Nouv. Mém. de Berlin 1773, 1775.

Названія перемѣнныхъ x и y могутъ быть выбраны такъ, что абсолютная величина a меньше абсолютной величины $2b$. Если мы возьмемъ за b' абсолютно малый вычетъ числа b по модулю a, то будемъ имѣть

$$|2b'|<|a|.$$

Форма (1) предполагается неприведенною, значитъ, навѣрно $|2b|>|a|$, значитъ

$$|2b'|<|2b|;$$

итакъ, если форма (1) неприведенная, то при помощи преобразованія (3) мы уменьшили коэффиціентъ при xy по абсолютной его величинѣ.

Если въ полученной нами формѣ этотъ коэффиціентъ превосходитъ одинъ изъ коэффиціентовъ крайнихъ членовъ, мы ее снова также преобразовываемъ, какъ преобразовали $ax^2+2bxy+cy^2$ и будемъ повторять это преобразованіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ форму, гдѣ такое преобразованіе невозможно и, слѣдовательно, средній коэффиціентъ не превосходитъ ни одного изъ крайнихъ.

При разсмотрѣніи вычисляемыхъ такимъ образомъ приведенныхъ формъ получается большая разница въ изученіи двухъ случаевъ, когда дискриминантъ b^2-ac *отрицательный* и когда онъ *положительный*.

Отсылая читателя къ моему курсу теоріи чиселъ, гдѣ въ главѣ XI вопросъ о приведенныхъ формахъ изложенъ подробно, я долженъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что C. Fr. Gauss' въ безсмертной книгѣ *Disquisitiones arithmeticae* видоизмѣнилъ опредѣленіе приведенной формы въ случаѣ положительнаго дискриминанта b^2-ac. Въ моей книгѣ я придерживался идей Gauss'a. Въ добавленіе къ тамъ сказанному я хочу обратить вниманіе на замѣчательное геометрическое толкованіе приведенныхъ формъ метода Gauss'a.

Пусть вещественные коэффиціенты a, b, c квадратичной формы

$$(1)\qquad ax^2+2bxy+cy^2$$

разсматриваются какъ прямоугольныя координаты трехмѣрнаго пространства; тогда каждой формѣ (1) соотвѣтствуетъ точка пространства и обратно.

Всѣ формы (1) даннаго дискриминанта D соотвѣтствуютъ точкамъ *гиперболоида*, опредѣляемаго уравненіемъ

$$(2)\qquad y^2-xz=D,$$

если перейдемъ отъ обозначенія a, b, c координатъ трехмѣрнаго пространства къ обыкновенному обозначенію x, y, z.

При $D < 0$ гиперболоидъ будетъ двуполый, а при $D > 0$ однополый.

Строимъ восемь прямолинейныхъ образующихъ однополаго гиперболоида (при $D > 0$), проходящихъ черезъ четыре вершины эллипса перехвата (горла). Эти образующія замыкаютъ на поверхности эллипсоида четыре куска поверхности конечныхъ размѣровъ. Каждый изъ этихъ кусковъ ограниченъ косымъ четыреугольникомъ, сторонами котораго являются части построенныхъ прямолинейныхъ образующихъ

Приведенныя въ смыслѣ Gauss'а квадратичныя формы соотвѣтствуютъ точкамъ, лежащимъ внутри этихъ четырехъ кусковъ.

§ 23.

Мысли Lagrange'а получили въ книгѣ Gauss'а развитіе, поражающее по богатству и глубинѣ новыхъ идей. Книга Gauss'а была откровеніемъ, изъ котораго въ продолженіи столѣтія наука черпаетъ матеріалъ для новыхъ обобщеній. Появилась ариѳметическая теорія алгебраическихъ формъ произвольной степени и съ произвольнымъ числомъ перемѣнныхъ, первой главой которой является теорія Gauss'а бинарныхъ квадратичныхъ формъ.

Обобщеніе во что бы то ни стало, обобщеніе, не оправдываемое какими либо болѣе серьезными мотивами, не есть цѣль науки. Цѣлью науки являются такія обобщенія, которыя вызваны дѣйствительно научною потребностью. Эта потребность можетъ быть двухъ категорій: или потребность вызывается желаніемъ рѣшать тѣ или другія конкретныя задачи, или же потребность завершить ясное представленіе о существующихъ закономѣрностяхъ изученіемъ предмета еще не ясно представляемаго, представляющаго такимъ образомъ пробѣлъ въ общей картинѣ знанія. Такимъ образомъ подъ вліяніемъ дѣйствительныхъ научныхъ потребностей въ ариѳметической теоріи формъ обобщеніе идей Gauss'а пошло главнымъ образомъ въ двухъ направленіяхъ: 1) въ направленіи изученія такъ называемыхъ *разложимыхъ* формъ и 2) въ направленіи изученія *квадратичныхъ* формъ *произвольнаго* числа перемѣнныхъ.

Подъ разложимыми формами я разумѣю здѣсь форму n-ой степени, которая представляетъ изъ себя произведеніе n линейныхъ формъ съ ирраціональными коэффиціентами.

Теорія разложимыхъ формъ вылилась въ замѣчательную теорію новыхъ чиселъ, названныхъ *идеальными.*

Какъ въ теоріи идеальныхъ чиселъ, такъ и въ ариѳметической теоріи квадратичныхъ формъ большаго числа перемѣнныхъ независимыхъ играетъ большую роль понятіе о *приведенномъ* предметѣ нѣкотораго класса эквивалентныхъ предметовъ

Установленіемъ этого понятія для квадратичныхъ формъ наука обязана послѣ Lagrange'а и Gauss'а нѣмецкому математику Seeber'у [1]). Послѣдній показалъ, что въ каждомъ классѣ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ существуетъ форма, цѣлые коэффиціенты которой удовлетворяютъ нѣкоторымъ имъ установленнымъ неравенствамъ.

Для изученія ариѳметической теоріи квадратичныхъ формъ можно рекомендовать книгу· P. Bachmann. Die Arithmetik der quadratischen Formen. Leipzig 1898.

---

[1]) *Seeber* Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen, Freiburg i Br 1831.

ГЛАВА VIII.

Дальнѣйшія свойства цѣлыхъ функцій.

Тождественное обращеніе въ нуль цѣлой функціи.

§ 1.

Въ основу нашего изслѣдованія мы поставимъ слѣдующее опредѣленіе.

Двѣ цѣлыя функціи отъ любого числа перемѣнныхъ независимыхъ называются тождественно равными, если численныя значенія ихъ совпадаютъ при всякихъ значеніяхъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Какъ частный случай этого опредѣленія, можно установить:

Цѣлая функція уничтожается тождественно, если она равна нулю при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ независимыхъ.

§ 2.

Теорема. *Цѣлая функція произвольнаго числа перемѣнныхъ независимыхъ уничтожается тождественно, тогда и только тогда, когда всѣ ея коэффиціенты равны нулю.*

Достаточность этой теоремы очевидна. Докажемъ ея необходимость по индукціи. Въ самомъ дѣлѣ, ея справедливость въ случаѣ одной перемѣнной независимой вытекаетъ непосредственно изъ заключительнаго замѣчанія § 2 главы II. Покажемъ теперь, что теорема справедлива для случая m перемѣнныхъ независимыхъ, если она вѣрна при $m-1$ перемѣнныхъ независимыхъ.

Пусть цѣлая функція

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = a_0(x_2, \ldots x_m)x_1^n + a_1(x_2, \ldots x_m)x_1^{n-1} + \ldots + a_n(x_2, \ldots x_m)$$

уничтожаются тождественно. Дадимъ перемѣннымъ независимымъ $x_2, \dots x_m$ нѣкоторыя опредѣленныя численныя значенія x_2^0, x_m^0; тогда функція f обращается въ функцію отъ одной перемѣнной независимой x_1. По предположенію эта функція обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ x_1, значитъ, равны нулю всѣ коэффиціенты

$$a_k(x_2^0, x_3^0, \dots x_m^0).$$

Другими словами, всѣ цѣлыя функціи $a_0, a_1, \dots a_n$ обращаются въ нуль при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ независимыхъ, ибо значенія $x_2^0, x_3^0, \dots x_m^0$ выбраны совершенно произвольно.

Итакъ, по предположенію справедливости теоремы при $m-1$ независимыхъ перемѣнныхъ мы заключаемъ о равенствѣ нулю всѣхъ коэффиціентовъ полиномовъ $a_0, a_1, \dots a_n$, и наша теорема доказана.

Слѣдствіе. *Двѣ цѣлыя функціи тогда и только тогда тождественно равны между собою, когда одинаковы коэффиціенты соотвѣтственныхъ членовъ.*

Тождественное равенство двухъ функцій есть не что иное, какъ тождественное равенство нулю ихъ разности.

§ 3.

Теорема. *Произведеніе $f_1 f_2$ цѣлой функціи f_1 степени n_1 на цѣлую функцію f_2 степени n_2 имѣетъ степень $n_1 + n_2$.*

Теорема очевидна для случая одной перемѣнной независимой.

Разсмотримъ сначала теорему для случая однородныхъ функцій, или формъ. Очевидно, что каждое отдѣльное произведеніе члена формы f_1 на членъ формы f_2 будетъ имѣть произведеніе степени $n_1 + n_2$. Нужно, слѣдовательно, убѣдиться только въ томъ, что не обращаются въ нуль всѣ коэффиціенты произведенія $f_1 f_2$.

Расположимъ перемѣнныя независимыя $x_1, x_2, \dots x_m$ въ порядкѣ возрастанія значковъ. Начнемъ съ x_1 и соберемъ всѣ члены функціи f_1, въ которые входитъ x_1 съ наибольшимъ показателемъ μ_1. Изъ этихъ членовъ выберемъ тѣ, у которыхъ x_2 имѣетъ наибольшій показатель μ_2. Изъ послѣднихъ членовъ выбираемъ тѣ, у которыхъ x_3 имѣетъ наибольшій показатель μ_3, и такъ продолжаемъ до послѣдней перемѣнной x_m. Получаемъ рядъ показателей $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$, среди которыхъ могутъ быть, конечно, равные нулю. Полученный такимъ образомъ членъ

$$(1) \qquad a x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_m^{\mu_m}$$

можно назвать *старшимъ*. Данное нами понятіе о старшемъ членѣ соот-

вѣтствуетъ, конечно, выбранному расположенію перемѣнныхъ независимыхъ[1]), при другомъ расположеніи старшимъ можетъ быть другой членъ.

Пусть при томъ же расположеніи перемѣнныхъ независимыхъ будетъ старшимъ въ функціи f_2 членъ

$$(2) \qquad b x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_m^{\nu_m}.$$

Произведеніе членовъ (1) и (2) дастъ

$$(3) \qquad ab x_1^{\mu_1+\nu_1} x_2^{\mu_2+\nu_2} \ldots x_m^{\mu_m+\nu_m}.$$

Нетрудно убѣдиться, что членъ (3) окажется старшимъ въ произведеніи $f_1 f_2$ относительно даннаго расположенія перемѣнныхъ независимыхъ и не будетъ имѣть себѣ подобныхъ. Значитъ, коэффиціентъ ab члена (3) не можетъ обратиться въ нуль, ибо отличны отъ нуля оба множителя a и b.

Итакъ, теорема доказана для случая однородныхъ функцій.

Обращаясь теперь къ общему случаю, мы можемъ разложить неоднородныя функціи на однородныя составныя части

$$f_1 = \varphi_1^{(n_1)}(x_1, \ldots x_m) + \varphi_1^{(n_1-1)}(x_1, \ldots x_m) + \ldots$$

$$f_2 = \varphi_2^{(n_2)}(x_1, \ldots x_m) + \varphi_2^{(n_2-1)}(x_1, \ldots x_m) + \ldots,$$

гдѣ $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_2^{(j)}$ формы i-ой, j-ой степени, нѣкоторыя изъ которыхъ могутъ *тождественно равняться нулю*.

Такъ какъ функціи f_1 и f_2 имѣютъ степени, *точно* равныя числамъ n_1 и n_2, слѣдовательно, не равны тождественной нулю функціи $\varphi_1^{(n_1)}$ и $\varphi_2^{(n_2)}$. Итакъ, старшія степени въ произведеніи $f_1 f_2$ получаются изъ произведенія $\varphi_1^{(n_1)}\varphi_2^{(n_2)}$; это же послѣднее не можетъ равняться нулю на основаніи уже доказанной справедливости теоремы для формъ.

Итакъ, степень произведенія $f_1 f_2$ есть $n_1 + n_2$, что и требовалось показать.

§ 4.

Теорема. *Если произведеніе двухъ или большаго числа цѣлыхъ функцій тождественно равно нулю, то одинъ изъ множителей долженъ равняться тождественно нулю.*

---

[1]) Такъ, напримѣръ, въ цѣлой функціи

$$x^4y^2z + x^6yz^7 + x^5y^2z + 2 + x^2z^2 + z^7y$$

будетъ старшимъ x^5y^2z для расположенія буквъ (x, y, z), а для расположенія (x, z, y) будетъ старшимъ членъ x^6yz^7.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы ни одинъ множитель произведенія не равнялся тождественно нулю, то каждый изъ нихъ имѣлъ бы нѣкоторую опредѣленную степень; сумма этихъ степеней давала бы степень произведенія, слѣдовательно, это произведеніе не могло бы тождественно равняться нулю.

Весьма важное практическое слѣдствіе изъ доказанной теоремы состоитъ въ томъ, что можно всякое алгебраическое тождество сокращать на множители нетождественно равные нулю; отъ такого сокращенія тождество остается тождествомъ.

§ 5.

Теорема. *Если цѣлая функція $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ не равна тождественно нулю, то уничтожается тождественно цѣлая функція $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)$, если только она обращается въ нуль при значеніяхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, не обращающихъ f въ нуль.*

Эта теорема есть слѣдствіе предыдущей, если принять въ соображеніе, что произведеніе $f\varphi$ тождественно равно нулю.

§ 6.

Будемъ разсматривать теперь цѣлыя функціи *въ окрестности* нѣкоторой *аналитической точки*.

Пусть независимыя перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_m$ разсматриваются какъ *координаты* пространства m измѣреній.

Если перемѣннымъ независимымъ заданы нѣкоторыя численныя значенія $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$, то мы будемъ говорить, что задана *аналитическая точка*. Будемъ перемѣннымъ независимымъ давать какъ вещественныя, такъ и мнимыя значенія.

Пусть для каждой перемѣнной независимой x_i разсматривается особая плоскость комплексныхъ чиселъ. Дадимъ частному значенію x_i^0 этой перемѣнной независимой приращеніе h_i.

Мы будемъ говорить, что новая точка

$$(x_1^0 + h_1,\ x_2^0 + h_2, \ldots x_m^0 + h_m)$$

находится въ *окрестности* точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$, если модули приращеній h_i удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|h_1| < a_1,\quad |h_2| < a_2,\quad \ldots\quad |h_m| < a_m,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_m$ *произвольно* заданныя положительныя числа.

§ 7.

Теорема. *„Для тождественнаго уничтоженія цѣлой функціи*

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m)$$

необходимо и достаточно, чтобы она равнялась нулю для всѣхъ точекъ въ окрестности нѣкоторой опредѣленной точки.

Доказательство этой теоремы тоже самое, что и для теоремы § 2, ибо при доказательствѣ той теоремы играло роль лишь то обстоятельство, что каждая изъ координатъ могла принимать безчисленное множество значеній; это же обстоятельство имѣетъ мѣсто и въ данномъ случаѣ.

Слѣдствіе. *Для тождественнаго равенства двухъ цѣлыхъ функцій необходимо и достаточно равенство этихъ функцій лишь для точекъ окрестности какой либо опредѣленной точки.*

§ 8.

Данное нами въ § 16 главы I доказательство непрерывности цѣлой функціи отъ одной перемѣнной независимой, можетъ быть обобщено и на случай нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Мы назовемъ функцію $f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m)$ непрерывною въ точкѣ $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots\ x_m^0)$, если всякому положительному числу ε можно сопоставить такую окрестность точки $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots\ x_m^0)$, что для всякой точки $(x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_m')$ этой окрестности будетъ

$$|f(x_1',\ x_2',\ \ldots\ x_m') - f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots\ x_m^0)| < \varepsilon.$$

Покажемъ, *что для всякой аналитической точки цѣлая функція есть функція непрерывная.*

Докажемъ предварительно двѣ леммы.

Лемма I. *Сумма конечнаго числа функцій непрерывныхъ въ точкѣ есть функція непрерывная въ той же точкѣ.*

Достаточно доказать эту лемму для двухъ функцій f_1 и f_2. Обозначимъ через f_1^0 и f_0^0 значенія функціи въ разсматриваемой точкѣ. Если обѣ функціи непрерывныя въ точкѣ, то [1])

$$|f_1 - f_1^0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x_i - x_i^0| < \delta_1$$

$$|f_2 - f_2^0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x_i - x_i^0| < \delta_2$$

[1]) Здѣсь через δ обозначено наименьшее изъ чиселъ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_m$.

Тогда, обозначая через δ меньшее изъ чиселъ δ_1 и δ_2, получимъ

$$|f_1 - f_1^0| + |f_2 - f_2^0| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x_i - x_i^0| < \delta.$$

Но по формулѣ

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

получаемъ

$$|(f_1 + f_2) - (f_1^0 + f_2^0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x_i - x_i^0| < \delta,$$

а, значитъ, сумма $f_1 + f_2$ есть функція непрерывная.

Лемма II. *Произведеніе конечнаго числа непрерывныхъ въ точкѣ множителей есть функція непрерывныхъ въ той же точкѣ.*

Достаточно доказать эту теорему для случая двухъ множителей.

Взявъ произвольно малое положительное число η, подберемъ положительныя числа δ_1 и δ_2 такимъ образомъ, чтобы было

$$|f_1 - f_1^0| < \eta \quad \text{при} \quad |x_i - x_i^0| < \delta_1$$

$$|f_2 - f_2^0| < \eta \quad \text{при} \quad |x_i - x_i^0| < \delta_2,$$

тогда, обозначая по прежнему через δ наименьшее изъ чиселъ δ_1 и δ_2.

$$(f_1 - f_1^0)(f_2 - f_2^0) + f_1^0(f_2 - f_2^0) + f_2^0(f_1 - f_1^0) = f_1 f_2 - f_1^0 f_2^0.$$

Слѣдовательно,

$$|f_1 f_2 - f_1^0 f_2^0| < \{|f_1^0| + |f_2^0|\}\eta + \eta^2.$$

Остается подобрать η такъ, чтобы было

$$\{|f_1^0| + |f_2^0|\}\eta + \eta^2 < \varepsilon,$$

и теорема доказана, ибо

$$|f_1 f_2 - f_1^0 f_2^0| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x_i - x_i^0| < \delta.$$

На основаніи приведенныхъ леммъ убѣждаемся въ непрерывности функціи вида $a x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$, гдѣ α_i цѣлыя числа или нули. Суммируя отдѣльные члены, мы докажемъ непрерывность цѣлой функціи.

§ 9.

Теорема. *Если цѣлая функція $f(x_1, \ldots x_m)$ не обращается въ нуль въ точкѣ $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$, то около этой точки можно указать такую окрестность, что во всѣхъ ея точкахъ функція f отлична отъ нуля.*

Положимъ $f(x_1^0, \ldots x_m^0) = f^0$. Возьмемъ δ настолько малымъ, чтобы при $|x_i - x_i^0| < \delta$ было

$$|f - f^0| < \frac{1}{2}|f^0|.$$

Если $f = 0$ для какой нибудь изъ точекъ указанной окрестности, то мы приходимъ къ противорѣчію

$$|f^0| < \frac{1}{2}|f^0|.$$

Дѣлимость цѣлыхъ функцій.

§ 10.

Если между тремя цѣлыми функціями f, φ, ψ существуетъ соотношеніе

$$f = \varphi\psi,$$

которое является тождествомъ, т. е. которое справедливо при всѣхъ значеніяхъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, то каждая изъ функцій φ и ψ называется *дѣлителемъ* функціи f.

Всякая постоянная величина, отличная отъ нуля, есть дѣлитель всякой цѣлой функціи.

Всякая цѣлая функція можетъ быть разсматриваема какъ дѣлитель, тождественно равный нулю цѣлой функціи.

Цѣлая функція нулевой степени, которая есть нечто иное, какъ постоянная величина, *не можетъ* имѣть цѣлыхъ дѣлителей *не нулевой* степени.

Цѣлая функція $x_1, x_2, \ldots x_m$, не равная тождественно нулю, не можетъ имѣть дѣлителей, заключающихъ еще другія перемѣнныя независимыя.

§ 11.

Теперь мы установимъ еще одно весьма важное понятіе, а именно, понятіе о такъ называемой *приводимости* цѣлыхъ функцій.

Цѣлую функцію мы назовемъ приводимою, если она тождественно равна произведенію двухъ цѣлыхъ функцій, изъ которыхъ каждая не сводится къ постоянному числу.

Въ обратномъ случаѣ функція называется неприводимою.

Какъ примѣръ приводимой функціи можно указать

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z),$$

гдѣ α есть корень уравненія $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

Въ видѣ примѣра неприводимой функціи можно указать

$$f(x)+y,$$

гдѣ $f(x)$ произвольная цѣлая функція отъ одной независимой перемѣнной x.

§ 12.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи понятіе о приводимости цѣлыхъ функцій будетъ подвергнуто нѣкоторому измѣненію.

Въ предыдущихъ параграфахъ коэффиціенты цѣлыхъ функцій считаются произвольными какъ вещественными, такъ и мнимыми числами. Понимаемыя въ этомъ смыслѣ приводимость или неприводимость мы будемъ называть *абсолютными*. Въ дальнѣйшемъ мы установимъ понятіе объ *условной* приводимости въ зависимости отъ характера коэффиціентовъ. Такъ напримѣръ, функція x^2+1 *приводима* въ абсолютномъ смыслѣ, ибо она равна $(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$, но она становится *неприводимою*, если мы допускаемъ только вещественные коэффиціенты. Въ настоящей главѣ мы будемъ исключительно заниматься абсолютною приводимостью.

§ 13.

Теорема. *Опредѣлитель порядка n есть неприводимая функція его n^2 элементовъ, если эти элементы разсматривать какъ независимыя перемѣнныя.*

Допустимъ, что опредѣлитель $D=|a_{ik}|$ будетъ функціей приводимой, такъ что

$$D=f_1(a_{11}\,.\,.\,.\,.\,a_{nn})f_2(a_{11},\,.\,.\,.\,a_{nn}).$$

Такъ какъ всякій элементъ опредѣлителя входитъ въ него въ первой степени, значитъ, онъ долженъ входить въ этой первой степени въ одну изъ функцій, а въ другую не долженъ входить. Разсмотримъ элементъ a_{ii} главной діагонали. Пусть онъ входитъ въ функцію f_1, тогда въ функцію f_2 не могутъ входить элементы i-ой горизонтали и i-ой колонны, ибо иначе въ членахъ опредѣлителя входило бы одно изъ произведеній $a_{ii}a a_{ij}$ или $a_{ii}a_{ji}$, что противорѣчитъ закону составленія опредѣлителя. Разсмотримъ теперь другой элементъ a_{jj} главной горизонтали. Можно показать, что онъ не можетъ входить въ f_2. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ это, тогда въ функцію f_1 не входитъ ни одинъ членъ j-ой горизонтали и j-ой колонны. Сопоставляя съ предыдущимъ, мы придемъ къ ложному заключенію, что элементы a_{ij}, a_{ji} не входятъ ни въ одинъ изъ множителей f_1, f_2. Итакъ, если a_{ii} входитъ въ функцію f_1, то въ эту же функцію входитъ и всякій другой членъ a_{jj} главной горизонтали, а вмѣстѣ съ нимъ

и всѣ элементы опредѣлителя. Функція f_2 сведется къ постоянному числу, что и требовалось доказать.

§ 14.

Если въ выраженіи цѣлой функціи

$$ax_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} + bx_1^{\beta_1} \ldots x_m^{\beta_m} + \ldots$$

нѣтъ подобныхъ членовъ и всѣ коэффиціенты a, b, ... суть независимыя перемѣнныя, то функція неприводима, если предположить, что показатели

$$\alpha_i \quad \beta_i, \ldots$$

надъ всякой буквой x_i не во всѣхъ членахъ суть числа положительныя

§ 15.

Часто полезно сопоставлять однородныя и неоднородныя цѣлыя функціи.

Если мы составимъ изъ неоднородной цѣлой функціи степени n отъ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ новую цѣлую функцію черезъ умноженіе членовъ степени ниже n на соотвѣтственныя степени новой перемѣнной независимой x_{m+1}, такимъ образомъ, чтобы получалась однородная функція отъ $m+1$ перемѣнныхъ независимыхъ, то эта однородная функція носитъ названіе соотвѣтствующей.

Очевидно, что для цѣлой функціи $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ будетъ соотвѣтствующею функція

$$(1) \qquad x_{m+1}^n f\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \frac{x_2}{x_{m+1}}, \ldots \frac{x_m}{x_{m+1}}\right).$$

Изъ однородной соотвѣтствующей функціи получимъ первоначальную, полагая $x_{m+1} = 1$.

Нетрудно видѣть, что у всякой неоднородной функціи существуетъ одна соотвѣтствующая. Однородная же функція можетъ имѣть нѣсколько соотвѣтствующихъ функцій, судя по тому, которую изъ перемѣнныхъ мы приравняемъ единицѣ. Однородная функція не будетъ имѣть соотвѣтствующей, если всѣ перемѣнныя независимыя входятъ въ каждый членъ ея, напримѣръ, $x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2$.

Теорема. *Если одна изъ другъ другу соотвѣтствующихъ функцій приводимая, то такова же будетъ и другая; при этомъ множители одной соотвѣтствуютъ множителямъ другой.*

Пусть неоднородная функція f приводимая

(1) $$f(x_1, x_2, \ldots x_m) = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)\psi(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Предполагая $x_{m+1} \neq 0$, подставимъ въ тождество (1) вмѣсто x_1, $x_2, \ldots x_m$ ихъ отношенія къ x_{m+1}

(2) $$f\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \frac{x_2}{x_{m+1}}, \ldots \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = \varphi\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots \frac{x_m}{x_{m+1}}\right)\psi\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots \frac{x_m}{x_{m+1}}\right);$$

обозначая степени φ и ψ черезъ p и q и умножая тождество (2) на x_m^{p+q}, получимъ равенство

(3) $$f_1(x_1, \ldots x_m, x_{m+1}) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})\psi_1(x_1, \ldots x_m, x_{m+1})$$

для соотвѣтственныхъ формъ. Равенство (3) имѣетъ мѣсто при всѣхъ отличныхъ отъ нуля значеніяхъ x_{m+1}, слѣдовательно, на основаніи теоремы § 5 заключаемъ, что (3) есть тождество, и соотвѣтствующій полиномъ f_1 приводимый. Обратно изъ тождества (3) получимъ (1), если положимъ $x_{m+1} = 1$.

§ 16

Основная теорема алгебры о существованіи у всякаго полинома по-крайней мѣрѣ одного корня показываетъ, что цѣлая функція отъ одной независимой перемѣнной степени выше первой есть всегда абсолютно приводимая.

Цѣлая функція отъ одной перемѣнной степени n раскладывается на n множителей первой степени

$$f(x) = p_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_n$ суть корни функціи $f(x)$.

Если полиномы, отличающіеся постоянными множителями, не считать за различные, то получается теорема.

Полиномъ степени n отъ одной независимой перемѣнной раскладывается только однимъ способомъ на неразложимые (простые) множители первой степени.

Вводя новую перемѣнную независимую y и переходя къ функціи соотвѣтствующей, мы получимъ формулу

$$f_1(x, y) = p_0(x - a_1y)(x - a_2y)\ldots(x - a_ny),$$

выражающую свойство абсолютной приводимости бинарной формы.

Алгориѳмъ Эвклида для цѣлыхъ функцій.

§ 17

Перейдемъ теперь къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій при помощи послѣдовательнаго дѣленія. Другими словами, мы переходимъ къ изученію знаменитаго алгориѳма Эвклида, который можно назвать алгориѳмомъ непрерывныхъ дробей; причемъ будемъ этотъ алгориѳмъ разсматривать въ примѣненіи къ цѣлымъ функціямъ. Эвклидъ изучаетъ этотъ алгориѳмъ по двумъ поводамъ: 1) для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ, 2) для нахожденія общей мѣры двухъ отрѣзковъ въ теоріи трактующей объ измѣреніи протяженныхъ величинъ.

Въ примѣненіи къ нахожденію общей мѣры двухъ отрѣзковъ алгориѳмъ приводитъ къ разложенію отношенія отрѣзковъ въ непрерывную дробь. Если дробь эта окажется безконечною, то отношеніе двухъ отрѣзковъ есть число несоизмѣримое. Этотъ случай не имѣетъ мѣсто, когда мы примѣняемъ алгориѳмъ Эвклида къ нахожденію наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ чиселъ Здѣсь алгориѳмъ всегда оказывается конечнымъ

Въ теоріи чиселъ [1]) показывается, что изъ конечности алгориѳма Эвклида слѣдуютъ всѣ основныя теоремы о дѣлимости чиселъ; между прочимъ, фундаментальная теорема о единственной разложимости цѣлаго числа на простые множители.

Къ *аналогичнымъ выводамъ можно придти*, разсматривая алгориѳмъ Эвклида въ примѣненіи къ полиномамъ. Конечность этого дѣйствія влечетъ тѣ же слѣдствія, что и въ ариѳметикѣ. Располагая два полинома по степенямъ одной и той же буквы x, мы можемъ послѣдовательнымъ дѣленіемъ съ уменьшающимися степенями остатковъ получить общаго наибольшаго дѣлителя заданныхъ двухъ полиномовъ или же убѣдиться, что эти полиномы не имѣютъ общаго дѣлителя, заключающаго букву x. Продѣлавъ тоже самое относительно всѣхъ входящихъ въ полиномы буквъ, найдемъ всѣхъ общихъ дѣлителей этихъ полиномовъ.

§ 18.

Разсмотрѣніе примѣненія алгориѳма Эвклида къ полиномамъ представляетъ нѣкоторую разницу случая одной перемѣнной независимой отъ случая полиномовъ отъ многихъ буквъ. Хотя эта разница не существенная и не нарушаетъ полной общности выводовъ, остающихся одними и

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. 2-ое изданіе. Кіевъ. 1913 г. Глава I.

тѣми же во всѣхъ случаяхъ, тѣмъ не менѣе полезно при изложеніи разсмотрѣть сначала случай одной перемѣнной независимой

Начнемъ съ извѣстнаго изъ ариѳметики способа нахожденій общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ a и b при помощи послѣдовательнаго дѣленія.

Пусть $a > b$

Получаемъ рядъ равенствъ

$$a = qb + r_1,\ b = q_1 r_1 + r_2,\ r_1 = q_2 r_2 + r_3, \ldots \tag{1}$$
$$r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k,\ r_{k-1} = q_{k-1} r_k$$

гдѣ $q, q_1, \ldots q_{k-1}$ послѣдовательныя частныя дѣленія, а r_i убывающіе остатки

$$b > r_1 > r_2 > \ldots > r_{k-1} > r_k.$$

Какъ извѣстно r_k есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b.

Первое изъ уравненій (1) даетъ

$$r_1 = a - qb \tag{2}$$

Подставляя во второе мы получимъ

$$r_2 = -q_1 a + (qq_1 + 1)b. \tag{3}$$

Далѣе изъ третьяго

$$r_3 = (q_1 q_2 + 1)a - (qq_1 q_2 + q_2 + q)b. \tag{4}$$

Можно ввести новый символъ, часто употребляющійся математиками. Этотъ символъ опредѣляется вполнѣ слѣдующими формулами

$$[\ ] = 1$$
$$[\xi_1] = \xi_1$$
$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \xi_2 + 1$$
$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_1 + \xi_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\xi_1, \ldots \xi_n] = [\xi_1, \ldots \xi_{n-1}]\xi_n + [\xi_1, \ldots \xi_{n-2}].$$

Этотъ символъ обладаетъ между прочимъ свойствомъ

$$[\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}, \xi_n] = [\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_2, \xi_1].$$

При помощи новаго символа получаемъ, принимая во вниманіе (2), (3), (4), выраженіе всякаго остатка r_l линейно черезъ a и b

$$r_l = ax_l + by_l,$$

гдѣ

(5) $x_l = (-1)^{l-1}[q_1, q_2, \ldots q_{l-1}]$, $y_l = (-1)^l[q, q_1, q_2, \ldots q_{l-1}]$.

Примѣняя къ случаю $l = k$, получаемъ формулу для общаго наибольшаго дѣлителя r_k

$$r_k = ax_k + by_k.$$

Если $r_k = 1$, то два числа a и b взаимно простыя, и мы получаемъ формулу

$$ax + by = 1,$$

гдѣ x и y цѣлыя числа, изъ которыхъ, конечно, одно положительное, а другое отрицательное.

И мы приходимъ къ заключенію.

Два числа a и b тогда и только тогда взаимно простыя, если можно подобрать два цѣлыхъ числа x и y такихъ, чтобы было

$$ax + by = 1.$$

§ 19.

Обращаемся теперь къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя двухъ многочленовъ $f(x)$ и $\varphi(x)$, причемъ предположимъ, что ни одинъ изъ нихъ не сводится къ постоянной величинѣ и что степень f не менѣе степени φ.

Послѣдовательное дѣленіе приводитъ къ ряду тождествъ:

$$f(x) = Q(x)\varphi(x) + R_1(x)$$

$$\varphi(x) = Q_1(x)R_1(x) + R_2(x)$$

$$R_1(x) = Q_2(x)R_2(x) + R_3(x)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$R_{k-1}(x) = Q_k(x)R_k(x) + R_{k+1}.$$

Здѣсь послѣдовательные остатки R_i имѣютъ степени, убывающія съ возрастаніемъ значка i. Дѣленіе продолжается до тѣхъ поръ пока мы не дойдемъ до остатка R_{k+1}, равнаго постоянному числу (нулевой степени).

Если постоянный остатокъ R_{k+1} отличенъ отъ нуля, то цѣлыя функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя, заключающаго букву x, ибо на основаніи соображеній аналогичныхъ приведеннымъ въ § 17 мы замѣчаемъ, что общій наибольшій дѣлитель $f(x)$ и $\varphi(x)$ долженъ быть дѣлителемъ всякаго остатка $R_l(x)$, а слѣдовательно, и остатка R_{k+1}; это же невозможно, ибо постоянное число не можетъ дѣлиться на цѣлую функцію.

Итакъ, функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ будутъ *взаимно простыя* [1]), если R_{k+1} отлично отъ нуля.

Если же $R_{k+1}=0$, тогда предпослѣдній остатокъ $R_k(x)$ будетъ *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ* всѣхъ предыдущихъ остатковъ а также и функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$, то есть

$$f(x)=R_k(x)f_1(x)\,,\ \varphi(x)=R_k(x)\varphi_1(x)\,,$$

гдѣ $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$ будутъ нѣкоторые полиномы, которые могутъ приводиться къ постоянному числу.

Принимая во вниманіе формулы (5) предыдущаго параграфа, получимъ

$$R_{k+1}=(-1)^k[Q_1(x)Q_2(x)\ldots Q_k(x)]f(x)+$$
$$+(-1)^{k+1}[Q(x)Q_1(x)\ldots Q_k(x)]\varphi(x)$$

или

(1) $$F(x)f(x)+\Phi(x)\varphi(x)=1$$

гдѣ

$$F(x)=\frac{(-1)^k}{R_{k+1}}[Q_1(x)Q_2(x)\ldots Q_k(x)]$$

(3)

$$\Phi(x)=\frac{(-1)^{k+1}}{R_{k+1}}[Q(x)Q_1(x)\ldots Q_k(x)]\,.$$

Мы приходимъ къ теоремѣ.

Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы два полинома $f(x)$ и $\varphi(x)$ были взаимно простые состоитъ въ существованіи двухъ новыхъ полиномовъ $F(x)$ и $\Phi(x)$ такихъ, чтобы существовало тождество

$$F(x)f(x)+\Phi(x)\varphi(x)=1$$

§ 20.

Изъ теоремы предыдущаго параграфа можно вывести тѣ же слѣдствія относительно дѣлимости полиномовъ, какія выводятся относительно чиселъ [2]) въ ариѳметикѣ.

Такъ, напримѣръ, если произведеніе

$$f(x)f_1(x)$$

дѣлится на $\varphi(x)$, но полиномы $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно простые, то $f_1(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$.

---

[1]) Дѣлители, равные постоянному числу, не принимаются въ разсмотрѣніе.
[2]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Кіевъ, 1913. Глава I.

Въ самомъ дѣлѣ по предположенію

(1) $$f(x)f_1(x) = \varphi(x)\psi(x).$$

Функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно простыя, слѣдовательно можно подобрать двѣ цѣлыя функціи $F(x)$ и $\Phi(x)$ такія, чтобы было

(2) $$F(x)f(x) + \Phi(x)\varphi(x) = 1;$$

умножая тождество (2) на $f_1(x)$ и принимая во вниманіе тождество (1), получимъ

$$\varphi(x)[F(x)\psi(x) + \Phi(x)f_1(x)] = f_1(x),$$

откуда слѣдуетъ дѣлимость $f_1(x)$ на $\varphi(x)$.

Пусть степень $f(x)$ есть n, а степень $\varphi(x)$ есть m, тогда можно сдѣлать весьма важное дальнѣйшее заключеніе о степеняхъ функцій $F(x)$ и $\Phi(x)$, входящихъ въ тождество (2). Обозначимъ черезъ m_i степень $R_i(x)$.

Степени $Q(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ... $Q_k(x)$ будутъ, очевидно,

$$n-m, \quad m-m_1, \quad m_1-m_2, \ldots m_{k-1}-m_k$$

На основаніи формулъ (2) и (3) § 18 получаемъ для степени $F(x)$ и $\Phi(x)$ выраженія

$$m-m_1+(m_1-m_2)+\ldots+(m_{k-1}-m_k)=m-m_k$$

$$n-m+(m-m_1)+(m-m_2)+\ldots+(m_{k-1}-m_k)=n-m_k.$$

Слѣдовательно, степень $F(x)$ ниже степени $\varphi(x)$, а степень $\Phi(x)$ ниже степени $f(x)$.

Покажемъ въ заключеніе, что функціи $F(x)$ и $\Phi(x)$ однозначно опредѣляются тождествомъ (2) и требованіемъ, чтобы ихъ степени были ниже степеней функцій $\varphi(x)$ и $f(x)$. Допустимъ обратное, что кромѣ $F(x)$ и $\Phi(x)$ существуетъ еще другая пара подобныхъ функцій $F_1(x)$ и $\Phi_1(x)$, при которыхъ существуетъ тождество

(3) $$F_1(x)f(x) + \Phi_1(x)\varphi(x) = 1.$$

Вычитая (3) изъ (2), получимъ

$$(F-F_1)f(x) = (\Phi_1-\Phi)\varphi(x)$$

$f(x)$ и $\varphi(x)$ функціи взаимно простыя, слѣдовательно, разность $F(x)-F_1(x)$ должна дѣлиться на $\varphi(x)$, а разность $\Phi_1(x)-\Phi(x)$ на $f(x)$, что невозможно, ибо степени этихъ разностей ниже степеней тѣхъ функцій на ко-

торыя онѣ должны дѣлиться; значитъ, мы приходимъ къ двумъ тождествамъ

$$F - F_1 = 0, \quad \Phi_1 - \Phi = 0,$$

и, значитъ, функціи F_1 и Φ_1 не отличаются отъ F и Φ.

§ 21.

Если полиномы, отличающіеся другъ отъ друга постоянными множителями, не считать за различные, то изъ тождества (1) § 19 вытекаетъ единственность разложенія полинома на неразложимые далѣе множители. Эти множители играютъ туже роль въ дѣлимости полиномовъ, что и *простыя* числа при дѣлимости чиселъ.

Вслѣдствіе абсолютной разложимости полиномовъ отъ одной перемѣнной независимой, неприводимымъ можетъ быть лишь полиномъ первой степени

Если, какъ сказано, не обращать вниманіе на постоянные множители, то аналогію съ простыми числами ариеметики составляютъ двучлены вида

(1) $$x - a.$$

На такого рода двучлены однимъ только способомъ разлагается всякая цѣлая функція отъ одной перемѣнной независимой, причемъ a есть корень цѣлой функціи.

Если давать a всѣ возможныя какъ вещественныя, такъ и мнимыя значенія, выраженіе (1) пробѣжитъ *неперечислимую* [1]) совокупность; простыя же числа въ ариеметикѣ образуютъ совокупность *перечислимую*.

§ 22

Если мы перейдемъ къ функціямъ отъ многихъ перемѣнныхъ независимыхъ, то тутъ могутъ существовать неприводимыя функціи высшихъ степеней

Для доказательства теоремы объ однозначности разложенія цѣлой функціи на неприводимыя надо будетъ разсмотрѣть, какъ должно производить выкладки алгориѳма Эвклида въ этомъ случаѣ.

Возьмемъ функцію, разложенную по степенямъ x

(1) $$f(x, y, z, \ldots) = X_0 x^n + X_1 x^{n-1} + \ldots + X_{n-1} x + X_n,$$

[1]) Д. Граве. Введеніе въ анализъ Кіевъ 1910 г. Заключеніе. § 3

гдѣ $X_0, X_1, \ldots X_n$ суть цѣлыя функціи отъ остальныхъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Докажемъ теорему:

Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы функція $f(x, y, z, \ldots)$ имѣла дѣлителя $\varphi(y, z, \ldots)$, независимаго отъ x, состоитъ въ томъ, чтобы всѣ коэффиціенты X_i дѣлились на $\varphi(y, z, \ldots)$.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточность теоремы очевидна. Что касается ея необходимости, то допустимъ, что f дѣлится на φ, т. е.

$$X_0x^n + \ldots + X_n = \varphi(y, z, \ldots)[Y_0x^n + Y_1x^{n-1} + \ldots + Y_n],$$

гдѣ $Y_0, Y_1, \ldots Y_n$ суть цѣлыя функціи отъ $y, z, \ldots$ Сравнивая коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x, получимъ

$$(2) \qquad X_0 = \varphi Y_0, \; X_1 = \varphi Y_1, \ldots X_n = \varphi Y_n.$$

Такъ какъ равенства (2) должны имѣть мѣсто при всѣхъ значеніяхъ $y, z, \ldots$, то они должны быть тождествами и, значитъ, всѣ X_i дѣлятся на φ.

§ 23.

Пусть требуется искать общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій

$$(1) \quad \begin{aligned} f(x, y, z \ldots) &= X_0(y, z, \ldots)x^n + X_1(y, z, \ldots)x^{n-1} + \ldots + X_n(y, z, \ldots) \\ \varphi(x, y, z, \ldots) &= Y_0(y, z, \ldots)x^m + Y_1(y, z, \ldots)x^{m-1} + \ldots + Y_m(y, z, \ldots). \end{aligned}$$

Если $n \geqslant m$, то при дѣленіи f на φ первый членъ относительно x будетъ имѣть видъ

$$\frac{X_0(y, z, \ldots)}{Y_0(y, z, \ldots)} x^{n-m},$$

причемъ въ частномъ оказываются коэффиціенты, которые выражаются дробными раціональными функціями отъ $y, z, \ldots$ Во избѣжаніе дробныхъ коэффиціентовъ можно умножить предварительно функцію f, подлежащую дѣленію, на нѣкоторую, приличнымъ образомъ выбранную, функцію $P(y, z, \ldots)$ отъ $y, z, \ldots$

Мы можемъ въ основу алгориѳма Эвклида положить теорему:

Если f и φ суть полиномы отъ перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z, \ldots$, причемъ φ не уничтожается тождественно, то можно всегда подобрать три новыя цѣлыя функціи Q, R, P, изъ которыхъ послѣдняя P не заключаетъ x и неравна тождественно нулю, такія, что будетъ имѣть

мѣсто тождество

$$P(y, z, \ldots)f(x, y, z, \ldots) = Q(x, y, z, \ldots)\varphi(x, y, z, \ldots) + R(x, y, z, \ldots),$$

причемъ функція R или тождественно равна нулю, или же ея степень относительно x ниже степени φ относительно x.

Если степень f по x меньше степени φ, то можно будетъ положить $P=1$, $Q=0$, $R=f$.

Остается, слѣдовательно, доказать теорему лишь въ случаѣ (см. (1)) $n \geqslant m$, $X_0 \neq 0$, $Y_0 \neq 0$.

Если степень φ не выше степени f, то можно будетъ подобрать два полинома Q_1, R_1, которые удовлетворяютъ тождеству

$$(2)\quad Y_0(y, z, \ldots)f(x, y, z, \ldots) = Q_1(x, y, \ldots)\varphi(x, y, \ldots) + R_1(x, y, \ldots),$$

гдѣ R_1 или тождественно равно нулю, или же степень R_1 по буквѣ x меньше степени f. Что это такъ, слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что можно взять

$$Q_1 = X_0(y, z, \ldots)x^{n-m}.$$

Если степень по x полинома R_1 меньше степени φ, то теорема доказана, если же этого нѣтъ, то подбираемъ новыхъ два полинома Q_2 и R_2 такъ, чтобы было

$$(3)\quad Y_0(y, z, \ldots)R_1(x, y, \ldots) = Q_2(x, y, \ldots)\varphi(x, y, \ldots) + R_2(x, y, \ldots).$$

Сопоставляя (2) и (3), получимъ

$$Y_0^2 f = (Y_0 Q_1 + Q_2)\varphi + R_2.$$

Если степень R_2 по x меньше степени φ, то теорема доказана, ибо можно положить

$$P = Y_0^2,\ Q = Y_0 Q_1 + Q_2,\ R = R_2.$$

Если же степень R_2 выше φ, то продолжаемъ указаннымъ способомъ пониженіе степени, пока не дойдемъ до полинома R_i, степень котораго будетъ уже ниже степени φ и который будетъ удовлетворять тождеству

$$Y_0^i f = (Y_0^{i-1}Q_1 + Y_0^{i-2}Q_2 + \ldots + Q_i)\varphi + R_i,$$

такъ что будетъ

$$P = Y_0^i,\ Q = Y_0^{i-1}Q_1 + \ldots + Q_i,\ R = R_i.$$

Полезно замѣтить, *что за функцію P можно принять всегда нѣкоторую степень функціи Y_0*.

§ 24.

Теперь можемъ приступить къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя функцій (1) § 23.

Получаемъ систему тождествъ

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&P(y, z, \ldots)f = Q(x, y, \ldots)\varphi + R_1(x, y, \ldots)\\
&P_1(y, z, \ldots)\varphi = Q_1(x, y, \ldots)R_1(x, y, \ldots) + R_2(x, y, \ldots)\\
&P_2(y, z, \ldots)R_1(x, y, \ldots) = Q_2(x, y, \ldots)R_2(x, y, \ldots) + R_3(x, y, \ldots)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_{k-1}(y, z, \ldots)R_{k-2}(x, y, \ldots) = Q_{k-1}(x, y, \ldots)R_{k-1}(x, y, \ldots) + R_k(x, y, \ldots)\\
&P_k(y, z, \ldots)R_{k-1}(x, y, \ldots) = Q_k(x, y, \ldots)R_k(x, y, \ldots) + R_{k+1}(y, z, \ldots).
\end{aligned}
$$

Степени φ, R_1, R_2, ... относительно буквы x, по которой мы дѣлимъ, убываютъ; слѣдовательно, мы доходимъ до такого остатка R_{k+1}, который не заключаетъ буквы x.

Полиномы f и φ будутъ имѣть общаго дѣлителя, заключающаго букву x, тогда и только тогда, когда $R_{k+1}(y, z, \ldots)$ *тождественно уничтожается.*

Чтобы это доказать, замѣтимъ прежде всего, что каждый общій дѣлитель f и φ будетъ по первому равенству (1) дѣлителемъ остатка $R_1(x, y, \ldots)$, а тогда по второму равенству (1) онъ будетъ также дѣлителемъ R_2; продолжая разсужденіе далѣе, мы замѣтимъ, что этотъ дѣлитель, заключая букву x, будетъ дѣлить R_{k+1}, что невозможно (см. § 10). Значитъ, долженъ равняться тождественно нулю остатокъ R_{k+1}.

Для доказательства обратнаго, а именно, что при тождествѣ $R_{k+1} = 0$ функціи f и φ имѣютъ общихъ дѣлителей, заключающихъ букву x, и для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя этихъ функцій, будемъ разсуждать по индукціи.

Предположимъ, что для цѣлыхъ функцій, не заключающихъ буквы x, другими словами, для цѣлыхъ функцій, число перемѣнныхъ независимыхъ, которыхъ на единицу меньше, имѣетъ мѣсто теорія дѣлимости аналогичная ариѳметической; то отсюда будетъ слѣдовать не только подлежащее доказательству обратное заключеніе, но и существованіе теоріи, аналогичной ариѳметической, для полиномовъ, заключающихъ также и перемѣнную x. Въ параграфахъ 18, 19, 20 мы видѣли, что ариѳметическая теорія провѣряется для функцій отъ одной перемѣнной независимой, слѣдовательно, съ этого случая можетъ начаться индукція.

Итакъ, предполагая существованіе ариѳметической теоріи для функцій отъ перемѣнныхъ независимыхъ y, z, ... (безъ x), мы напомнимъ характерныя положенія этой теоріи:

1) Функціи однимъ только способомъ [1]) раскладываются на неприводимыхъ множителей.

2) Если произведеніе ff_1 дѣлится на φ, но f и φ взаимно простыя функціи, то f_1 дѣлится на φ.

3) Если произведеніе ff_1 дѣлится на неприводимаго множителя φ, то на него должна дѣлиться одна изъ функцій f или f_1.

4) Произведеніе функцій взаимно простыхъ съ φ есть сама функція взаимно простая съ φ.

§ 25.

Если мы возьмемъ функцію $\varphi(y, z, \ldots)$ безъ x, то, какъ мы видѣли въ § 21, для дѣлимости на φ функціи, заключающей x, необходимымъ и достаточнымъ условіемъ является дѣлимость на φ всѣхъ коэффиціентовъ при степеняхъ x.

Итакъ, если у насъ задана функція

$$f = X_0x^n + X_1x^{n-1} + \ldots X_n,$$

то, разложивъ всѣ коэффиціенты X_i на неприводимые множители, можемъ найти общаго наибольшаго дѣлителя этихъ коэффиціентовъ.

Пусть этотъ дѣлитель будетъ φ, тогда получимъ

$$f = \varphi f_1,$$

гдѣ

$$f_1 = X_0'x^n + X_1'x^{n-1} + \ldots + X_n'.$$

Новые X_i' не имѣютъ уже отличнаго отъ постояннаго числа общаго дѣлителя.

Итакъ при помощи функціи φ выдѣлены уже всѣ неприводимые множители f, *незаключающіе* буквы x. Функція же f_1 можетъ раскладываться лишь на множители, заключающіе букву x. Функція φ по предположенію раскладывается однимъ только способомъ на неприводимые множители. Остается показать, что такое же единственное разложеніе на множители имѣетъ мѣсто для функціи f_1, заключающей букву x.

Докажемъ теперь теорему.

Неприводимая функція $\varphi(y, z, \ldots)$, не заключающая x и которая есть дѣлитель произведенія ff_1 двухъ функцій, заключающихъ букву x, должна дѣлить одну изъ функцій f или f_1.

Произведеніе двухъ полиномовъ

$$f = X_0x^n + X_1x^{n-1} + \ldots$$

$$f_1 = Y_0x^m + Y_1x^{m-1} + \ldots$$

[1]) Съ указанной, конечно, выше оговоркой.

есть

$$ff_1 = X_0Y_0x^{n+m} + (X_0Y_1 + X_1Y_0)x^{n+m-1} + (X_0Y_2 + X_1Y_1 + X_2Y_0)x^{n+m-2} + \ldots$$

Допустимъ обратное, что ни одна изъ функцій f и f_1 не дѣлится на φ; тогда не всѣ X_i и не всѣ Y_i дѣлятся на φ. Пусть коэффиціенты $X_0, X_1, \ldots X_{i-1}$ дѣлятся на φ, а X_i не дѣлится на φ (можетъ быть, конечно, $i=0$); подобнымъ же образомъ $Y_0, Y_1, \ldots Y_{j-1}$ дѣлятся на φ, а Y_j не дѣлится на φ. Мы получимъ коэффиціентъ члена $x^{n-i+m-j}$ произведенія ff_1 въ такомъ видѣ

$$(1) \ldots \quad X_0Y_{i+j} + \ldots + X_{i-1}Y_{j+1} + X_iY_j + X_{i+1}Y_{j-1} + \ldots + X_{i+j}Y_0,$$

гдѣ X и Y съ индексами *большими* n и m *надо считать* равными нулю. По предположенію теоремы выраженіе (1) должно дѣлиться на φ. Мы приходимъ къ заключенію о дѣлимости на φ произведенія X_iY_j, ибо другіе члены будутъ по предположенію дѣлиться на φ; но X_i, Y_j, φ не заключаютъ буквы x, слѣдовательно, по предположенію приложимости къ нимъ ариѳметической теоріи мы приходимъ къ противорѣчію, ибо ни X_i ни Y_j не дѣлятся на φ [1])

§ 26.

Докажемъ теперь теорему *если произведеніе ff_1 двухъ функцій, заключающихъ букву x, дѣлится на функцію φ, не заключающую x, причемъ f и φ будутъ функціи взаимно простыя, то f_1 должно дѣлиться на φ.*

Разложимъ φ на произведеніе неприводимыхъ множителей

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2, \ldots \varphi_k.$$

По предположенію мы имѣемъ равенство

$$(1) \qquad ff_1 = \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_k F(x, y, z, \ldots).$$

Функція φ_1 дѣлитъ произведеніе f и f_1, слѣдовательно, она какъ неприводимая должна дѣлить или множитель f, или же множитель f_1, но f и φ по предположенію взаимно простыя, слѣдовательно, φ_1 должна дѣлить f_1 и мы получаемъ $f_1 = \varphi_1 f_1'$; тогда равенство (1) даетъ

$$ff_1' = \varphi_2 \ldots \varphi_k F;$$

далѣе доказываемъ дѣлимость f_1' на φ_2 и, продолжая далѣе, убѣдимся, что f_1 дѣлится на φ, что и требовалось доказать.

[1]) Мы просимъ читателя сравнить §§ 15, 16 главы XIII.

§ 27

Переходимъ теперь къ доказательству обратнаго заключенія § 23, а именно, что, если существуетъ тождество $R_{k+1}=0$, то функціи f и φ имѣютъ общихъ дѣлителей, заключающихъ букву x. Пусть

$$R_k = \omega\ S(x, y, z, \ldots),$$

гдѣ ω есть полиномъ, не заключающій x и представляющій общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ коэффиціентовъ при разныхъ степеняхъ x въ R_k.

Тогда на основаніи послѣдняго изъ равенствъ (1) § 24 мы имѣемъ

$$P_k R_{k-1} = Q_k \omega S.$$

Функція P_k взаимно простая съ S, ибо не содержитъ x, слѣдовательно,

$$Q_k \omega = P_k T(x, y, z, \ldots)$$

и мы получаемъ

$$R_{k-1} = TS.$$

Подставляя въ предыдущее равенство, будемъ имѣть

$$P_{k-1} R_{k-2} = (Q_{k-1} T + \omega) S,$$

откуда подобно предыдущему получаемъ

$$R_{k-2} = T_1 S.$$

Итакъ, функція S, заключающая обязательно x, ибо первый остатокъ не заключающій x есть по предположенію R_{k+1}, есть дѣлитель обѣихъ функцій f и φ.

Покажемъ, что всякій общій дѣлитель $\psi(x, y, z, \ldots)$ функцій f и φ, не имѣющій дѣлителей безъ x, будетъ дѣлителемъ функціи S. Въ самомъ дѣлѣ, ψ дѣлитъ всѣ остатки и, слѣдовательно, получается

$$\omega S = \psi(x, y, z, \ldots)\psi_1(x, y, z, \ldots),$$

но ψ и ω взаимно простыя, слѣдовательно, ψ дѣлитъ S, что и требовалось показать.

Итакъ, *если $R_{k+1}=0$, то общій наибольшій дѣлитель функцій f и φ, заключающій x и освобожденный отъ всякихъ дѣлителей безъ x, получится, если изъ $R_k(x, y, z, \ldots)$ удалить всѣхъ подобныхъ дѣлителей.*

§ 28.

Теперь мы подходимъ къ завершенію разсужденій послѣднихъ параграфовъ, а именно къ доказательству справедливости ариѳметической теоріи во всѣхъ подробностяхъ для функцій, заключающихъ букву x, если справедливость ея извѣстна для функцій безъ x.

Все основывается на теоремѣ:

Если разсматриваются три функціи

$$f(x, y, z, \ldots), \varphi(x, y, z, \ldots), \psi(x, y, z, \ldots),$$

причемъ функція ψ не приводимая и дѣлитъ произведеніе $f\varphi$, то ψ должна дѣлить одну изъ функцій f или φ.

Если функція ψ не дѣлитъ функцію f, то функціи f и ψ взаимно простыя, ибо ψ функція неприводимая. Въ этомъ случаѣ при примѣненіи алгориѳма § 24 къ двумъ функціямъ f и ψ мы должны дойти до остатка, не заключающаго x и не тождественно равнаго нулю. Пусть этотъ остатокъ будетъ R_{k+1}. Примѣняя соображенія § 18, мы получимъ

$$(1)\ R_{k+1} = f(x, y, z, \ldots)F(x, y, z, \ldots) + \psi(x, y, z, \ldots)\Psi(x, y, z, \ldots),$$

гдѣ F и Ψ извѣстнымъ образомъ подобранныя цѣлыя функціи.

Умножаемъ тождество (1) на $\varphi(x, y, z, \ldots)$. Получаемъ въ правой части полиномъ, дѣлящійся на ψ, такъ, что будетъ

$$R_{k+1}(y, z, \ldots)\varphi(x, y, z, \ldots) = \psi(x, y, z, \ldots)\omega(x, y, z, \ldots).$$

На основаніи неприводимости ψ, эта функція можетъ имѣть только постояннаго множителя съ R_{k+1}, слѣдовательно, φ дѣлится на ψ.

Слѣдствіе I. *Если произведеніе*

$$f_1(x, y, \ldots)f_2(x, y, \ldots)\ldots f_k(x, y, \ldots)$$

дѣлится на неприводимую функцію $\psi(x, y, \ldots)$, то одинъ изъ множителей долженъ дѣлиться на ψ

Изъ этой теоремы вытекаетъ на основаніи соображеній, подобныхъ приводимымъ въ теоріи чиселъ, единственность разложенія цѣлой функціи на неприводимые множители, если не считать за различныя функціи, отличающіяся на постоянный множитель.

§ 29.

Если функція φ дѣлитъ произведеніе $f_1, f_2, \ldots f_k$, но не дѣлитъ ни одного множителя f, то функція φ *не можетъ* быть неприводимою.

Разсмотримъ для примѣра тождество

$$\frac{a_1xy + b_1x + c_1y + \partial_1}{a_2xy + b_2x + c_2y + \partial_2} + \frac{a_3xy + b_3x + c_3y + \partial_3}{a_4xy + b_4x + c_4y + \partial_4},$$

причемъ *не равенъ нулю* опредѣлитель

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \partial_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \partial_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \partial_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & \partial_4 \end{vmatrix}$$

Освобождаясь отъ знаменателей, мы замѣтимъ, что функція $a_1xy + b_1x + c_1y + \partial_1$ дѣлитъ произведеніе

(2) $$(a_2xy + b_2x + c_2y + \partial_2)(a_3xy + b_3x + c_3y + \partial_3),$$

но въ тоже самое время она не можетъ дѣлить ни одного изъ множителей произведенія (2), ибо иначе опредѣлитель (1) равнялся бы нулю. Итакъ, разсматриваемая функція приводимая, то есть

$$a_1xy + b_1x + c_1y + \partial_1 = (\alpha x + \beta)(\gamma y + \delta).$$

§ 30

Если функція цѣлая φ дѣлитъ степень f^n, гдѣ f функція неприводимая, то

$$\varphi = f^k.$$

Приложимъ эту теорему къ разсмотрѣнію одного опредѣлителя.

Пусть заданъ опредѣлитель $\Delta = |a_{ik}|$. Обозначимъ

$$a_{ki}^{(l)} = \begin{vmatrix} a_{ik} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{ik} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{ik} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ik} \end{vmatrix},$$

гдѣ l обозначаетъ число горизонталей и колоннъ, всѣ діагональные элементы суть a_{ik}, а остальные нули.

Требуется вычислить опредѣлитель

$$(1)\qquad \mathfrak{a}^{(l)} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}^{(l)} & \mathfrak{a}_{12}^{(l)} & \dots & \mathfrak{a}_{1n}^{(l)} \\ \mathfrak{a}_{21}^{(l)} & \mathfrak{a}_{22}^{(l)} & \dots & \mathfrak{a}_{2n}^{(l)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_{n1}^{(l)} & \mathfrak{a}_{n2}^{(l)} & \dots & \mathfrak{a}_{nn}^{(l)} \end{vmatrix}$$

Для поясненія этого знака замѣтимъ, что, если

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

то при $l = 2$ получимъ

$$\mathfrak{a}^{(2)} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для вычисленія опредѣлителя (1) разсмотримъ новый, который получается, если всѣ нули оставить на прежнихъ мѣстахъ, а вмѣсто элементовъ a_{ik} опредѣлителя A подставить ихъ алгебраическія дополненія A_{ik}.

Обозначимъ этотъ новый опредѣлитель через $\mathfrak{a}_1^{(l)}$. Тогда произведеніе $\mathfrak{a}^{(l)}\mathfrak{a}_1^{(l)}$, какъ не трудно видѣть, будетъ опредѣлителемъ порядка nl, всѣ діагональные элементы котораго будутъ A, а остальные нули. Слѣдовательно,

$$\mathfrak{a}^{(l)}\mathfrak{a}_1^{(l)} = A^{nl}.$$

На основаніи неприводимости буквеннаго опредѣлителя A мы заключаемъ

$$\mathfrak{a}^{(l)} = A^k.$$

Не трудно однако, сравнивая показателей надъ одной какой нибудь буквой, получить $k = l$, такъ что окончательно

$$a^{(l)} = A^l .$$

§ 31

Здѣсь упомянемъ безъ доказательства весьма важную и общую теорему Hibert'a [1]), а именно, *можно во всякой не приводимой цѣлой функціи отъ любого числа перемѣнныхъ независимыхъ подставить вмѣсто любой части этихъ перемѣнныхъ такія раціональныя числа, что функція относительно остальныхъ перемѣнныхъ будетъ по прежнему неприводимой.*

Свойства цѣлыхъ раціональныхъ инваріантовъ.

§ 32.

Приложимъ теперь выше изложенныя теоремы къ доказательству ряда весьма важныхъ замѣчаній, относящихся къ цѣлымъ раціональнымъ инваріантамъ.

Очевидно, что всякое произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ инваріантовъ будетъ опять цѣлымъ инваріантомъ, при этомъ вѣсъ произведенія равенъ суммѣ вѣсовъ отдѣленныхъ множителей. Докажемъ теперь предложеніе обратное.

Теорема. *Цѣлый раціональный инваріантъ*

$$I(a_1, a_2, \ldots)$$

формы $f(a_1, a_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots)$ *есть такая функція, каждый цѣлый множитель которой есть также инваріантъ.*

Очевидно, что достаточно доказать теорему только для неприводимыхъ множителей $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ инваріанта I.

Подвергнемъ формулу f линейному преобразованію модуля c, и пусть $a_1' a_2', \ldots$ суть новые коэффиціенты. По свойству инваріантовъ имѣемъ

$$I(a_1', a_2', \ldots) = c^p I(a_1, a_2, \ldots).$$

Разлагая обѣ части на неприводимыхъ множителей, получимъ

$$\varphi_1(a_1', a_2', \ldots) \ldots \varphi_k(a_1', a_2', \ldots) = c^p \varphi_1(a_1, a_2, \ldots) \ldots \varphi_k(a_1, a_2, \ldots),$$

[1]) Hilbert. Ueber die Irreducibilität ganzer rationalen Functionen mit ganzzahligen Coefficienten. Journ. f. r. u. ang. Math. B. 110

ибо опредѣлитель общаго вида c есть функція неприводимая. Каждый множитель φ_i лѣвой части есть функція, какъ отъ элементовъ опредѣлителя, такъ и отъ первоначальныхъ коэффиціентовъ $a_1, a_2, \ldots$ формы f.

Слѣдовательно, должно быть

(1) $$\varphi_i(a_1', a_2', \ldots) = c^{\lambda}\psi(a_1, a_2, \ldots),$$

гдѣ ψ есть цѣлая функція, равная произведенію одной или нѣсколькихъ функцій $\varphi_i(a_1, a_2, \ldots), \ldots \varphi_k(a_1, a_2, \ldots)$

Примѣняя тождество (1) къ случаю тождественнаго преобразованія $c = 1$, получимъ

$$a_1' = a_1, \; a_2' = a_2, \ldots$$

и, слѣдовательно, равенство (1) даетъ тождество

$$\varphi_i(a_1, a_2, \ldots) = \psi(a_1, a_2, \ldots),$$

такъ что получаемъ окончательно равенство

$$\varphi_i(a_1', a_2', \ldots) = c^{\lambda}\varphi_i(a_1, a_2, \ldots),$$

показывающее, что функція φ_i есть инваріантъ, и теорема доказана.

§ 31.

Еслибы мы захотѣли обобщить понятіе инваріанта такимъ образомъ, что назвали бы инваріантомъ такую функцію $I(a_1, a_2, \ldots)$ коэффиціентовъ формы f, которая при преобразованіи съ модулемъ $c = | c_{ik}$ получаетъ множителемъ нѣкоторую цѣлую функцію

$$\psi(c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}),$$

то эта функція ψ не можетъ быть ничѣмъ инымъ, какъ степенью модуля. Такимъ образомъ мы не получаемъ никакого обобщенія.

Для доказательства этого обстоятельства приведемъ предварительно слѣдующую лемму.

Если заданы двѣ цѣлыя функціи f и φ отъ произвольнаго числа перемѣнныхъ независимыхъ, изъ которыхъ φ неприводимая; то если f обращается въ нуль для всѣхъ значеній перемѣнныхъ независимыхъ, уничтожающихъ функцію φ, то f дѣлится на φ.

Если f не дѣлится на φ, то функціи f и φ взаимно простыя. Производя послѣдовательныя дѣленія по одной изъ общихъ независимыхъ перемѣнныхъ, которую обозначимъ черезъ x, мы дойдемъ до неравнаго тождественно нулю остатка $R(y, z, \ldots)$, заключающаго другія перемѣнныя

независимыя $y, z, \ldots$ Такъ какъ функція φ заключаетъ по предположенію x, то можемъ написать

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = a_0(y, z, \ldots)x^n + a_1(y, z, \ldots)x^{n-1} + \ldots,$$

гдѣ $a_0(y, z, \ldots)$ не равна тождественно нулю.

Итакъ, произведеніе

$$R(y, z, \ldots) \cdot a_0(y, z, \ldots)$$

не равно тождественно нулю, и, слѣдовательно, можно указать такія значенія $y_1, z_1, \ldots$ независимыхъ перемѣнныхъ, что будетъ

(1) $$R(y_1, z_1, \ldots) \neq 0, \quad a_0(y_1, z_1, \ldots) \neq 0.$$

Полиномъ $\varphi(x, y_1, z_1, \ldots)$ будетъ заключать x, слѣдовательно онъ будетъ обращаться въ нуль по крайней мѣрѣ для одного значенія x_1 перемѣннаго x

$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \ldots) = 0;$$

тогда по предположенію $f(x_1, y_1, z_1, \ldots) = 0$, а, слѣдовательно, на основаніи тождества $R = fF + \varphi\Phi$ и $R = 0$, что противорѣчитъ неравенству (4). Итакъ, f дѣйствительно должна дѣлиться на φ.

Обращаемся теперь къ доказательству поставленнаго въ началѣ параграфа утвержденія; для этой цѣли покажемъ, что функція $\psi(c_{11}, \ldots c_{nn})$ обращается въ нуль только при такихъ значеніяхъ c_{ik}, при которыхъ равняется нулю модуль $c = |c_{ik}|$ преобразованія. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ обратное, а именно, что при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ γ_{ik} коэффиціентовъ c_{ik} *обращается въ нуль* функція ψ, а модуль c *неравенъ* нулю.

Итакъ, допустимъ, что

(1) $$I(a_1', a_2', \ldots) = \psi(c_{11}, \ldots c_{nn}) I(a_1, a_2, \ldots)$$

Возьмемъ такую систему начальныхъ значеній коэффиціентовъ a_1, $a_2, \ldots$ при которыхъ

(2) $$I(a_1, a_2, \ldots) \neq 0.$$

Примѣняя преобразованіе съ коэффиціентами γ_{ik}, получимъ

$$I(a_1', a_2', \ldots) = \psi(\gamma_{11}, \ldots \gamma_{nn}) I(a_1, a_2, \ldots) = 0;$$

обозначая черезъ γ_{ik}' коэффиціенты преобразованія обратнаго, получимъ

$$I(a_1, a_2, \ldots) = \psi(\gamma_{11}', \ldots \gamma_{nn}') I(a_1', a_2', \ldots) = 0,$$

что противорѣчитъ неравенству (2) Слѣдовательно, при $\psi=0$ должно быть также и $c=0$.

Разложимъ ψ на неприводимыхъ множителей

$$(3) \qquad \psi(c_{11}, \ldots c_{nn}) = \varphi_1(c_{11}, \ldots) \ldots \varphi_k(c_{11}, \ldots).$$

Если для нѣкоторыхъ значеній c_{ik} обращается въ нуль одинъ изъ неприводимыхъ множителей, напримѣръ, φ_i, то долженъ тогда обращаться въ нуль и модуль c преобразованія. На основаніи доказанной леммы функція φ_i должна быть дѣлителемъ опредѣлителя c, разсматриваемаго какъ функцію отъ c_{ik}.—Но опредѣлитель есть функція неприводимая, слѣдовательно, φ_i можетъ отличаться только постояннымъ множителемъ отъ c. Значитъ, тождество (3) можно переписать такъ: $\psi = Lc^k$, гдѣ L постоянная величина.

Перепишемъ теперь тождество (1) такъ

$$I(a_1', \ldots) = Lc^k I(a, \ldots)$$

и примѣнимъ тождественное преобразованіе, то получимъ $L=1$, слѣдовательно, будемъ имѣть окончательно

$$\psi = c^k.$$

Свойство изобаричности.

§ 33

Разсмотримъ цѣлую функцію отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ

$$(1) \qquad \Sigma A x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots t^\rho.$$

Сопоставимъ каждой перемѣнной независимой нѣкоторое цѣлое число, которое мы назовемъ ея *вѣсомъ*

Пусть перемѣнныя

$$x, y, z, \ldots t$$

будутъ имѣть вѣса

$$l, m, n, \ldots r.$$

Выраженіе

$$l\lambda + m\mu + n\nu + \ldots + r\rho$$

мы будемъ называть *вѣсомъ члена*

$$Ax^\lambda y^\mu z^\nu \ldots t^\rho.$$

Наибольшій изъ вѣсовъ отдѣльныхъ членовъ мы назовемъ *вѣсомъ* всей цѣлой функціи (1).

Какъ частный случай понятія о вѣсѣ можно разсматривать данное въ § 1 главѣ I понятіе о степени.

Это тотъ частный случай, когда всѣмъ перемѣннымъ независимымъ приписывается вѣсъ 1, т. е

(2) $$l = 1,\ m = 1,\ n = 1,\ \ldots r = 1.$$

Мы будемъ функцію (1) называть *изобарическою,* если вѣса всѣхъ ея отдѣльныхъ членовъ одинаковы. Въ случаѣ (2) понятіе объ изобаричности совпадаетъ съ даннымъ нами въ § 2 главы I понятіемъ однородности.

§ 34

Будемъ разсматривать вѣса различныхъ членовъ инваріанта

$$I(a_1,\ a_2,\ \ldots),$$

представляющаго изъ себя цѣлую функцію отъ коэффиціентовъ a_i формы

(1) $$\Sigma a_i x^\lambda y^\mu z^\nu \ldots t^\rho.$$

Будемъ придавать коэффиціентамъ a_i вѣса въ зависимости отъ той или другой выбранной перемѣнной независимой. Если выберемъ перемѣнную независимую x, то установимъ вѣсъ коэффіціента a_i по показателю λ надъ x. Итакъ, коэффиціентъ a_i имѣетъ вѣсъ λ относительно x, вѣсъ μ — относительно y, вѣсъ ν — относительно z и т. д.

Докажемъ изобаричность цѣлаго инваріанта формы относительно каждой перемѣнной независимой.

Будемъ разсматривать одну изъ перемѣнныхъ, напримѣръ, x; то, что будетъ сказано относительно нея, будетъ, очевидно, годиться для каждой изъ остальныхъ.

Если мы сдѣлаемъ линейное преобразованіе

(2) $$\ldots x = cx',\ y = y',\ z = z',\ \ldots t = t'$$

съ модулемъ равнымъ c, то форма (1) преобразуется въ такую

$$\Sigma a_i' x'^\lambda y'^\mu z'^\nu \ldots t'^\rho,$$

гдѣ

$$a_i' = a_i c^\lambda.$$

Итакъ, *вѣсъ каждаго изъ коэффиціентовъ a_i формы можно опредѣлить какъ показателя степени величины c, на которую умножается a_i при преобразованіи (2).*

Отсюда слѣдуетъ, что изобарическій по отношенію къ x полиномъ вѣса λ пріобрѣтаетъ c^λ множителемъ при преобразованіи (2)

Справедливо также обратное свойство, а именно, что, если, полиномъ отъ коэффиціентовъ формы получаетъ при преобразованіи (2) множителя c^λ, то онъ есть изобарическая относительно x функція вѣса λ.

Пусть

(3) $$f(a_1', \ldots) = c^\lambda f(a_1, \ldots).$$

Разобьемъ функцію f на отдѣльныя изобарическія части

(4) $$f(a_1, \ldots) = f_1(a_1, \ldots) + f_2(a_1, \ldots) + \ldots,$$

гдѣ f_1 есть совокупность членовъ вѣса λ_1, f_2 вѣса λ_2 и т. д. Мы будемъ имѣть

(5) $$f(a_1', \ldots) = c^{\lambda_1} f_1(a_1, \ldots) + c^{\lambda_2} f_2(a_1, \ldots) + \ldots$$

На основаніи (3) и (4) получаемъ

$$f(a_1', \ldots) = c^\lambda f_1(a_1, \ldots) + c^\lambda f_2(a_1, \ldots) + \ldots$$

Правая часть послѣдняго равенства должна быть тождественно равна правой части равенства (5), и мы получаемъ

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$$

Мы приходимъ, дѣйствительно, къ заключенію: *полиномъ f, составленный изъ коэффиціентовъ формы, получаетъ при преобразованіи (2) множителя c^λ тогда и только тогда, когда онъ изобарическій относительно x и имѣетъ вѣсъ λ.*

§ 35.

На основаніи соображеній предыдущаго параграфа мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Цѣлый раціональный инваріантъ вѣса λ [1]) *есть относительно всякой перемѣнной изобарическая функція вѣса λ.*

Это свойство изобаричности сохраняется для инваріантовъ всякой системы, состоящей изъ нѣсколькихъ формъ.

Нетрудно убѣдиться, что всякій цѣлый раціональный инваріантъ имѣетъ положительный вѣсъ, отличный отъ нуля; стоитъ для этой цѣли принять только въ соображеніе, что вѣсъ всякаго коэффиціента a_i не меньше единицы по которой нибудь изъ буквъ.

---

[1]) Въ смыслѣ § 6 Гл. VI

§ 36.

Обращаясь къ разсмотрѣнію вѣса коваріанта, можемъ переписать преобразованіе (2) въ такомъ видѣ

$$x' = c^{-1}x\,, \quad y' = c^0 y\,, \quad z' = c^0 z\,, \ldots t' = c^0 t\,,$$

другими словами, при разсмотрѣніи вѣсовъ по отношенію къ буквѣ x, придется придавать для когредіентныхъ перемѣнныхъ вѣсъ —1 буквѣ аналогичной x и вѣсъ 0 всѣмъ остальнымъ. При такомъ условіи мы придемъ къ изобаричности всякаго коваріанта.

§ 37.

Пояснимъ изложенную теорію на примѣрѣ.

Возьмемъ квадратичную форму

$$ax^2 + 2bxy + cy^2\,.$$

Коэффицентъ a имѣетъ вѣсъ 2 по x и вѣсъ 0 по y.

Инваріантъ $ac - b^2$ будетъ имѣть вѣсъ 2 по любой изъ буквъ x и y.

Полярная форма

$$ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2$$

будетъ коваріантомъ нулевого вѣса.

Принципъ однородности.

§ 38.

Разсмотримъ сверхповерхность [1]) въ пространствѣ $n-1$ измѣреній, опредѣляемую уравненіемъ

(1) $$f(a_1\,, a_2\,, \ldots; x_1\,, \ldots x_n) = 0\,,$$

гдѣ f форма относительно x_i. Эта форма будетъ однородною функціею первой степени относительно коэффиціентовъ a_i. Очевидно, что сверхповерхность не измѣняется, если умножить всѣ коэффиціенты a_i на одно и тоже отличное отъ нуля число c; т. е. уравненіе

(2) $$f(ca_1\,, ca_2\,, \ldots; x_1\,, \ldots x_n) = 0$$

опредѣляетъ туже сверхповерхность, что и (1).

---

[1]) См. стр. 198.

На простыхъ примѣрахъ можно показать слѣдующій интересный фактъ, что соотношеніе между коэффиціентами

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots) = 0$$

не всегда выдѣляетъ изъ всей совокупности сверхповерхностей нѣкоторый *классъ*.

Возьмемъ уравненіе плоскости въ трехмѣрномъ пространствѣ

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4; x, y, z, 1) = 0;$$

это уравненіе имѣетъ видъ

(3) $$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0.$$

Соотношеніе

$$a_4 = 0$$

выдѣляетъ классъ плоскостей, проходящихъ черезъ начало координатъ.

Соотношеніе же

(4) $$a_4 = 1$$

не выдѣляетъ никакого класса, ибо черезъ дѣленіе уравненія (3) всякой плоскости (не проходящей черезъ начало координатъ) на a_4 мы удовлетворимъ соотношенію (4).

Принявъ сказанное въ соображеніе, предположимъ, что соотношеніе

(5) $$\varphi(a_1, a_2, \ldots) = 0$$

выдѣляетъ нѣкоторый классъ сверхповерхностей.

Мы будемъ говорить, что соотношеніе (5) выражаетъ нѣкоторое *геометрическое свойство* сверхповерхностей этого класса.

§ 39.

Теорема. Соотношеніе $\varphi = 0$, гдѣ φ цѣлая раціональная функція отъ коэффиціентовъ a_i уравненія сверхповерхности тогда и только тогда выражаетъ геометрическое свойство сверхповерхности, когда φ есть однородная функція отъ a_i.

Если φ *не однородная* функція, то она раскладывается на сумму однородныхъ

$$\varphi = \varphi_m + \varphi_{m-1} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0,$$

гдѣ знакомъ φ_k обозначена однородная функція степени k; мы, конечно, предполагаемъ, что кромѣ φ_m еще по крайней мѣрѣ одна изъ φ_k не равна тождественно нулю.

Представимъ уравненіе сверхповерхности въ такомъ видѣ

(1) $$f(ca_1', ca_2', \ldots, x_1, \ldots x_n) = 0,$$

гдѣ c произвольная перемѣнная величина, а числа a_1', a_2', ... такія значенія коэффиціентовъ a_1, a_2, ..., при которыхъ не обращаются въ нуль φ_m и по крайней мѣрѣ одна изъ слѣдующихъ φ_k.

Соотношеніе $\varphi = 0$ принимаетъ видъ

(2) $$c^m\varphi_m(a_1'a_2' \ldots) + c^{m-1}\varphi_{m-1}(a_1', \ldots) + \ldots = 0.$$

Такъ какъ въ уравненіи (2) кромѣ старшаго коэффиціента φ_m не равенъ нулю по крайней мѣрѣ еще одинъ, то это уравненіе имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ отличный отъ нуля корень c_1. Возьмемъ новое значеніе c_2, не удовлетворяющее уравненію (2). Мы приходимъ къ заключенію, что при $c = c_1$ и $c = c_2$ уравненіе (1) опредѣляетъ одну и туже сверхповерхность, между тѣмъ какъ въ первомъ случаѣ соотношеніе $\varphi = 0$ удовлетворяется, а во второмъ нѣтъ. Слѣдовательно, соотношеніе $\varphi = 0$ не представляетъ геометрическаго свойства.

Можно показать обратное свойство, а именно, что если φ однородная функція степени m, то соотношеніе $\varphi = 0$ даетъ геометрическое свойство сверхповерхности (1). Для этой цѣли надо доказать, что всѣ сверхповерхности распадаются на два класса A и B, причемъ сверхповерхности класса A удовлетворяютъ соотношенію $\varphi = 0$, а взятыя изъ класса B не удовлетворяютъ.

Пусть a_1', a_2', ... будутъ коэффиціенты одной изъ сверхповерхностей класса A, а a_1'', a_2'', ... будутъ коэффиціенты сверхповерхности изъ класса B. Нужно показать, что два уравненія

$$f(a_1', a_2', \ldots; x_1, \ldots x_n) = 0$$

$$f(a_1'', a_2'', \ldots; x_1, \ldots x_n) = 0$$

не могутъ давать одну и туже сверхповерхность, другими словами, что не существуетъ пропорціи

$$a_1'' = ca_1', \ a_2'' = ca_2', \ \ldots,$$

гдѣ $c \neq 0$.

Изъ однородности φ слѣдуетъ

$$\varphi(a_1'', a_2'', \ldots) = c^m\varphi(a_1', a_2', \ldots),$$

если мы допустимъ существованіе пропорціи. Послѣднее же равенство невозможно, ибо по предположенію

$$\varphi(a_1', a_2', \ldots) = 0, \ \varphi(a_1'', a_2'', \ldots) \neq 0,$$

и теорема доказана.

§ 40.

Итакъ, мы видимъ, что въ геометріи особое значеніе имѣютъ однородные инваріанты.

Пусть разсматриваются формы

$$(1)\qquad \begin{aligned} &f_1(a, \ldots; x_1, \ldots x_n) = 0 \\ &f_2(b, \ldots; x_1, \ldots x_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

степеней $m_1, m_2, \ldots$ относительно x_i.

Сдѣлаемъ преобразованіе $x = c(x')$ съ матрицей

$$c = \| c_{ik} \|,$$

тогда формы (1) перейдутъ въ новыя

$$(2)\qquad \begin{aligned} &f_1(a', \ldots; x_1', \ldots x_n') = 0 \\ &f_2(b', \ldots; x_1', \ldots x_n') = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Новые коэффиціенты a' будутъ, очевидно, цѣлыми функціями однородными первой степени относительно первоначальныхъ коэффиціентовъ и однородными степени m_1 отъ c_{ik}. Подобнымъ же образомъ b' будутъ первой степени относительно b и степени m_2 относительно c_{ik} и такъ далѣе.

§ 41.

Разсмотримъ инваріантъ

$$I(a, \ldots, b, \ldots; \ldots)$$

вѣса λ системы формъ (1) § 40. Пусть этотъ инваріантъ будетъ однородной функціей степени α относительно a, однородной функціей степени β относительно b и т. д.

Разсматривая тождество

$$(1)\qquad I(a', \ldots; b', \ldots; \ldots) = c^{\lambda} I(a, \ldots; b, \ldots; \ldots),$$

сравнимъ степени его обѣихъ частей относительно элементовъ c_{ik} преобразованія. Лѣвая часть будетъ имѣть степень

$$m_1\alpha + m_2\beta + \ldots,$$

ибо a' степени m_1, b' степени m_2 и т. д.

Правая же часть равенства (1) имѣетъ относительно c_{ik} степень $n\lambda$. Мы приходимъ къ весьма важному равенству

$$m_1\alpha + m_2\beta + \ldots = n\lambda.$$

§ 42.

Теорема. Если цѣлый раціональный инваріантъ

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_r$$

есть сумма функцій I_i, изъ которыхъ каждая, но не сумма двухъ изъ нихъ, однородна по отношенію къ коэффиціентамъ a, b, .. каждой изъ формъ въ отдѣльности, то функціи

$$I_1,\ I_2,\ \ldots I_r$$

будутъ однородными инваріантами системы (1) § 40.

Напишемъ свойство инваріантности I.

$$I_1(a',\ \ldots;\ b',\ \ldots;\ \ldots) + \ldots + I_r(a_1'\ldots;\ b'\ldots;\ \ldots) =$$

$$= c^{\lambda}[I_1(a,\ \ldots;\ b,\ \ldots;\ \ldots) + \ldots + I_r(a,\ \ldots;\ b,\ \ldots;\ \ldots)].$$

Принимая въ соображеніе, что всѣ a' суть формы первой степени относительно a, что всѣ b' также первой степени относительно b и т. д., и сравнивая однородныя функціи одинаковыхъ степеней относительно a, b, ... получимъ

$$I_1(a_1',\ \ldots;\ b',\ \ldots;\ \ldots) = c^{\lambda} I_1(a,\ \ldots;\ b,\ \ldots;\ \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_r(a',\ \ldots;\ b',\ \ldots;\ \ldots) = c^{\lambda} I_r(a,\ \ldots;\ b,\ \ldots;\ \ldots),$$

и теорема доказана.

§ 43.

Теорема. Всякій цѣлый раціональный инваріантъ одной формы есть однородная функція ея коэффиціентовъ.

Итакъ, пусть I будетъ инваріантъ формы

$$f(a,\ \ldots;\ x_1,\ \ldots x_n).$$

Разлагая инваріантъ I на однородные инваріанты, получимъ

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_r.$$

Пусть степени инваріантовъ I_1, I_2, ... I_r относительно a будутъ α_1, α_2, ... α_r

Обозначая черезъ m степень формы f, получимъ для однородныхъ инваріантовъ (см. § 41) рядъ равенствъ

$$m\alpha_1 = n\lambda, \ m\alpha_2 = n\lambda, \ \dots \ m\alpha_r = n\lambda,$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r$$

и теорема доказана.

ГЛАВА IX.

Симметрическія функціи.

Неизмѣняемость функціи при подстановкахъ перемѣнныхъ.

§ 1.

Основной задачей настоящей главы будетъ разсмотрѣніе свойствъ функцій отъ n буквъ

(1) $$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

не мѣняющихся при подстановкахъ этихъ буквъ.

Здѣсь надо точно различать два различныхъ случая:

1-ый случай, когда независимыя перемѣнныя (1) суть буквы, которымъ никакихъ опредѣленныхъ численныхъ значеній не сопоставляется,

2-ой случай, когда буквы (1), входящія въ составъ функціи, имѣютъ опредѣленныя численныя значенія.

Поэтому, когда мы говоримъ, что функція не мѣняется отъ подстановки буквъ, то подъ этимъ мы разумѣемъ одно изъ двухъ: или не мѣняется видъ функціи, или не мѣняется ея численное значеніе. Такъ, напримѣръ, если мы надъ функціей

$$x_1x_2 + x_3x_4$$

произведемъ подстановку

$$\begin{pmatrix} x_2, & x_1, & x_4, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix},$$

то видъ функціи не измѣнится, т. е. *новое* выраженіе будетъ тождественно равно предыдущему при всякихъ значеніяхъ буквъ. Если же возьмемъ функцію

(2) $$x_1 + x_2x_3$$

и произведемъ подстановку

$$\begin{pmatrix} x_2, & x_3, & x_1 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix},$$

то функція (2) приметъ видъ

(3) $$x_2 + x_3 x_1 .$$

Функція (3), очевидно, не равна тождественно функціи (2); но, если мы укажемъ нѣкоторое опредѣленное численное значеніе перемѣннымъ x_1, x_2, x_3, то эти значенія могутъ оказаться такими, что функціи (2) и (3) будутъ одинаковы по численной величинѣ, напримѣръ, можно принять $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

§ 2.

Разсмотрѣніе функцій, не мѣняющихся отъ подстановокъ, играетъ важную роль при рѣшеніи уравненій въ радикалахъ. Первый обратилъ на это вниманіе Lagrange. Онъ ограничивался разсмотрѣніемъ только функцій буквенныхъ и понималъ неизмѣнность функцій при подстановкахъ лишь въ смыслѣ неизмѣнности вида. Геніальный французскій математикъ Evariste Galois обобщилъ теорію Lagrange'a, причемъ разсматривалъ также функціи численныя, а именно тотъ случай, когда независимыя перемѣнныя числа и отъ подстановки независимыхъ перемѣнныхъ не мѣняется численная величина функцій. Получилась важная теорія, въ которой теорія Lagrange'a оказывается лишь частнымъ случаемъ и которая даетъ убѣдительныя доказательства теоремы Abel'a о томъ, что общее уравненіе выше 4-ой степени не рѣшается въ радикалахъ.

Функціи симметрическія.

§ 3.

Будемъ разсматривать функціи, не мѣняющіяся при всѣхъ N подстановкахъ буквъ. Такія функціи будемъ называть *симметрическими*. Такъ какъ цѣль нашего изслѣдованія есть рѣшеніе уравненій, то подъ независимыми перемѣнными симметрической функціи мы будемъ разумѣть корни нѣкотораго алгебраическаго уравненія степени n.

Итакъ, будемъ разсматривать алгебраическое уравненіе

(1) $$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 .$$

Обозначая корни этого уравненія черезъ

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n,$$

мы видимъ, что коэффиціенты

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$$

будутъ цѣлыми симметрическими функціями отъ этихъ корней.

Мы видѣли уже (см. стр. 21), что эти функціи выражаются слѣдующимъ образомъ

$$p_1 = \quad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = -\sum x_i,$$

$$p_2 = \quad x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots = \sum x_ix_j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_n = (-1)^n x_1x_2x_3 \ldots x_n.$$

Эти функціи называются *простѣйшими* симметрическими функціями.

Главною цѣлью дальнѣйшихъ разсужденій будетъ доказательство теоремы.

Теорема. *Черезъ указанныя простѣйшія симметрическія функціи $p_1, p_2, \ldots p_n$ выразится раціонально всякая раціональная симметрическая функція отъ корней уравненія.*

Формулы Newton'a.

§ 4.

Для доказательства теоремы покажемъ сначала, какъ выразить черезъ коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$ уравненія сумму одинаковыхъ степеней корней, т. е., другими словами, симметрическую функцію

(1) $$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

при различныхъ цѣлыхъ показателяхъ k.

Для вычисленія функціи s_k существуютъ формулы, данныя еще Newton'омъ (Arithmetica universalis).

Для вывода этихъ формулъ поступимъ такъ: полагая въ формулѣ Lagrange'a (см. стр. 61)

$$\Omega(x) = F'(x),$$

получимъ

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum \frac{1}{x - x_j},$$

гдѣ подъ функціей $F(x)$ мы будемъ разумѣть первую часть уравненія

$$F(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0.$$

Отсюда получимъ формулу

$$F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{F(x)}{x - x_n}$$

Такъ какъ x_i есть корень функціи $F(x)$, то эта функція дѣлится нацѣло на $x - x_i$; раздѣляя на самомъ дѣлѣ, получимъ

$$\begin{array}{l|l} x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n & x - x_i \\ \hline x^n - x_i x^{n-1} & x^{n-1} + \omega_1(x_i) x^{n-2} + \ldots + \omega_{n-1}(x_i) \\ (p_1 + x_i) x^{n-1} + p_2 x^{n-2} & \\ (p_1 + x_i) x^{n-1} - x_i(x_i + p_1) x^{n-2} & \\ \qquad (x_i^2 + x_i p_1 + p_2) x^{n-2} & \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

гдѣ

$$\omega_1(x_i) = x_i + p_1, \quad \omega_2(x_i) = x_i^2 + x_i p_1 + p_2, \ \ldots,$$

такъ что

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \{x^{n-1} + \omega_1(x_i) x^{n-2} + \omega_2(x_i) x^{n-3} + \ldots + \omega_{n-1}(x_i)\},$$

или

(1) $$F'(x) = n x^{n-1} + x^{n-2} \sum \omega_1(x_i) + x^{n-3} \sum \omega_2(x_i) + \ldots \sum \omega_{n-1}(x_i).$$

Такъ какъ съ другой стороны по правиламъ полученія производной цѣлой функціи имѣемъ

(2) $$F'(x) = n x^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + (n-2) p_2 x^{n-3} + \ldots + p_{n-1},$$

то, сравнивая коэффиціенты двухъ выраженій (1) и (2) функціи $F'(x)$, получимъ

$$\sum \omega_1(x_i) = (n-1) p_1,$$

$$\sum \omega_2(x_i) = (n-2) p_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum \omega_{n-1}(x_i) = p_{n-1},$$

но

$$\sum \omega_1(x_i) = s_1 + n p_1,$$

$$\sum \omega_2(x_i) = s_2 + p_1 s_1 + n p_2,$$

$$\sum \omega_3(x_i) = s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + n p_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum \omega_{n-1}(x_i) = s_{n-1} + p_1 s_{n-2} + \ldots + n p_{n-1},$$

слѣдовательно, сопоставляя эти формулы, получимъ

$$s_1 + p_1 = 0,$$

$$s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0,$$

(3) $$s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_{n-1} + p_1 s_{n-2} + p_2 s_{n-3} + \ldots + (n-1)p_{n-1} = 0,$$

и, наконецъ, замѣчая тождество $F(x_i) = 0$ и суммируя его по всѣмъ корнямъ, получимъ

$$\sum(x_i^n + p_1 x_i^{n-1} + p_2 x_i^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x_i + p_n) = 0,$$

т. е. другими словами

(4) $$s_n + p_1 s_{n-1} + p_2 s_{n-2} + \ldots + p_{n-1} s_1 + n p_n = 0.$$

Равенства (3) и (4) даютъ n линейныхъ уравненій для выраженія n неизвѣстныхъ $s_1, s_2, \ldots s_n$ черезъ коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Систему этихъ линейныхъ уравненій можно рѣшить относительно $s_1, s_2, \ldots s_n$, потому что опредѣлитель этой системы равняется единицѣ. Получаемъ выраженіе искомыхъ функцій s

$$s_1 = -p_1,$$

$$s_2 = +p_1^2 - 2p_2,$$

(5) $$s_3 = -p_1^3 + 3p_1 p_2 - 3p_3,$$

$$s_4 = +p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2 - 4p_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Очень важнымъ является то обстоятельство, что всѣ s выражаются цѣлыми функціями съ цѣлыми коэффиціентами отъ $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$.

Обратно, при помощи формулъ (3) можно выразить раціонально симметрическія функціи $p_1, p_2, \ldots p_n$ черезъ суммы s_k; однако коэффиціенты этихъ выраженій будутъ уже дробные. Итакъ, получимъ

$$p_1 = -s_1,$$

$$2p_2 = s_1^2 - s_2,$$

(6) $$6p_3 = s_1^3 + 3s_1 s_2 - 2s_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ 5.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, какъ вычислить функціи s_k, когда значекъ k принимаетъ цѣлыя положительныя значенія, не превосходящія значка n. Нетрудно убѣдиться, что малымъ измѣненіемъ способа можно вычислить функцію s_k, какъ для значеній $k > n$, такъ и для значеній k отрицательныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ тождество

$$x_i^{m-n} F(x_i) = 0,$$

гдѣ $m > n$, и просуммируемъ его по корнямъ, т. е. напишемъ тождество

$$\sum_1^n x_i^{m-n} F(x_i) = 0,$$

то получимъ

$$s_m + p_1 s_{m-1} + \ldots + p_{n-1} s_{m-n+1} + p_n s_{m-n} = 0.$$

Послѣдняя формула даетъ возможность вычислить s_m, когда извѣстно выраженіе n предыдущихъ функцій $s_{m-1}, \ldots s_{m-n}$; значитъ, можно начать вычисленіе съ функціи s_{n+1}, выразивъ ее черезъ извѣстныя уже $s_n, s_{n-1}, \ldots s_2, s_1$

§ 6.

Совершенно подобнымъ образомъ можно будетъ вычислить s_k съ отрицательными значками k. Въ самомъ дѣлѣ, тождество

$$\sum_1^n \frac{1}{x_i} F(x_i) = 0$$

даетъ

(1) $$s_{n-1} + p_1 s_{n-2} + \ldots + p_{n-1}\, n + p_n s_{-1} = 0.$$

Послѣднее равенство даетъ возможность выразить s_{-1} черезъ s_k съ положительными значками k. Когда извѣстна функція s_{-1}, мы получимъ функцію s_{-2}, разсмотрѣвъ тождество

$$\sum_1^n \frac{1}{x_i^2} F(x_i) = 0,$$

которое перепишемъ такъ

(2) $$s_{n-2} + p_1 s_{n-3} + \ldots + p_{n-2}\, n + p_{n-1} s_{-1} + p_n s_{-2} = 0.$$

Продолжая разсматривать тождество

$$\sum_1^n \frac{1}{x_i^k} F(x_i) = 0$$

съ возрастающими положительными значками k, будемъ получать послѣдовательно

$$s_{-3}\,,\ s_{-4}\,,\ \ldots$$

Замѣтимъ, что формулы (1) и (2), пользуясь формулами (3), § 4, можно переписать такъ

$$p_{n-1} + p_n s_{-1} = 0\,,\quad 2p_{n-2} + p_{n-1} s_{-1} + p_n s_{-2} = 0$$

Примѣняя формулы Newton'a къ двучленному уравненію

$$x^n - 1 = 0\,,$$

получимъ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0\,,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n = n\,.$$

Выраженіе симметрической функціи отъ корней черезъ коэффиціенты.

§ 7.

Формулы Newton'a для вычисленія функцій S_k даютъ возможность выразить черезъ коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$ уравненія всякую раціональную симметрическую функцію отъ корней. Такъ какъ раціональная функція отъ корней есть отношеніе двухъ цѣлыхъ функцій, то, слѣдовательно, покажемъ, какъ вычислить цѣлую симметрическую функцію отъ корней.

Самый общій видъ цѣлой функціи отъ корней будетъ, конечно,

(1) $$\sum A x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}\,,$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа или нули.

Возьмемъ одинъ изъ членовъ этой функціи

(2) $$A x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}\,.$$

Если функція симметрична въ томъ смыслѣ, что она не мѣняетъ вида отъ любой подстановки буквъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, то въ составѣ нашей

функціи долженъ находиться всякій членъ такого вида, который получается изъ члена (2) отъ какой-нибудь подстановки корней. Отсюда замѣчаемъ, что въ составъ симметрической функціи (1) должно входить выраженіе

$$A\sum x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n},$$

гдѣ подъ знакомъ $\sum$ показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ не мѣняются при переходѣ отъ одного члена къ другому, сумма же распространена на всевозможныя перемѣщенія корней. Итакъ, замѣчаемъ, что общій видъ цѣлой симметрической функціи отъ корней есть слѣдующій

$$A\sum x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}+B\sum x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n}+\ldots+M\sum x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2}\ldots x_n^{\rho_n}.$$

Значитъ, задача вычисленія цѣлой симметрической функціи самаго общаго вида приводится къ вычисленію функціи

$$\sum x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n},$$

въ которой рядъ показателей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ представляетъ опредѣленный рядъ чиселъ, каждое изъ которыхъ или цѣлое положительное, или нуль, а сумма распространена на всевозможныя перемѣщенія корней

§ 8.

Разсмотримъ функцію $\sum x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_m^{\lambda_m}$, гдѣ $m \leqq n$ и всѣ показатели различны между собою. Легко убѣдиться въ возможности выразить заданную функцію раціонально черезъ коэфиціенты p_i, если будемъ последовательно разсматривать случаи

$$m=1,\ m=2,\ \ldots$$

1-ый случай. $m=1$.

$$\sum_1^n x_i^{\lambda_1}=s_{\lambda_1},$$

и вычисленіе функціи намъ уже извѣстно.

2-ой случай. $m=2$

$$\sum x_i^{\lambda_1}x_k^{\lambda_2},$$

гдѣ сумма распространена на всевозможныя сочетанія $(i,\ k)$ n чиселъ $1, 2, 3, \ldots n$ по два. Нашу двойную сумму можно вычислить, производя суммированіе сначала по буквѣ k, потомъ по буквѣ i.

Если желаемъ суммировать по буквѣ k, надо число i считать опредѣленнымъ числомъ. Тогда для k возможны всѣ численныя значенія

$1, 2, 3, \ldots n$, исключая значеніе i, потому что мы не разсматриваемъ сочетаній корней съ повтореніями индексовъ; и у насъ выходитъ

$$\sum_{i,k} x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_2} = \sum_i x_i^{\lambda_1}\Big\{\sum_k x_k^{\lambda_2} - x_i^{\lambda_2}\Big\} = \sum_i x_i^{\lambda_1}.\sum_k x_k^{\lambda_2} - \sum_i x_i^{\lambda_1+\lambda_2} =$$

$$= \sum_k x_k^{\lambda_2}.\sum_i x_i^{\lambda_1} - \sum_i x_i^{\lambda_1+\lambda_2} = s_{\lambda_2} s_{\lambda_1} - s_{\lambda_1+\lambda_2},$$

а такъ какъ s_k мы умѣемъ вычислить, то и заданная двойная сумма получается, какъ функція отъ коэффиціентовъ.

3-ій, случай $m = 3$.

$$\sum_{i,k,l} x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_2} x_l^{\lambda_3}.$$

Такъ какъ перемѣщенія (i, k, l) индексовъ должны быть перемѣщеніями безъ повтореній элементовъ, то, если начнемъ суммированіе по значку l, то ему мы имѣемъ право дать всѣ значенія отъ 1 до n, кромѣ i и k, и мы получаемъ

$$\sum_{i,k,l} x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_2} x_l^{\lambda_3} = \sum_{i,k} x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_2}\Big\{\sum_l x_l^{\lambda_3} - x_i^{\lambda_3} - x_k^{\lambda_3}\Big\} =$$

$$= \sum_l x_l^{\lambda_3}.\sum_{i,k} x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_2} - \sum_{i,k} x_i^{\lambda_1+\lambda_3} x_k^{\lambda_2} - \sum_{i,k} x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_2+\lambda_3},$$

и тройную сумму привели къ вычисленію

$$\sum_l x_l^{\lambda_3} = s_{\lambda_3},$$

и къ вычисленію трехъ двойныхъ суммъ. На основаніи формулы предыдущаго случая получаемъ окончательно

$$\sum_{i,k,l} x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_2} x_l^{\lambda_3} = s_{\lambda_3}(s_{\lambda_1} s_{\lambda_2} - s_{\lambda_1+\lambda_2}) - (s_{\lambda_1+\lambda_3} s_{\lambda_2} - s_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}) -$$

(1)

$$- (s_{\lambda_1} s_{\lambda_2+\lambda_3} - s_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}) = s_{\lambda_1} s_{\lambda_2} s_{\lambda_3} - s_{\lambda_1} s_{\lambda_2+\lambda_3} - s_{\lambda_2} s_{\lambda_1+\lambda_3}$$

$$- s_{\lambda_3} s_{\lambda_1+\lambda_2} + 2 s_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}.$$

Наконецъ, не можетъ представить затрудненія разсмотрѣніе случаевъ $m = 4$, $m = 5$, и т. д.; разсужденія будутъ тѣ же. Сдѣлавъ суммированіе по одному изъ m значковъ съ пропускомъ, конечно, $m - 1$ элемента, мы приведемъ все вычисленіе суммъ m-го порядка къ вычисленію ряда суммъ меньшаго порядка.

Итакъ, можно считать доказаннымъ, что *всякая симметрическая раціональная функція отъ корней какъ цѣлая, такъ и дробная, выражается раціонально черезъ коэффиціенты уравненія.*

Необходимо сдѣлать весьма важное добавленіе относящееся къ случаю, когда среди показателей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ существуетъ k одинаковыхъ. Въ этомъ случаѣ надо результатъ, найденный по общимъ формуламъ раздѣлить на $1.2.3\ldots k$. Въ самомъ дѣлѣ, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$, то отъ перестановокъ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots x_k$ получается одинъ и тотъ же членъ. Изъ формулы (1) мы получаемъ при $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$\sum x_i^{\lambda_1} x_k^{\lambda_1} x_s^{\lambda_3} = \frac{1}{1.2}\{s^2_{\lambda_1} s_{\lambda_3} - 2 s_{\lambda_1} s_{\lambda_1+\lambda_3} - s_{\lambda_3} s_{2\lambda_1} + 2 s_{2\lambda_1+\lambda_3}\}$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$$\sum (x_i x_k x_t)^{\lambda_1} = \frac{1}{1.2.3}\{s^3_{\lambda_1} - 3 s_{\lambda_1} s_{2\lambda_1} + 2 s_{3\lambda_1}\}.$$

Метода Cauchy.

§ 9.

Укажемъ еще одинъ способъ вычисленія симметрическихъ функцій, предложенный Cauchy.

Разсмотримъ сперва случай двухъ корней α и β, т. е. случай квадратнаго уравненія

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) = 0.$$

Пусть будетъ задана цѣлая симметрическая функція

$$G(\alpha, \beta)$$

двухъ корней; замѣчая, что $a = -\alpha - \beta$, подставимъ въ $G(\alpha, \beta)$ вмѣсто β величину $-a - \alpha$

$$G(\alpha, -a - \alpha).$$

Расположимъ G по степенямъ α, получимъ

$$G(\alpha, -a - \alpha) = A_0\alpha^m + A_1\alpha^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\alpha + A_m,$$

гдѣ $A_0, A_1, \ldots A_m$ суть цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ a и отъ коэффиціентовъ заданной функціи G.

Обозначая черезъ $\varphi(x)$ функцію

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

раздѣлимъ ее на $f(x) = x^2 + ax + b$; тогда, обозначая частное черезъ $Q(x)$, а остатокъ черезъ $A + Bx$, получимъ

(1) $$\varphi(x) = f(x) \, . \, Q(x) + A + Bx,$$

гдѣ A и B суть цѣлыя раціональныя функціи отъ коэффиціентовъ a и b (это слѣдуетъ изъ того, что коэффиціентъ при высшемъ членѣ x^2 дѣлителя равенъ единицѣ) и коэффиціентовъ функціи G.

Подставляя въ тождество (1) вмѣсто x корень α функціи $f(x)$, получаемъ

(2) $$\varphi(\alpha) = G(\alpha, \beta) = A + B\alpha.$$

Мѣняя на основаніи симметричности функціи $G(\alpha, \beta)$ въ тождествѣ (2) порядокъ буквъ α и β, получаемъ

(3) $$G(\alpha, \beta) = A + B\beta.$$

Такъ какъ α и β независимыя перемѣнныя, то B должно равняться нулю, ибо въ противномъ случаѣ тождество

$$A + B\alpha = A + B\beta$$

устанавливало бы зависимость между α и β.

Итакъ, $B = 0$; тогда

$$G(\alpha, \beta) = A,$$

т. е. симметрическая функція G выражается раціонально черезъ коэффиціенты a и b, что мы и хотѣли показать.

Обратимся къ доказательству справедливости теоремы при какомъ угодно числѣ n корней

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

уравненія

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Будемъ, конечно, предполагать при этомъ, что всѣ корни различныя между собою независимыя перемѣнныя. Метода будетъ состоять въ томъ, что предполагая извѣстнымъ способъ вычисленія для $n-1$ перемѣнной, покажемъ какъ произвести вычисленіе для n перемѣнныхъ.

Возьмемъ симметрическую функцію

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

Разлагая ее по степенямъ одного изъ корней, напримѣръ, α_1, получаемъ

(4) $$G = G_0\alpha_1^{\mu} + G_1\alpha_1^{\mu-1} + \ldots + G_{\mu-1}\alpha_1 + G_{\mu},$$

гдѣ

$$G_0, \ G_1, \ \ldots G_{\mu-1}, \ G_\mu$$

суть, очевидно, цѣлыя симметрическія функціи отъ остальныхъ $n-1$ корней $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, т. е., другими словами, отъ корней уравненія

$$x^{n-1} + p_1'x^{n-2} + p_2'x^{n-3} + \ldots + p'_{n-2}x + p'_{n-1} = 0,$$

первая часть котораго происходитъ отъ дѣленія $f(x)$ на $x - \alpha_1$. На основаніи формулъ § 4 коэффиціенты $p_1', p_2', \ldots p'_{n-1}$ выражаются цѣлыми раціональными функціями отъ α_1 и коэффиціентовъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ заданнаго уравненія, а именно,

$$p_1' = \alpha_1 + p_1,$$

$$p_2' = \alpha_1^2 + p_1\alpha_1 + p_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_{n-1} = \alpha_1^{n-1} + p_1\alpha_1^{n-2} + \ldots + p_{n-2}\alpha_1 + p_{n-1}.$$

Итакъ, по предположенію справедливости теоремы для $n-1$ перемѣнныхъ, коэффиціенты $G_0, G_1, \ldots G_\mu$ выражаются раціонально черезъ $p_1', p_2', \ldots p'_{n-1}$, а, слѣдовательно, и раціонально черезъ $\alpha_1, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$

Вычисливъ эти выраженія, подставивъ въ (4) и собравъ окончательно коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ α_1, получимъ

$$G = A_0\alpha_1^m + A_1\alpha_1^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\alpha_1 + A_m,$$

гдѣ, вообще говоря, m не меньше n, а коэффиціенты

$$A_0, \ A_1, \ \ldots \ A_m$$

суть цѣлыя раціональныя функціи отъ $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$.

Разсмотримъ аналогично функцію

$$\psi(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m;$$

дѣля ее на

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n,$$

получимъ нѣкоторое частное $Q(x)$ и остатокъ не выше $n-1$ степени

$$C_0x^{n-1} + C_1x^{n-2} + \ldots + C_{n-2}x + C_{n-1},$$

гдѣ $C_0, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ суть цѣлыя функціи коэффиціентовъ $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Получаемъ тождество

(5) $$C_0x^{n-1} + C_1x^{n-2} + \ldots + C_{n-2}x + C_{n-1} - \psi(x) + Q(x) \cdot f(x) = 0.$$

Подставляя въ тождество (5) вмѣсто x корень α_1, получимъ

(6) $$C_0\alpha_1^{n-1}+C_1\alpha_1^{n-2}+\ldots+C_{n-2}\alpha_1+C_{n-1}-G=0,$$

ибо

$$f(\alpha_1)=0,\ \psi(\alpha_1)=G$$

Замѣняя въ тождествѣ (6) α_1 послѣдовательно черезъ $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ получимъ на основаніи симметричности функціи G рядъ новыхъ тождествъ

(7)
$$\begin{array}{l} C_0\alpha_2^{n-1}+C_1\alpha_2^{n-2}+\ldots+C_{n-2}\alpha_2+C_{n-1}-G=0, \\ C_0\alpha_3^{n-1}+C_1\alpha_3^{n-2}+\ldots+C_{n-2}\alpha_3+C_{n-1}-G=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0\alpha_n^{n-1}+C_1\alpha_n^{n-2}+\ldots+C_{n-2}\alpha_n+C_{n-1}-G=0 \end{array}$$

Тождества (6) и (7) можно разсматривать, какъ систему линейныхъ однородныхъ уравненій съ неизвѣстными

$$C_0,\ C_1, \ldots C_{n-2},\ C_{n-1}-G$$

и съ опредѣлителемъ

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{n-1}, & \alpha_1^{n-2}, & \ldots & \alpha_1, & 1 \\ \alpha_2^{n-1}, & \alpha_2^{n-2}, & \ldots & \alpha_2, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n^{n-1}, & \alpha_n^{n-2}, & \ldots & \alpha_n, & 1 \end{vmatrix}=D.$$

На основаніи § 45 главы IV имѣемъ.

(8)
$$\begin{array}{rl} D=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n-1})(\alpha_1-\alpha_n) \\ (\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_{n-1})(\alpha_2-\alpha_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})(\alpha_{n-2}-\alpha_n) \\ (\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{array}$$

Считая всѣ корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ произвольными различными между собою независимыми перемѣнными, заключаемъ, что D не равно нулю, и, слѣдовательно,

$$C_0=0,\ C_1=0,\ \ldots C_{n-2}=0,$$

$$C_{n-1}-G=0,$$

откуда

$$G=C_{n-1},$$

т. е. получаемъ выраженіе симметрической функціи черезъ коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Тотъ же результатъ можно получить короче, замѣчая, что функція

$$C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + C_{n-2} x + C_{n-1} - G$$

обращается въ нуль для n различныхъ значеній x, именно для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; слѣдовательно, (см. стр. 20) всѣ ея коэффиціенты должны тождественно равняться нулю, и, значитъ,

$$C_{n-1} - G = 0 .$$

Понятіе о результантѣ.

§ 10.

Какъ первый примѣръ симметрической функціи разсмотримъ функцію, носящую названіе результанта двухъ цѣлыхъ функцій.

Пусть заданы двѣ цѣлыя функціи

(1) $$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n ,$$

(2) $$\varphi(x) = x^m + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{m-2} + \ldots + q_{m-1} x + q_m .$$

Обозначимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ корни функціи $f(x)$, а черезъ $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ корни функціи $\varphi(x)$. Разсмотримъ два слѣдующихъ произведенія

(3) $$\varphi(\alpha_1) . \varphi(\alpha_2) . \varphi(\alpha_3) \ldots \varphi(\alpha_n) ,$$

(4) $$f(\beta_1) . f(\beta_2) . f(\beta_3) \ldots f(\beta_m)$$

Нетрудно убѣдиться, что два произведенія (3) и (4) могутъ отличаться другъ отъ друга только знакомъ, абсолютныя же величины у нихъ одинаковы. Въ самомъ дѣлѣ, замѣтивъ, что

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n) ,$$

$$\varphi(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \ldots (x - \beta_m) ,$$

мы можемъ написать произведеніе (3) въ такомъ видѣ

(5) $$\Pi(\alpha_i - \beta_j) ,$$

гдѣ произведеніе Π распространяется на всѣ значенія i изъ ряда $1, 2, 3, \ldots n$ и на всѣ значенія j изъ ряда $1, 2, 3, \ldots m$. Совершенно подобнымъ же образомъ получимъ для выраженія (4)

(6) $$\Pi(\beta_j - \alpha_i) .$$

Выраженіе (6) получается изъ выраженія (5) перемѣною знака каждаго множителя, входящаго въ произведеніе. Такъ какъ число всѣхъ множителей равно mn, произведенію степеней заданныхъ функцій, то, значитъ, можемъ написать слѣдующее равенство

$$\varphi(\alpha_1)\cdot\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n) = (-1)^{mn} f(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\ldots f(\beta_m)\,.$$

Если мы не будемъ обращать вниманія на знакъ выраженій (3) и (4), то можемъ сказать, что эти два выраженія представляютъ одну и ту же величину. Эта величина будетъ симметрической функціей, какъ отъ корней α функціи $f(x)$, такъ и отъ корней β функціи $\varphi(x)$. Въ этомъ убѣждаютъ насъ выраженія (3) и (4).

Эта симметрическая функція называется результантомъ двухъ заданныхъ цѣлыхъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ и выражается, какъ мы видимъ, раціонально черезъ коэффиціенты обѣихъ функцій.

Возьмемъ для примѣра случай двухъ квадратныхъ функцій

$$f(x) = x^2 + p_1 x + p_2\,,$$

$$\varphi(x) = x^2 + q_1 x + q_2\,.$$

Пусть α_1 и α_2 будутъ корни уравненія $f(x)=0$, тогда результантъ

$$R = (\alpha_1^2 + q_1\alpha_1 + q_2)(\alpha_2^2 + q_1\alpha_2 + q_2) =$$

$$= \alpha_1^2\alpha_2^2 + q_1(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_1) + q_1^2\alpha_1\alpha_2 + q_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + q_1q_2(\alpha_1 + \alpha_2) + q_2^2;$$

но

$$\alpha_1\alpha_2 = p_2\,,\quad \alpha_1 + \alpha_2 = -p_1\,,$$

слѣдовательно, получимъ

$$R = p_2^2 - p_2p_1q_1 + q_1^2p_2 + q_2(p_1^2 - 2p_2) - p_1q_1q_2 + q_2^2 =$$

$$= (q_2 - p_2)^2 - (q_1 - p_1)(p_1q_2 - p_2q_1)\,.$$

§ 11.

Теорема. *Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы двѣ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ имѣли общій корень, состоитъ въ томъ, чтобы равнялся нулю ихъ результантъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, необходимость теоремы слѣдуетъ изъ того соображенія, что, если функція $\varphi(x)$ имѣетъ нѣкоторый корень α_i, принадлежащій функціи $f(x)$, то будетъ тождественно $\varphi(\alpha_i)=0$, и, слѣдовательно, обратится въ нуль произведеніе

(1) $$\varphi(\alpha_1)\cdot\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_i)\ldots\varphi(\alpha_n)\,,$$

представляющее собою результантъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Достаточность же теоремы слѣдуетъ изъ того, что, если результантъ равенъ нулю, т. е., другими словами, равно нулю произведенiе (1), то долженъ равняться нулю по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей этого произведенiя; значитъ, равнымъ нулю оказывается, напримѣръ, множитель $\varphi(\alpha_i)$, т. е. α_i оказывается общимъ корнемъ двухъ функцiй $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Исключенiе перемѣнныхъ.

§ 12.

Предположимъ, что коэффицiенты заданныхъ уравненiй

(1) $$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0\,,$$

(2) $$x^m+q_1x^{m-1}+q_2x^{m-2}+\ldots+q_{m-1}x+q_m=0$$

суть цѣлыя функцiи отъ ряда новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ y, z, ...

Вычисливъ результантъ R первыхъ частей заданныхъ уравненiй, мы замѣчаемъ, что этотъ результантъ оказывается цѣлою функцiею отъ новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ y, z, ...

Если мы напишемъ равенство

(3) $$R=0\,,$$

то это равенство будетъ алгебраическимъ уравненiемъ относительно новыхъ перемѣнныхъ y, z, ... и будетъ давать такiя значенiя этимъ перемѣннымъ, при которыхъ уравненiя (1) и (2) совмѣстимы, т. е., другими словами, имѣютъ одинъ или нѣсколько общихъ корней относительно x.

По аналогiи съ тѣмъ, какъ въ Элементарной Алгебрѣ производится исключенiе буквы x изъ двухъ уравненiй способомъ сравненiя неизвѣстныхъ, говорятъ, что уравненiе (3) представляетъ изъ себя результатъ исключенiя буквы x изъ двухъ заданныхъ уравненiй.

Задача исключенiя x изъ двухъ уравненiй равносильна задачѣ вывода условiя, при которомъ два уравненiя (1) и (2) имѣютъ общiй корень. Въ этомъ случаѣ два полинома

$$f(x) \text{ и } \varphi(x)$$

имѣютъ общаго дѣлителя $x-\alpha$, гдѣ α общiй корень этихъ полиномовъ.

Будемъ производить для отысканiя общаго дѣлителя послѣдовательныя дѣленiя какъ это сказано въ § 19 главы VIII пока не дойдемъ до линейнаго дѣлителя $Ax+B$. Раздѣляя предыдущiй остатокъ на $Ax+B$, получимъ остатокъ R, независимый отъ x. Этотъ остатокъ будетъ ра-

ціональной функціей отъ перемѣнныхъ $y, z, \ldots$ Отсюда мы видимъ, что необходимымъ условіемъ существованія общаго корня двухъ функцій будетъ равенство

$$(4) \qquad R = 0 .$$

Если равенство (4) удовлетворяется, то общій корень двухъ полиномовъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ получается изъ уравненія

$$Ax + B = 0 .$$

Такъ какъ A и B выражаются раціонально черезъ перемѣнныя $y, z \ldots$ то можно сказать, что общій корень α есть раціональная функція отъ перемѣнныхъ $y, z, \ldots$

Теорема Bézout.

§ 13.

Докажемъ теорему Bézout, состоящую въ томъ, что *степень результанта двухъ цѣлыхъ функцій общаго вида*

$$(1) \qquad f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$$

$$(2) \qquad \varphi(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m$$

степени n и m равна произведенію этихъ степеней $m \cdot n$

Предположимъ, что коэффиціенты p и q заданныхъ функцій такимъ образомъ выражены черезъ новыя перемѣнныя $y, z, \ldots$, что первыя части уравненій (1) и (2) суть цѣлыя функціи самаго общаго вида степеней n и m. Значитъ, въ каждой изъ этихъ функцій должны находиться члены, буквенныя выраженія которыхъ $x^\lambda y^\mu z^\nu$. могутъ принимать всевозможныя комбинаціи неотрицательныхъ показателей, сумма которыхъ не превосходитъ степени функціи. Тогда, очевидно, что коэффиціенты p_i и q_k должны быть цѣлыми функціями общаго вида, степеней равныхъ значкамъ i и k.

Разсмотримъ теперь нѣкоторый членъ результанта R. Такъ какъ этотъ результантъ есть цѣлая функція отъ коэффиціентовъ обѣихъ функцій, то, значитъ, каждый его членъ долженъ имѣть видъ

$$(3) \qquad A p_0^{\lambda_0} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n} \cdot q_0^{\mu_0} \cdot q_1^{\mu_1} q_2^{\mu_2} \ldots q_m^{\mu_m} ,$$

гдѣ λ_i и μ_k суть цѣлыя неопредѣленныя числа, а коэффиціентъ A есть нѣкоторый численный коэффиціентъ

Такъ какъ степень p_i относительно корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ есть i, а степень q_j относительно корней $\beta_1, \beta_2, \ldots$ есть j, то членъ (3) будетъ функція отъ корней α и β степени

$$1 \, . \, \lambda_1 + 2 \, . \, \lambda_2 + \ldots + n\lambda_n + 1 \, \mu_1 + 2 \, . \, \mu_2 + \ldots + m\mu_m ,$$

но, съ другой стороны, результантъ

$$R = \Pi (\alpha_i - \beta_j)$$

есть однородная функція степени $m \, . \, n$ отъ корней α и β, слѣдовательно,

$$(4) \qquad 1 \, . \, \lambda_1 + 2 \, \lambda_2 + \ldots + n\lambda_n + 1 \, \mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + m\mu_m = m \, . \, n .$$

Но, съ другой стороны, степень члена (3) относительно перемѣнныхъ $y, z, \ldots$ есть

$$1 \, . \, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n + 1 \, . \, \mu_1 + 2 \, . \, \mu_2 + \ldots + m\mu_m ,$$

слѣдовательно, ввиду (4), степень результанта R относительно перемѣнныхъ $y, z, \ldots$ будетъ $m \, . \, n$, что и требовалось доказать.

Это разсужденіе показываетъ, собственно говоря, что степень результанта не выше mn; но можетъ быть эта степень будетъ ниже mn. Дѣйствительно, такое пониженіе степени результанта возможно, когда коэффиціенты при неизвѣстныхъ $y, z, \ldots$ въ функціяхъ p_i, q_k имѣютъ опредѣленныя численныя значенія, причемъ нѣкоторые могутъ равняться нулю.

Надо показать однако, что въ общемъ случаѣ буквенныхъ коэффиціентовъ такого пониженія не существуетъ. Проще всего показать по крайней мѣрѣ одинъ численный примѣръ, въ которомъ результантъ имѣетъ какъ разъ степень mn.

Для этой цѣли возьмемъ два уравненія:

$$f(x) = x^n - y^n = 0 , \quad \varphi(x) = x^m - y - 1 = 0$$

исключая x, получимъ

$$R = y^{nm} - y - 1 = 0$$

§ 14.

Пояснимъ геометрически нашу теорію. Разсмотримъ исключеніе координаты y изъ двухъ уравненій

$$f(x, y) = 0 , \quad \varphi(x, y) = 0$$

алгебраическихъ кривыхъ. Пусть f будетъ цѣлою функціею степени n общаго вида отъ x, y съ буквенными коэффиціентами, а φ —также общаго вида степени m.

Мы замѣчаемъ, что, приравнивая результантъ $R(x)$ нулю, получимъ уравненіе

(1) $$R(x)=0$$

степени mn, дающее абсциссы точекъ пересѣченія кривой $f=0$ съ кривою $\varphi=0$. Итакъ, въ общемъ случаѣ уравненіе (1) будетъ имѣть mn простыхъ корней и, слѣдовательно, линіи будутъ пересѣкаться въ mn точкахъ. На основаніи сказаннаго въ концѣ § 12 ордината точки пересѣченія будетъ опредѣляться изъ уравненія первой степени $Ay+B=0$, гдѣ A и B раціональныя функціи отъ корня уравненія (1).

При счетѣ точекъ надо принимать, конечно, во вниманіе также и мнимыя точки, т. е. точки съ мнимыми координатами.

Когда мы переходимъ отъ буквенныхъ коэффиціентовъ къ численнымъ, то возможны самые разнообразные особенности.

Прежде всего можетъ случиться, что нѣсколько точекъ пересѣченія будутъ имѣть одну и туже абсциссу; это будетъ, конечно, въ томъ случаѣ когда уравненіе (1) имѣетъ кратные корни. Разсмотримъ случай двукратнаго корня x_0 уравненія (1), тогда, если этому корню соотвѣтствуютъ двѣ различныя ординаты y, то уравненіе $Ay+B=0$ не должно давать опредѣленнаго значенія для y и мы получимъ $A=0$, $B=0$. Надо разсмотрѣть предыдущій остатокъ второй степени $A_1y^2+B_1y+C_1$, корни котораго и будутъ давать абсциссы двухъ точекъ встрѣчи разсматриваемыхъ кривыхъ.

Можетъ далѣе случиться, что двѣ или нѣсколько точекъ встрѣчи совпадаютъ, тогда получается касаніе линій.

Всѣ эти особенности не нарушаютъ степени mn уравненія (1). Дѣло идетъ только о кратныхъ корняхъ этого уравненія и о вычисленіи y, соотвѣтствующаго каждому корню x_0 уравненія (1)

Мы должны оставить въ сторонѣ случай, когда корню x_0 соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній y это будетъ въ томъ случаѣ, когда прямая $x-x_0=0$ входитъ въ составъ обѣихъ линій $f=0$ и $\varphi=0$, т. е. когда обѣ функціи f и φ дѣлятся на двучленъ $x-x_0$.

Конечно надо предполагать, что функціи f и φ взаимно простыя, ибо существованіе общаго дѣлителя ψ приводилось бы къ тому, что обѣ алгебраическія линіи имѣютъ общую часть $\psi=0$.

Пониженіе степени уравненія (1) на основаніи соображеній § 6 главы II можетъ происходитъ только въ томъ случаѣ, когда существуютъ у этого уравненія *безконечно большіе корни*. Геометрически говоря, это бу-

деть тотъ случай, когда обѣ алгебраическія кривыя имѣютъ общими безконечно далекія точки. Можно привести очень много простыхъ примѣровъ этого обстоятельства. Напримѣръ, двѣ гиперболы съ параллельными асимптотами пересѣкаются въ общихъ точкахъ съ безконечно далекой прямою, слѣдовательно, онѣ могутъ имѣть только двѣ общія точки на конечномъ разстояніи. Значитъ, въ случаѣ двухъ такихъ гиперболъ послѣ исключенія одной координаты получается уравненіе не 4-ой степени ($n=2$, $m=2$) а всего только 2-ой. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія 2-хъ гиперболъ съ параллельными асимптотами имѣютъ видъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 .$$

Вычитая второе уравненіе изъ перваго, получимъ

$$(D - D_1)x + (E - E_1)y + F - F_1 = 0 ;$$

для исключенія рѣшаемъ послѣднее относительно y

$$y = \frac{D_1 - D}{E - E_1}x + \frac{F_1 - F}{E - E_1}$$

и, подставляя послѣднее выраженіе въ уравненіи одной изъ гиперболъ, получаемъ квадратное уравненіе относительно x какъ результатъ исключенія y.

Какъ частный случай является задача нахожденія точекъ пересѣченія двухъ круговъ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
(2)
$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 .$$

Круги, какъ извѣстно, имѣютъ двѣ точки встрѣчи (вещественныя или мнимыя) на конечномъ разстояніи.

Чтобы прослѣдить механизмъ того, какимъ образомъ мы теряемъ изъ виду остальныя двѣ безконечно далекія точки, введемъ однородныя координаты.

Уравненія (2) перепишутся такъ

$$x^2 + y^2 + z(Dx + Ey + Fz) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z(D_1x + D_1y + F_1z) = 0 .$$

Вычитая, мы получаемъ

$$z[(D - D_1)x + (E - E_1)y + (F - F_1)z] = 0 .$$

Въ предыдущемъ анализѣ мы пропускали разсмотрѣніе случая $z = 0$, дающаго безконечно далекую прямую.

Всѣ круги пересѣкаются съ безконечно далекой прямой въ мнимыхъ точкахъ, опредѣляемыхъ двумя уравненіями

$$x^2 + y^2 = 0\,,\ z = 0\,.$$

Эти точки, каждая въ отдѣльности, опредѣляются уравненіями

$$(x + y\sqrt{-1} = 0\,,\ z = 0)\,,\ (x - y\sqrt{-1} = 0\,,\ z = 0)\,.$$

Это суть извѣстныя, такъ называемыя, *циклическія точки*, играющія большую роль въ вопросѣ отличія проективныхъ и метрическихъ свойствъ геометрическихъ фигуръ.

Вопросъ объ указаніи точной степени результанта въ томъ случаѣ, когда эта степень меньше mn былъ рѣшенъ профессоромъ Дерптскаго Университета Миндингомъ [1])

§ 15.

Теорема Bezout о степени результанта двухъ уравненій можетъ быть обобщена на случай какого угодно числа уравненій.

Разсмотримъ случай трехъ уравненій; однако наши соображенія будутъ относиться къ произвольному числу уравненій.

Итакъ, пусть будутъ заданы три уравненія

$$f(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,$$

$$\varphi(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,$$

$$\psi(x\,,\ y\,,\ z) = 0$$

степеней m, n, и p.

Исключая букву x изъ уравненій $f(x, y, z) = 0$ и $\varphi(x, y, z) = 0$, получимъ

(1) $$F(y\,,\ z) = 0\,;$$

исключая подобнымъ же образомъ букву x изъ уравненій $\varphi(x, y, z) = 0$ и $\psi(x, y, z) = 0$, получимъ

(2) $$\Phi(y\,,\ z) = 0\,.$$

Уравненіе (1) будетъ степени mn, а уравненіе (2) степени np. Совмѣстное существованіе уравненій (1) и (2) выражаетъ условіе существованія общаго корня относительно x у трехъ заданныхъ уравненій.

---

[1]) Minding. Journal de Math. pures et appliques. Ser I. T. VI.

Исключая y изъ двухъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе

(3) $$\Omega(z) = 0\,,$$

которое будетъ степени $mn \,.\, np = mn^2p$, и будетъ удовлетворяться всѣми значеніями z, при которыхъ три уравненія

(4) $$f = 0\,,\ \varphi = 0\,,\ \psi = 0$$

имѣютъ общую систему рѣшеній относительно x и y.

Если мы назовемъ результантомъ исключенія x и y изъ трехъ уравненій такую функцію

$$\Pi(z)\,,$$

которая обращается въ нуль только при тѣхъ значеніяхъ z, при которыхъ уравненія (4) имѣютъ общія рѣшенія относительно x и y, то оказывается, что функція $\Omega(z)$ не есть результантъ $\Pi(z)$, а заключаетъ этотъ результантъ, какъ множитель, т. е.

$$\Omega(z) = \Pi(z) \,.\, \omega(z)\,.$$

Самый способъ полученія функціи $\Omega(z)$ показываетъ, что эта функція не есть результантъ исключенія x и y. Въ самомъ дѣлѣ, исключая x сначала изъ уравненій

$$f(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,\ \psi(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,$$

а потомъ изъ уравненій

$$\varphi(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,\ \psi(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,$$

получимъ два уравненія степеней mp и np, откуда черезъ исключеніе y получимъ новое уравненіе

(5) $$\Omega_1(z) = 0\,,$$

гдѣ $\Omega_1(z)$ есть функція степени mnp^2. Наконецъ, исключая x сначала изъ системы

$$f(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,\ \psi(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,$$

а потомъ изъ системы

$$f(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,\ \varphi(x\,,\ y\,,\ z) = 0\,,$$

получимъ два уравненія степеней mp и mn, откуда черезъ исключеніе y получимъ уравненіе

$$\Omega_2(z) = 0$$

степени m^2np.

Очевидно, что функція наибольшей степени изъ функцій

$$\Omega(z)\,,\ \Omega_1(z)\,,\ \Omega_2(z)$$

заключаетъ навѣрно лишніе множители.

Оказывается, что *искомый результантъ* $\Pi(z)$ *есть общій множитель трехъ функцій*

$$\Omega(z)\,,\ \Omega_1(z)\,,\ \Omega_2(z)$$

и его степень есть произведеніе mnp степеней заданныхъ уравненій.

Докажемъ, что степень результанта есть mnp, показавъ, что таково число общихъ рѣшеній нашихъ трехъ уравненій относительно трехъ неизвѣстныхъ x, y, z.

Во избѣжаніе упоминаній объ исключительныхъ случаяхъ сдѣлаемъ наши уравненія однородными, вводя четвертую перемѣнную u, именно полагая

$$\frac{x}{u}\,,\ \frac{y}{u}\,,\ \frac{z}{u}$$

вмѣсто

$$x\,,\ y\,,\ z\,.$$

Итакъ, надо рѣшить относительно x, y, z уравненія

$$
\begin{aligned}
&f(x\,,\ y\,,\ z\,,\ u)=0\,,\\
(6)\qquad &\varphi(x\,,\ y\,,\ z\,,\ u)=0\,,\\
&\psi(x\,,\ y\,,\ z\,,\ u)=0\,.
\end{aligned}
$$

Разсмотримъ сначала случай, когда каждая изъ трехъ функцій f, φ, ψ есть произведеніе линейныхъ множителей. Мы получимъ всѣ возможныя рѣшенія этихъ трехъ уравненій, приравнивая нулю по одному линейному множителю изъ каждаго уравненія.

Число такихъ комбинацій трехъ уравненій первой степени будетъ равно

$$mnp\,,$$

если мы предполагаемъ всѣ линейные множители независимыми между собою.

Итакъ, въ этомъ случаѣ число рѣшеній нашей системы будетъ mnp, и всѣ рѣшенія будутъ различны между собою.

Предполагая теперь въ самомъ общемъ случаѣ коэффиціенты уравненій (6) независимыми между собою перемѣнными, мы замѣчаемъ, что результантъ, происходящій отъ исключенія x и y, не можетъ тождественно

равняться нулю, ибо въ подобномъ случаѣ система имѣла бы всегда безчисленное множество рѣшеній относительно x, y, z, что противорѣчитъ только что разобранному случаю разложенія на линейные множители, и, слѣдовательно, результантъ есть нѣкоторая однородная функція двухъ перемѣнныхъ, степень которой не можетъ мѣняться при какихъ-либо частныхъ предположеніяхъ относительно коэффиціентовъ (ибо всѣ члены одного и того же измѣренія).

Такъ какъ степень такого результанта равна mnp при предположеніи разложимости функціи на линейные множители, то, слѣдовательно, такая же степень должна быть и въ общемъ случаѣ; это и требовалось доказать.

То, что мы сказали относительно трехъ уравненій, прилагается и къ общему случаю n уравненій. Исключая изъ такихъ уравненій $n-1$ перемѣнныхъ, мы получаемъ уравненіе, степень котораго равна произведенію степеней этихъ уравненій.

Пріемы исключенія при помощи опредѣлителей.

§ 16.

Укажемъ простѣйшіе способы вычисленія результантовъ въ формѣ опредѣлителей; при этомъ будемъ помнить, что результантомъ двухъ функцій отъ x называется выраженіе, независящее отъ x, цѣлое и раціональное относительно коэффиціентовъ обѣихъ функцій, обращеніе котораго въ нуль представляетъ условіе необходимое и достаточное для того, чтобы функціи имѣли общій корень.

§ 17.

Способъ Euler'a. Пусть даны два уравненія

$$f(x) = 0\,,\ \varphi(x) = 0 \tag{1}$$

степеней n и m. Если оба эти уравненія имѣютъ общаго линейнаго множителя, то мы должны получить тождественные результаты, умножимъ-ли мы первое уравненіе на $m-1$ остальныхъ линейныхъ множителей второго, или же второе уравненіе на $n-1$ оставшихся линейныхъ множителей перваго. Слѣдовательно, если мы первое уравненіе изъ (1) умножимъ на функцію $\varphi_1(x)$ степени $m-1$, заключающую m произвольныхъ постоянныхъ, а второе уравненіе изъ (1) умножимъ на функцію $f_1(x)$ степени

$n-1$, заключающую n произвольныхъ постоянныхъ. и въ полученныхъ уравненіяхъ

$$f(x)\varphi_1(x)=0,$$

$$\varphi(x)f_1(x)=0$$

сравнимъ коэффиціенты, то для полученія результанта функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ достаточно будетъ написать условіе, при которомъ изъ полученныхъ отъ сравненія $m+n$ коэффиціентовъ уравненій можно опредѣлить вполнѣ $m+n$ введенныхъ постоянныхъ.

Итакъ, пусть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$f_1(x)=\alpha_0x^{n-1}+\alpha_1x^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1},$$

$$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m,$$

$$\varphi_1(x)=\beta_0x^{m-1}+\beta_1x^{m-2}+\ldots+\beta_{m-1},$$

тогда сравнивая коэффиціенты въ обѣихъ частяхъ тождества.

$$f(x)\varphi_1(x)=\varphi(x)f_1(x),$$

получимъ слѣдующія уравненія

$$\begin{array}{lll} a_0\beta_0 & -b_0\alpha_0 & =0, \\ a_1\beta_0+a_0\beta_1 & b_1\alpha_0-b_0\alpha_1 & =0, \\ a_2\beta_0+a_1\beta_1+a_0\beta_2 & -b_2\alpha_0-b_1\alpha_1-b_0\alpha_2 & =0, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

изъ которыхъ, какъ изъ системы $m+n$ однородныхъ уравненій относительно $m+n$ перемѣнныхъ

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots\alpha_{n-1},\ \beta_0,\ \beta_1,\ \ldots\beta_{m-1},$$

находимъ искомый результантъ въ формѣ опредѣлителя $m+n$ порядка

$$R=\left|\begin{array}{ccccccccc} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots & a_n & , & 0 & \ldots & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots & a_{n-1}, & a_n & , & 0, & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1}, & a_n \\ b_0, & b_1, & a_2, & \ldots & \ldots & b_m & , & 0, & \ldots 0 \\ 0, & b_0, & b_1, & \ldots & \ldots & b_{m-1}, & b_m, & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{m-1}, & b_m \end{array}\right|$$

если послѣ исключенія вертикали полученнаго опредѣлителя замѣнимъ горизонталями, а горизонтали вертикалями.

Примѣръ: найти результантъ уравненій

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$2x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0.$$

По выведенному правилу находимъ

$$R = \begin{vmatrix} 1, & 3, & -4, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 3, & -4, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 3, & -4 \\ 2, & 1, & 4, & -1, & 0 \\ 0 & 2, & -1, & 4, & -1 \end{vmatrix} = -644.$$

§ 18

Способъ Sylvester'а. Способъ Sylvester'а даетъ результантъ въ формѣ тождественной съ формою Euler'a, только приводитъ къ нему посредствомъ другихъ болѣе простыхъ соображеній.

Будемъ разсматривать тѣ же уравненія

$$f(x) = 0,\ \varphi(x) = 0$$

степеней n и m.

Будемъ умножать уравненіе $f(x) = 0$ послѣдовательно на

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots x,\ 1,$$

а уравненіе $\varphi(x) = 0$ на

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots x,\ 1,$$

тогда получимъ $m + n$ уравненій, въ которыхъ величины

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots x^2,\ x,$$

могутъ быть разсматриваемы, какъ независимыя перемѣнныя. Исключая эти величины, получимъ результантъ въ той же формѣ, что и въ предыдущемъ параграфѣ.

Примѣръ: найти результантъ уравненій

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a'x^4 + b'x^2 + c'x + d' = 0;$$

умножая первое уравненіе на x^2, x, 1, а второе на x, 1, получимъ систему пяти уравненій

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \qquad\qquad = 0,$$

$$ax^3 + bx^2 + cx \qquad = 0,$$

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x \qquad = 0,$$

$$a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

изъ которой, исключая x^4, x^3, x^2, x, 1, получимъ результантъ

$$R = \begin{vmatrix} a, & b, & c, & 0, & 0 \\ 0, & a, & b, & c, & 0 \\ 0, & 0, & a, & b, & c \\ a', & b', & c', & d', & 0 \\ 0, & a', & b', & c', & d' \end{vmatrix}.$$

§ 19.

Способъ Bézout. Этотъ способъ даетъ результантъ въ формѣ опредѣлителя болѣе удобной для вычисленія чѣмъ способы Euler'a и Sylvester'a.

Общая идея этого способа уяснится легче всего изъ разсмотрѣнія частнаго случая, напримѣръ, двухъ уравненій 4-ой степени

(1) $$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= 0, \\ a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' &= 0. \end{aligned}$$

Умножая первое изъ этихъ уравненій на a', второе на a и вычитая второе изъ перваго, получимъ уравненіе

(2) $$(ab')x^3 + (ac')x^2 + (ad')x + (ae') = 0,$$

гдѣ, для краткости, положено

$$(ab') = ab' - a'b, \quad (ac') = ac' - ca', \ \ldots;$$

умножая снова первое изъ уравненій (1) на $a'x + b'$, второе на $ax + b$ и вычитая, получимъ

(3) $$(ac')x^3 + \{(ad') + (bc')\}x^2 + \{(ae') + (bd')\}x + (be') = 0;$$

умножая теперь первое изъ уравненій (1) на $a'x^2+b'x+c'$, второе на ax^2+bx+c и вычитая, получимъ

$$(4)\qquad (ad')x^3+\{(ae')+(bd')\}x^2+\{(be')+(cd')\}x+(ce')=0;$$

наконецъ, умножая первое изъ уравненій (1) на $a'x^3+b'x^2+c'x+d'$, второе на ax^3+bx^2+cx+d и вычитая, получимъ

$$(5)\qquad (ae')x^3+(be')x^2+(ce')x+(de')=0.$$

Изъ составленныхъ такимъ образомъ четырехъ уравненій (2), (3), (4) и (5) можемъ исключить буквы x^3, x^2, x, 1 и получимъ опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} (ab'), & (ac'), & (ad'), & (ae') \\ (ac'), & (ad')+(bc'), & (ae')+(bd'), & (be') \\ (ad'), & (ae')+(bd'), & (be')+(cd'), & (ce') \\ (ae'), & (be'), & (ce'), & (de') \end{vmatrix}.$$

Примѣненіе этого способа къ общему случаю двухъ уравненій n-ой степени настолько очевидно, что нѣтъ надобности приводить общаго доказательства. Изъ разсмотрѣнія найденнаго опредѣлителя легко замѣтить общій законъ составленія результанта въ случаѣ двухъ уравненій n-ой степени.

Вычисленіе дискриминанта.

§ 20.

Какъ весьма важный примѣръ вычисленія симметрическихъ функцій, разсмотримъ симметрическую функцію, носящую названіе *дискриминанта*. Разсмотримъ функцію P^2, гдѣ

$$\begin{aligned} P=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)&\ldots(x_1-x_n).\\ (x_2-x_3)(x_2-x_4)&\ldots(x_2-x_n).\\ (x_3-x_4)&\ldots(x_3-x_n).\\ &\ldots\ldots\\ &(x_{n-1}-x_n), \end{aligned}$$

въ числѣ $x_1, x_2, \ldots x_n$ есть корни уравненія $f(x)=0$.

Функція P^2, очевидно, остается неизмѣнной при всякой подстановкѣ корней. Эта функція называется *дискриминантомъ уравненія* $f(x)=0$.

Для вычисленія дискриминанта замѣтимъ прежде всего, что функцію P можно представить (см стр. 121) въ видѣ слѣдующаго опредѣлителя:

$$P = \begin{vmatrix} x_1^{n-1}, & x_1^{n-2}, & \ldots & x_1, & 1 \\ x_2^{n-1}, & x_2^{n-2}, & \ldots & x_2, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1}, & x_n^{n-2}, & \ldots & x_n, & 1 \end{vmatrix}.$$

или, измѣняя порядокъ слѣдованія колоннъ на обратный, получаемъ

$$P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1, & x_1, & \ldots & x_1^{n-2}, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & \ldots & x_2^{n-2}, & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & x_n, & \ldots & x_n^{n-2}, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Возвысимъ послѣдній опредѣлитель въ квадратъ, производя умноженіе элементовъ по колоннамъ; получимъ

$$P^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots & s_n \\ s_2, & s_3, & s_4, & \ldots & s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Итакъ, мы получаемъ выраженіе дискриминанта черезъ функціи s. Формулы Newton'а (см. § 4) даютъ возможность выразить дискриминантъ черезъ коэффиціенты уравненія.

Прилагая полученное нами выраженіе для дискриминанта къ квадратному уравненію

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0,$$

получимъ

$$P^2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix},$$

откуда

$$P^2 = s_0 s_2 - s_1^2 = 2(p_1^2 - 2p_2) - p_1^2 = p_1^2 - 4p_2,$$

т. е. то выраженіе, которое стоитъ подъ корнемъ квадратнымъ въ общей формулѣ рѣшенія квадратнаго уравненія.

Для кубическаго уравненія

$$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$$

по формуламъ стр. 78 получаемъ

$$s_0 = 3\,,\; s_1 = -p_1\,,\; s_2 = p_1^2 - 2p_2\,,\; s_3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3\,,$$

$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3 + 2p_2^2 - 4p_4\,,$$

откуда

$$P^2 = \begin{vmatrix} s_0\,, & s_1\,, & s_2 \\ s_1\,, & s_2\,, & s_3 \\ s_2\,, & s_3\,, & s_4 \end{vmatrix} =$$

$$= s_0s_2s_4 - s_0s_3^2 - s_1^2s_4 - s_2^3 + 2s_1s_2s_3 =$$

$$= p_1^2p_2^2 + 18p_1p_2p_3 - 4p_2^3 - 4p_1^3p_3 - 27p_3^2.$$

Въ случаѣ $p_1 = 0$, т. е. когда дано уравненіе

$$x^3 + p_2x + p_3 = 0\,,$$

получаемъ

$$P^2 = -4p_2^3 - 27p_3^2 = -2^2.\,3^3\left\{\frac{p_3^2}{4} + \frac{p_2^3}{27}\right\},$$

т. е. та величина, которая стоитъ подъ квадратнымъ корнемъ въ формулѣ Cardan'а.

Дискриминантъ, какъ результантъ.

§ 21.

Представляя лѣвую часть даннаго уравненія $f(x) = 0$ въ видѣ

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

и взявъ отъ обѣихъ частей логариѳмическую производную, получимъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}\,,$$

или

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x - x_n}\,.$$

Подставляя въ это выраженіе для $f'(x)$ вмѣсто x послѣдовательно $x_1, x_2, \ldots x_n$, получимъ

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)\,, \\ f'(x_2) &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)\,, \qquad (1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'(x_n) &= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, можно дать другой видъ дискриминанту P^2. Въ самомъ дѣлѣ, перемножая формулы (1) и замѣчая, что въ полученномъ такимъ образомъ произведеніи каждый членъ $x_k - x_i$ входитъ два раза съ разнымъ знакомъ, получаемъ

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2,$$
$$(x_2 - x_3)^2 \ldots (x_2 - x_n)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_{n-1} - x_n)^2,$$

или короче

(2) $$P^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(x_1)f'(x_2)\ldots f'(x_n).$$

Изъ этой формулы мы видимъ, что дискриминантъ P^2 уравненія $f(x)=0$ надо разсматривать, какъ *результантъ производной функціи $f'(x)$ и первоначальной функціи $f(x)$, умноженный при этомъ на множителя $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, гдѣ n есть степень уравненія $f(x)=0$.*

Изъ выраженія (2) для дискриминанта ясно видно, что *обращеніе въ нуль дискриминанта является условіемъ необходимымъ и достаточнымъ для существованія кратныхъ корней уравненія.*

Понятіе о неприводимости.

§ 22.

Говорятъ, что цѣлая функція $f(x)$ обладаетъ свойствомъ неприводимости въ области раціональныхъ чиселъ, если она не разлагается на множителей съ раціональными коэффиціентами.

Такъ, напримѣръ, функція

$$f(x) = x^4 + 1$$

не разлагается въ области раціональныхъ чиселъ на множителей, но эта функція будетъ разлагаться на множителей, если къ раціональнымъ числамъ присоединимъ ирраціональное число $\sqrt{2}$. Въ самомъ дѣлѣ,

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 =$$
$$= (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

Очевидно, что, если къ области раціональныхъ чиселъ мы присоединимъ всѣ ирраціональныя, а также всѣ мнимыя числа, то въ такой новой области всѣхъ чиселъ не существуетъ неприводимыхъ функцій выше первой степени, потому что всякая функція степени n разлагается на n линейныхъ множителей.

§ 23.

Приведемъ нѣсколько основныхъ положеній относительно неприводимыхъ функцій. Такъ какъ мы будемъ ограничиваться только областью раціональныхъ чиселъ, то функцію будемъ называть просто неприводимою.

Пусть задана неприводимая функція $f(x)$. Разсмотримъ другую цѣлую функцію $F(x)$ съ раціональными коэффиціентами и будемъ искать общаго наибольшаго дѣлителя этихъ двухъ функцій. Пусть этотъ общій наибольшій дѣлитель будетъ $\varphi(x)$.

Такъ какъ нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ функцій совершается посредствомъ раціональныхъ операцій, то, если коэффиціенты двухъ заданныхъ функцій были раціональны, то будутъ раціональны и коэффиціенты функціи $\varphi(x)$; отсюда мы видимъ, что функція $\varphi(x)$ должна быть или постояннымъ числомъ, или же равняться $f(x)$, такъ какъ по опредѣленію неприводимости функція $f(x)$ не можетъ имѣть никакого дѣлителя $\varphi(x)$ съ раціональными коэффиціентами меньшей степени. Такимъ образомъ мы видимъ, что функція $F(x)$ или взаимно простая съ $f(x)$, или дѣлится на $f(x)$; отсюда получается теорема.

Теорема. *Если функція $F(x)$ съ раціональными коэффиціентами обращается въ нуль при какомъ-либо корнѣ неприводимаго уравненія $f(x)=0$, то она должна обращаться въ нуль при всѣхъ корняхъ этого уравненія.*

Слѣдствіе I. Если неприводимое уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ общій корень съ уравненіемъ $\varphi(x)=0$ низшей степени, то всѣ коэффиціенты функціи $\varphi(x)$ должны равняться нулю; и, слѣдовательно, уравненіе $\varphi(x)=0$ должно обращаться въ тождество.

Въ самомъ дѣлѣ, $\varphi(x)$ не можетъ быть взаимно простымъ съ $f(x)$ и не можетъ дѣлиться на $f(x)$, потому что степень $\varphi(x)$ меньше.

Слѣдствіе II. Всѣ корни неприводимаго уравненія простые.

Въ самомъ дѣлѣ, обратное допущеніе приводитъ къ противорѣчію, потому что, если допустить, что неприводимая функція $f(x)$ имѣетъ кратный корень, то производная $f'(x)$ степени ниже, чѣмъ функція $f(x)$, имѣетъ съ нею по крайней мѣрѣ одинъ общій корень и не обращается тождественно въ нуль.

Простѣйшій видъ раціональной функціи отъ корня неприводимаго уравненія

§ 24.

Какъ новое приложеніе теоріи симметрическихъ функцій, разсмотримъ приведеніе раціональной функціи отъ корня неприводимаго уравненія

(1) $$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

къ простѣйшему виду.

Итакъ, разсмотримъ раціональную функцію

(2) $$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

гдѣ x есть корень уравненія (1).

Цѣлыя функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно предполагать степеней не выше $n-1$, ибо всѣ высшія степени можно исключить, пользуясь уравненіемъ (1). Въ самомъ дѣлѣ, если бы степень функціи $\varphi(x)$ была выше $n-1$, то, дѣля $\varphi(x)$ на $f(x)$ и обозначая черезъ $\omega(x)$ частное, а черезъ $\varphi_1(x)$ остатокъ, получимъ

$$\varphi(x) = f(x)\omega(x) + \varphi_1(x);$$

но такъ какъ x есть корень функціи $f(x)$, то получимъ

$$\varphi(x) = \varphi_1(x),$$

и, слѣдовательно, при вычисленіи раціональной функціи (2) отъ корня уравненія (1) можно замѣнить функцію $\varphi(x)$ степени выше $n-1$ функціею $\varphi_1(x)$ степени не выше $n-1$. Подобнымъ образомъ, если функція $\psi(x)$ степени выше $n-1$, то ее можно замѣнить остаткомъ $\psi_1(x)$ отъ дѣленія $\psi(x)$ на $f(x)$.

Итакъ, будемъ предполагать, что степени функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не выше $n-1$. Кромѣ того будемъ предполагать, что функція (2) не обращается въ ∞ ни при одномъ изъ корней уравненія (1). Обозначимъ корни заданнаго уравненія черезъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots \mu$$

Умножимъ числителя и знаменателя дроби

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$$

на выраженіе

$$\psi(\beta)\psi(\gamma)\ldots\psi(\mu),$$

тогда получимъ дробь

$$\frac{\varphi(\alpha)\psi(\beta)\psi(\gamma)\ldots\psi(\mu)}{\psi(\alpha)\psi(\beta)\psi(\gamma)\ldots\psi(\mu)},$$

знаменатель которой есть результантъ двухъ функцій $f(x)$ и $\psi(x)$.

Обозначимъ его черезъ R. Произведеніе

(3) $$\psi(\beta)\psi(\gamma)\ldots\psi(\mu)$$

есть симметрическая функція корней уравненія

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=0,$$

или (см. стр. 76)

$$x^{n-1}+\omega_1(\alpha)x^{n-2}+\omega_2(\alpha)x^{n-3}+\ldots+\omega_{n-1}(\alpha)=0,$$

гдѣ

$$\omega_1(\alpha)=\alpha+p_1,$$

$$\omega_2(\alpha)=\alpha^2+p_1\alpha+p_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega_{n-1}(\alpha)=\alpha^{n-1}+p_1\alpha^{n-2}+\ldots+p_{n-1},$$

слѣдовательно, это произведеніе (3) выражается въ видѣ цѣлой раціональной функціи отъ коэффиціентовъ

$$\omega_1(\alpha),\ \omega_2(\alpha),\ \ldots\ \omega_{n-1}(\alpha),$$

т. е. въ видѣ цѣлой функціи отъ α. Обозначимъ эту функцію черезъ $\Omega(\alpha)$.

Итакъ, раціональная функція (2) отъ корня α уравненія (1) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{1}{R}\varphi(\alpha)\Omega(\alpha),$$

т. е. въ видѣ цѣлой функціи

$$\Pi(\alpha),$$

которую можно предположить, согласно предыдущему, не выше $n-1$ степени. Выскажемъ теорему.

Теорема. *Самый общій видъ раціональной функціи отъ корня α неприводимаго уравненія $f(x)=0$ степени n, не обращающейся въ безконечность ни при одномъ изъ корней, есть*

$$C_0\alpha^{n-1}+C_1\alpha^{n-2}+\ldots+C_{n-2}\alpha+C_{n-1},$$

гдѣ C суть раціональныя числа.

Пояснимъ теорію примѣромъ. Пусть надо привести къ простѣйшему виду раціональную функцію

$$\frac{3x^2+3x-1}{x^3-4x+2}$$

отъ корня уравненія

(4) $$x^2-x+1=0.$$

Выполняемъ дѣленія

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+3x-1 & x^2-x+1 \\ 3x^2-3x+3 & 3 \\ \hline 6x-4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x+2 & x^2-x+1 \\ x^3-x^2+x & x+1 \\ \hline x^2-5x+2 & \\ x^2-x+1 & \\ \hline -4x+1 & \end{array}$$

Обозначая корни заданнаго уравненія (4) черезъ α и β, придется преобразовать выраженіе

$$\frac{6\alpha-4}{-4\alpha+1}.$$

Поступая по правилу, получаемъ

(5) $$\frac{(6\alpha-4)(1-4\beta)}{(1-4\alpha)(1-4\beta)}=\frac{(6\alpha-4)(1-4\beta)}{1-4(\alpha+\beta)+16\alpha\beta};$$

но

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=1,$$

слѣдовательно, правая часть тождества (5) преобразуется въ

$$\frac{(6\alpha-4)\{1-4(1-\alpha)\}}{1-4+16}=\frac{1}{13}(6\alpha-4)(4\alpha-3)=\frac{1}{13}(24\alpha^2-34\alpha+12).$$

Производя, наконецъ, дѣленіе

$$\begin{array}{r|l} 24\alpha^2-34\alpha+12 & \alpha^2-\alpha+1 \\ 24\alpha^2-24\alpha+24 & 24 \\ \hline -10\alpha-12 & \end{array}$$

получимъ искомое простѣйшее выраженіе

$$-\frac{10}{13}\alpha-\frac{12}{13}.$$

Общія формулы, выражающія зависимость между s_i и p_i.

§ 25.

Формулы Newton'а позволяютъ вычислять s_i когда извѣстны коэффиціенты p_i и обратно. Дѣло сводится къ рѣшенію уравненій первой степени. Можно однако получить сразу явныя выраженія этихъ количествъ.

Пусть будетъ

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Раздѣляя обѣ части этого тождества на x^n и логариѳмируя, получимъ

$$lg\left(1 + \frac{p_1}{x} + \frac{p^2}{x^2} + \ldots + \frac{p_n}{x_n}\right) = lg\left(1 - \frac{x_1}{x}\right) + lg\left(1 - \frac{x_2}{x}\right) + \ldots + lg\left(1 - \frac{x_n}{x}\right);$$

обозначая для краткости

$$\alpha = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_n}{x_n{}^n}$$

и раскладывая логариѳмы въ рядъ, получимъ

$$\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} - - \left\{\frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{2x^2} + \ldots + \frac{s_k}{kx^k} + \ldots\right\}.$$

Для полученія s_k придется приравнять коэффиціенту $\frac{s_k}{k}$ при x^{-k} въ правой части коэффиціентъ при той же степени въ лѣвой части. Общій членъ лѣвой части есть

(1) $$\frac{(-1)^{i+1}}{i}\left(\frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_n}{x^n}\right)^i.$$

По формулѣ §§ 6, 7 главы I выраженіе (1) будетъ имѣть видъ

$$\frac{(-1)^{i-1}}{i} \sum \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)!}{\beta_1!\, \beta_2! \ldots \beta_n!} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n} x^{-(\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + n\beta_n)}.$$

гдѣ

(2) $$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = i.$$

Намъ необходимо обратить вниманіе только на тѣ его члены, въ которыхъ

(3) $$\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + \ldots + n\beta_n = k.$$

Мы получаемъ, слѣдовательно такую общую формулу

$$s_k = \sum (-1)^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n} \frac{(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n-1)!}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!}\, k p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n},$$

гдѣ сумма распространяется на такія цѣлыя положительныя и равныя нулю значенія β_i, которыя удовлетворяютъ равенству (2)

Для обратнаго выраженія p_i черезъ s_i будемъ разсуждать такъ

$$1+\frac{p_1}{x}+\ldots+\frac{p_n}{x_n}=e^{-\left(\frac{s_1}{x}+\frac{s_2}{2x^2}+\ldots\right)}=1-\frac{\gamma}{1}+\frac{\gamma^2}{1\,.\,2}\ \ldots,$$

откуда находимъ

$$p_k=\sum\frac{(-1)^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n}}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\beta_1}\cdot\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\beta_2}\cdot\cdot\left(\frac{s_n}{n}\right)^{\beta_n}$$

при томъ же условіи (2).

О вычисленіи симметрическихъ функцій.

§ 26

Выраженіе симметрическихъ функцій въ явномъ видѣ черезъ коэффиціенты p_i является настолько важной задачей алгебры, что изученіе пріемовъ такого выраженія интересовало большинство выдающихся математиковъ, занимавшихся алгеброй. Особенно важны на практикѣ пріемы вычисленія, которые даютъ сразу выраженіе черезъ коэффиціенты p_i, не переходя черезъ s_i.

Одна изъ хорошихъ методъ была дана еще Waring'омъ [1]).

Она состоитъ въ общихъ чертахъ въ слѣдующемъ.

Обозначимъ корни уравненія черезъ $a, b, c, \ldots k, l$.

Беремъ однородную систематическую функцію V этихъ корней. Пусть α есть наибольшій изъ показателей, стоящихъ надъ корнями въ отдѣльныхъ членахъ функціи V. Очевидно, что въ функціи V будетъ существовать одинъ или нѣсколько членовъ, заключающихъ a^α.

Изъ всѣхъ этихъ членовъ выберемъ такіе, гдѣ входитъ корень b въ наибольшей степени β. Продолжая процессъ выбора далѣе по порядку слѣдованія корней $c, \ldots k, l$ придемъ къ опредѣленному члену функціи V, который будемъ называть *старшимъ*; такъ что будетъ

$$V=Aa^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\varkappa l^\lambda+\ldots,$$

[1]) Waring. Meditationes algebraicae. Editio tertia p 13.

причемъ

$$\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \ldots \geqslant \varkappa \geqslant \lambda .$$

Не трудно видѣть по формуламъ

$$(-1)p_1 = \Sigma a\,, \; (-1)^2 p_2 = \Sigma ab\,, \; (-1)^3 p_3 = \Sigma abc\,, \ldots$$

что функція

$$P_1 = A(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda} p_1^{\alpha-\beta} p_2^{\beta-\gamma} \ldots p_{n-1}^{\varkappa-\lambda} p_n^{\lambda}$$

будетъ имѣть тотъ же старшій членъ; слѣдовательно, разность

$$V_1 = V - P_1$$

будетъ имѣть старшій членъ, въ которомъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ показателей α, β, γ, $\ldots \lambda$ меньше, чѣмъ для функціи V. Продолжая съ функціей V_1 то, что мы дѣлали съ функціей V, придемъ къ новой функціи $V_2 = V_1 - P_2$ и т. д. получимъ

$$V = P_1 + P_2 + \ldots$$

Послѣ конечнаго ряда операцій функція будетъ исчерпана, ибо показатели уменьшаются.

Если считать неизбѣжными трудности, происходящія отъ высокихъ степеней какъ основного уравненія, такъ и самой симметрической функціи V, то способъ Waring'а приходится считать хорошимъ для практики, особенно послѣ улучшеній послѣдующихъ ученыхъ [1])

§ 27.

Имѣетъ для практики нѣкоторое значеніе метода Cauchy, изложенная нами выше. Покажемъ ея приложеніе на одномъ примѣрѣ

Требуется вычислить дискриминантъ уравненія 3-ей степени

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 .$$

Этотъ дискриминантъ есть

$$V = V_1(a-b)^2(a-c)^2 ,$$

гдѣ V_1 есть дискриминантъ $(b-c)^2$ квадратнаго уравненія

$$x^2 + (p+a)x + a^2 + pa + q = 0 ,$$

[1]) Peterson. Théorie des équations algébriques, Paris 1897. p. 34.

какъ извѣстно,

$$V_1 = (p+a)^2 - 4(a^2+pa+q) = -3a^2 - 2pa + (p^2-4q)$$

$$(a-b)(a-c) = f'(a) = 3a^2 + 2pa + q$$

и, слѣдовательно,

$$V = (-3a^2 - 2pa + p^2 - 4q)(3a^2 + 2pa + q)^2 =$$

$$= -27a^6 - 54pa^5 - \left.\begin{matrix}27p^2\\ -54q\end{matrix}\right| a^4 + \left.\begin{matrix}4p^3\\ -72pq\end{matrix}\right| a^3 + \left.\begin{matrix}4p^4\\ -18p^2q\\ -27q^2\end{matrix}\right| a^2 + \left.\begin{matrix}4p^3q\\ -18pq^2\end{matrix}\right| a + \begin{matrix}p^2q^2\\ -4q^3\end{matrix}.$$

Раздѣляя это выраженіе V на a^3+pa^2+qa+r, получимъ частное

$$27a^3 - 27pa^2 - 27qa + 4p^3 + 27r - 18pq$$

и остатокъ

$$-4q^3 - 27r^2 + 18pqr + p^2q^2 - 4p^3r;$$

послѣднее выраженіе и есть искомое выраженіе для V.

Въ курсѣ Serret „Cours d'algèbre supérieure" 1910 г. цѣлая глава посвящена общимъ соображеніямъ о вычисленіи симметрическихъ функцій, гдѣ авторъ излагаетъ приложеніе извѣстнаго ряда Lagrange'а, а также нѣкоторыя собственныя мысли, относящіяся къ этому предмету.

§ 28

Я считаю необходимымъ добавить еще нѣсколько замѣчаній, помогающихъ составить для всякой однородной симметрической функціи корней ея буквенное выраженіе черезъ p_i съ неопредѣленными коэффиціентами, подлежащими дальнѣйшему опредѣленію.

Теорема. *Если считать вѣсомъ p_i число i, то однородная цѣлая симметрическая функція степени m отъ корней x_i должна быть послѣ выраженія черезъ p_i изобарическою вѣса m.*

Будемъ предполагать корни x_i независимыми перемѣнными, тогда и коэффиціенты p_i будутъ также независимыми перемѣнными, ибо всякое соотношеніе между p_i выраженное черезъ корни x_i давало бы зависимость между корнями.

Пусть имѣемъ

$$f(x_1, \ldots x_n) = \varphi(p_1 p_2 \ldots p_n).$$

Разобьемъ функцію φ на изобарическія части и возьмемъ одну изъ этихъ частей φ_0 обозначая ея вѣсъ черезъ μ.

Эта часть φ_0, не будучи тождественно равной нулю, не можетъ давать тождественно равное нулю выраженіе, если мы всѣ p_i выразимъ черезъ корни. Въ самомъ дѣлѣ, φ_0, выраженная въ корняхъ, не будетъ равна нулю, если мы возьмемъ корни уравненія съ такими коэффиціентами, при которыхъ φ_0 не равно нулю. Итакъ, всякая изобарическая часть φ_0 вѣса μ будетъ давать однородную функцію отъ корней степени μ. Такъ какъ члены однородныхъ функцій разныхъ степеней сокращаться не могутъ, слѣдовательно, если заданная однородная симметрическая функція f имѣетъ степень m, то она должна быть въ p_i изобарическою вѣса $\mu=m$.

Теорема. *Цѣлая симметрическая функція отъ корней x_i имѣетъ такую степень въ коэффиціентахъ p_i, какой степени она относительно любого изъ корней.*

Будемъ разсматривать функцію

$$f(x_1, \ldots x_n)=\varphi(p_1, p_2, \ldots p_n)$$

относительно какого нибудь опредѣленнаго изъ корней x_1. Пусть относительно этого корня функція f имѣетъ степень m. Обозначимъ черезъ μ степень φ относительно $p_1, p_2, \ldots p_n$. Надо доказать равенство

$$m=\mu.$$

Неравенство $m\leqslant\mu$ слѣдуетъ изъ того соображенія, что всякій коэффиціентъ p_i первой степени относительно x_i. Теперь надо показать, что не можетъ быть $m<\mu$, то есть, что не можетъ тождественно равняться нулю коффиціентъ при $x_1{}^m$.

Обозначимъ черезъ $q_1, q_2, q_3, \ldots$ сумму сочетаній остальныхъ (кромѣ x_1) корней по одному, по два, по три и т. д. Будемъ имѣть формулы

$$(-1)p_1=x_1+q_1, \ (-1)^2p_2=x_1q_1+q_2, \ (-1)^3p_3=x_1q_2+q_3.$$

Мы видимъ, что если степень $x_1{}^m$ происходитъ изъ члена $p_1{}^lp_2{}^rp_3{}^sp_4{}^t$, то независимо отъ знака коэффиціентъ у $x_1{}^m$ будетъ $q_1{}^rq_2{}^sq_3{}^t$, обратно коэффиціентъ $q_1{}^rq_2{}^sq_3{}^t$ можетъ происходить только отъ члена $p_1{}^lp_2{}^rp_3{}^sp_4{}^t$, ибо $l+r+s+t=m$. Итакъ, этотъ членъ съ $x_1{}^m$ не можетъ сократиться съ членами, происходящими отъ другихъ членовъ φ, и, слѣдовательно, $m=\mu$.

§ 29.

Когда дѣло идетъ объ удобныхъ пріемахъ вычисленія симметрическихъ функцій, то нѣтъ возможности обойти молчаніемъ пріемы вычисленія функцій отъ разностей корней, называемыхъ нѣкоторыми авторами [1])

---

[1]) Salmon. Vorlesungen ü. d. Algebra d. lin. Transf. 1877. s. 70.

критическими. Къ числу такихъ функцій принадлежатъ, напримѣръ, дискриминантъ.

Критическая функція не мѣняется, если всѣ корни получаютъ одно и тоже приращеніе λ. Замѣняя въ уравненіи x на $x+\lambda$, получимъ

$$x^n + (p_1 + n\lambda)x^{n-1} + \{p_2 + (n-1)\lambda p_1 + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2\}x^{n-2} + \ldots = 0 .$$

Тогда критическая функція φ, выраженная черезъ p_i, обратится въ слѣдующую

$$(1) \qquad \varphi + \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}dp_1 + \frac{d\varphi}{\partial p_1}dp_2 + \ldots\right\} + \frac{1}{1\,.\,2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_1^2}dp_1^2 + \ldots\right\} + \ldots$$

Но приращенія dp_1, dp_2, ... коэффиціентовъ можно замѣнить выраженіями

$$n\lambda,\ (n-1)\lambda p_1 + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2,\ \ldots,$$

отсюда, располагая выраженіе (1) по степенямъ λ, получимъ

$$(1) \quad \varphi + \lambda\left\{n\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + (n-1)p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + (n-2)p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_3} + \ldots\right\} + \lambda^2\{\ldots\} + \ldots$$

Такъ какъ функція φ не должна мѣняться, то мы приходимъ къ *дифференціальному уравненію*

$$(2) \qquad n\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + (n-1)p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + (n-2)p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_3} + \ldots = 0 .$$

§ 30.

Покажемъ приложеніе пріемовъ двухъ предыдущихъ параграфовъ къ вычисленію дискриминанта

$$V = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

уравненія третьей степени

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$$

Такъ какъ V должна быть функціей изобарической въ p_i вѣса 6 и степени (неоднородной) 4, то она можетъ быть только такого вида

$$(1) \qquad V = Ap_3^2 + Bp_3p_2p_1 + Cp_3p_1^3 + Dp_2^3 + Ep_2^2p_1^2 .$$

Составляемъ дифференціальное уравненіе

$$3\frac{\partial V}{\partial p_1} + 2p_1\frac{\partial V}{\partial p_2} + p_2\frac{\partial V}{\partial p_3} = 0 .$$

Получаемъ

$$(2A + 3B)p_3p_2 + (2B + 9C)p_3p_1^2 + (B + 6D + 6E)p_2^2p_1 + (C + 4E)p_2p_1^3 = 0.$$

Это равенство должно быть тождествомъ, слѣдовательно,

$$2A + 3B = 0\,,\ 2B + 9C = 0\,,\ B + 6D + 6E = 0\,,\ C + 4E = 0\,,$$

откуда

$$C = \quad 4E\,,\ B = 18E\,,\ A = -27E\,,\ D = -4E\,.$$

Полагая $x_3 = 0$, а, слѣдовательно, и $p_3 = 0$, получаемъ на основаніи (1) $E = 1$, такъ что окончательно

$$V = p_1^2p_2^2 + 18p_1p_2p_3 - 4p_2^3 - 4p_3p_1^3 - 27p_3^2$$

Если кубическое уравненіе имѣетъ видъ

$$x^3 + px + q = 0\,,$$

то $p_1 = 0$, $p_2 = p$, $p_3 = q$ и, слѣдовательно,

$$V = -(27q^2 + p^3)\,.$$

§ 31.

Вычислимъ дискриминантъ уравненія 4-ой степени

(1) $$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0\,,$$

ибо его выраженіе понадобится намъ въ дальнѣйшемъ.

Уничтожимъ по способу § 6 главы III коэффиціентъ при x^3, тогда получимъ уравненіе

(2) $$y^4 + ay^2 + by + c = 0\,,$$

гдѣ

$$a = -\frac{3}{8}p_1^2 + p_2\,,\ b = \frac{1}{8}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1p_2 + p_3$$

$$c = -\frac{3}{256}p_1^4 + \frac{1}{16}p_1^2p_2 - \frac{1}{4}p_1p_3 + p_4\,.$$

Положимъ

$$2y = u + v + w\,,$$

и кромѣ того для сокращенія

$$s = u^2 + v^2 + w^2,\ t = v^2w^2 + u^2w^2 + u^2v^2.$$

Тогда

$$4y^2 = s + 2(vw + uw + uv)$$

$$16y^4 = s^2 + 4s(vw + uw + uv) + 4t + 8uvw(u + v + w).$$

Вставляя въ уравненіе (2), получимъ

$$s^2 + 4t + 4as + 16c + 8(uvw + b)(u + v + w) +$$
$$+ 4(s + 2a)(vw + wu + uv) = 0.$$

Двѣ произвольныя изъ трехъ величинъ u, v, w подбираемъ такъ, чтобы было

(3) $$uvw + b = 0, \quad s + 2a = 0.$$

Тогда будетъ

$$s^2 + 4t + 4as + 16c = 0$$

или проще (на основаніи (3))

(4) $$t = a^2 - 4c.$$

Сопоставляя (3) и (4), мы получаемъ

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a$$

$$v^2w^2 + u^2w^2 + u^2v^2 = a^2 - 4c$$

$$u^2v^2w^2 = b^2$$

т. е. u^2, v^2, w^2 оказываются корнями кубическаго уравненія

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0$$

Знаки u, v, w надо такъ подбирать, чтобы имѣло мѣсто первое изъ равенствъ (3). Мы приходимъ къ четыремъ корнямъ уравненія (2)

$$2y_1 = u + v + w$$

$$2y_2 = u - v - w$$

$$2y_3 = u + v - w$$

$$2y_4 = -u - v + w.$$

Такъ какъ корни x_i уравненія (1) отличаются постояннымъ числомъ $\frac{p_1}{4}$ отъ корней y_i уравненія (2), то дискриминанты обоихъ уравненій одинаковы, и мы можемъ вычислять дискриминантъ D для уравненія (2).

$$y_1 - y_2 = v + w, \quad y_3 - y_4 = v - w$$

$$y_1 - y_3 = w + u, \quad y_4 - y_2 = w - u$$

$$y_1 - y_4 = u + v, \quad y_2 - y_3 = u - v$$

откуда

$$D = (v^2 - w^2)^2 (w^2 - u^2)^2 (u^2 - v^2)^2 .$$

То есть D есть также дискриминантъ уравненія

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0 .$$

Если мы уничтожимъ коэффиціентъ при z^2, т. е. будемъ разсматривать уравненіе

$$z_1^3 + pz_1 + q = 0 ,$$

то получимъ

$$p = -\frac{1}{3}(2a)^2 + (a^2 - 4c)$$

$$27q = 2(2a)^3 - 9 \cdot 2a(a^2 - 4c) + 27(-b^2)$$

Дискриминантъ будетъ выражаться такъ

$$D = -(27q^2 + 4p^3) ;$$

подставляя сюда вмѣсто p и q сначала a, b, c и затѣмъ p_1, p_2, p_3, p_4, получимъ послѣ шаблонныхъ выкладокъ равенство

$$27D = 4A^3 - B^2,$$

гдѣ

$$A = p_2^2 - 3p_1p_3 + 12p_4$$

$$B = 27p_1^2p_4 + 27p_3^2 + 2p_2^3 - 72p_2p_4 - 9p_1p_2p_3 .$$

Преобразованіе Tschirnhausen'а.

§ 32.

Будемъ разсматривать задачу, поставленную Tschirnhausen'омъ, о преобразованіи уравненія

(1) $$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

къ новой неизвѣстной y, представляющей изъ себя раціональную функцію отъ первоначальной неизвѣстной x

(2) $$y = \varphi(x) .$$

Другими словами, надо составить уравненіе

(5) $$y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \dots + q_n = 0,$$

котораго корни суть

$$y_1 = \varphi(x_1)\,,\; y_2 = \varphi(x_2)\,,\; \dots\; y_n = \varphi(x_n)\,,$$

если

$$x_1\,,\; x_2\,,\; \dots\; x_n$$

суть корни первоначальнаго уравненія (1).

Очевидно, что коэффиціенты q_i новаго уравненія будутъ симметрическими функціями отъ выраженій

$$\varphi(x_1)\,,\; \varphi(x_2)\,,\; \dots\; \varphi(x_n)\,,$$

а, слѣдовательно, они будутъ также и симметрическими функціями отъ корней $x_1, x_2, \dots x_n$ и мы найдемъ ихъ выраженія черезъ p_i по выше указаннымъ правиламъ вычисленія симметрическихъ функцій.

§ 33.

Покажемъ теперь болѣе удобный въ практическомъ отношеніи пріемъ осуществленія преобразованія Tschirnhausen'а. Прежде всего, мы можемъ на основаніи соображеній § 24 раціональную функцію $\varphi(x)$ отъ корня представить въ простѣйшемъ видѣ

(1) $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1};$$

умножая равенство (1) на x, получимъ

$$yx = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots + a_{n-2} x^{n-1} + a_{n-1} x^n.$$

На основаніи уравненія (1) § 32 можно будетъ замѣнить x^n на

$$-p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \dots - p_{n-2} x^2 - p_{n-1} x - p_n$$

и мы получимъ

$$yx = a_0' + a_1' x + a_2' x^2 + \dots + a_{n-1}' x^{n-1},$$

гдѣ

$$a_0' = -a_{n-1} p_n\,,\; a_1' = a_0 - a_{n-1} p_{n-1}\,,\; a_2' = a_1 - a_{n-1} a_{n-2}\,,\; \dots$$

Подобнымъ же образомъ, представляя въ простѣйшемъ видѣ также выраженія yx^2, $yx^3, \dots yx^{n-1}$, получимъ

$$\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \\
yx &= a_0' + a_1' x + a_2' x^2 + \dots + a_{n-1}' x_1^{n-1} \\
yx^2 &= a_0'' + a_1'' x + a_2'' x^2 + \dots + a_{n-1}'' x^{n-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
yx^{n-1} &= a_0^{(n-1)} + a_1^{(n-1)} x + a_2^{(n-1)} x^2 + \dots + a_{n-1}^{(n-1)} x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Исключая изъ этой системы величины $x, x^2, \ldots x^{n-1}$, получимъ

$$
(2) \qquad \begin{vmatrix}
a_0 - y, & a_1, & a_2, & \ldots & a_{n-1} \\
a_0', & a_1' - y, & a_2', & \ldots & a_{n-1}' \\
a_0'', & a_1'', & a_2'' - y, & \ldots & a_{n-1}'' \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_0^{(n-1)}, & a_1^{(n-1)}, & a_2^{(n-1)}, & \ldots & a_{n-1}^{(n-1)} - y
\end{vmatrix} = 0.
$$

Уравненіе (2) степени n отъ y и есть искомое преобразованное по методѣ Tschirnhausen'а.

§ 34.

Tschirnhausen разсматривалъ преобразованіе какъ методу для рѣшенія уравненій. Онъ старался найти видъ функціи $\varphi(x)$ такимъ образомъ, чтобы въ преобразованномъ уравненіи уничтожалось возможно большое число коэффиціентовъ q_i. Такимъ путемъ можно, напримѣръ, рѣшить уравненія 3-ей и 4-ой степени.

Для уравненій третьей степени Tschirnhausen и Euler предлагаютъ положить

$$(1) \qquad y^2 + \alpha y + \beta = x$$

и подобрать α и β такимъ образомъ, чтобы послѣ исключенія y изъ (1) и слѣдующаго уравненія

$$(2) \qquad y^3 = d$$

получалось заданное уравненіе третьей степени.

Въ случаѣ уравненія третьей степени можно считать простѣйшимъ видомъ раціональной функціи отъ его корня одну изъ двухъ функцій

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad \frac{a_0 + a_1 x}{1 + a_2 x},$$

такъ что можно было бы приводить заданное уравненіе третьей степени къ виду (2) не только при помощи соотношенія (1), но также и при помощи такого

$$x = \frac{\alpha + \beta y}{1 + y}.$$

Для рѣшенія уравненія четвертой степени Tschirnhausen предлагаетъ привести его къ виду

$$y^4 + py^2 + q = 0$$

при помощи соотношенія

$$y = \alpha + \beta x + x^2$$

Euler исключаетъ y между двумя уравненіями

$$x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$$

$$y^4 = d$$

и подбираетъ a_0, a_1, a_2, a_3, d такимъ образомъ, чтобы результатъ исключенія совпадалъ съ заданнымъ уравненіемъ.

§ 35.

Возвращаясь къ общей теоріи, приведемъ уравненіе

(1) $$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

къ виду

(2) $$y^n + q_1 y^{n-1} + \ldots + q_n = 0$$

при помощи соотношенія

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

Всякая сумма k-ыхъ степеней корней уравненія (2) будетъ формой степени k относительно a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, Слѣдовательно, коэффиціенты q_i, выражаясь раціонально черезъ коэффиціенты уравненія (1), будутъ въ тоже время формами относительно a_i, причемъ степень каждаго q_i относительно a_i будетъ равна индексу i этого коэффиціента.

M Jerrard показалъ, что можно свести къ рѣшенію кубическаго уравненія задачу выбора a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, такимъ образомъ, чтобы уничтожились второй, третій и четвертый коэффиціенты уравненія, какова бы ни была степень этого уравненія; т. е. чтобы было

(3) $$q_1 = 0\,, \; q_2 = 0\,, \; q_3 = 0\,.$$

Начнемъ съ разсмотрѣнія перваго уравненія $q_1 = 0$. Такъ какъ это уравненіе первой степени относительно a_i, то можно будетъ выразить a_0 линейно черезъ a_1, a_2, a_3, a_4. Подставляя эти выраженія въ два остальныхъ уравненія (3), получимъ

$$q_2' = 0\,, \; q_3' = 0\,,$$

гдѣ q_2' форма квадратичная относительно a_1, a_2, a_3, a_4, а q_3' форма третьей степени.

Представляя квадратичную форму въ видѣ суммы квадратовъ линейныхъ функцій, перепишемъ уравненіе $q_2' = 0$ въ такомъ видѣ

(4) $$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = 0\,,$$

гдѣ f, g, h, k линейныя формы относительно a_i, уравненію (4) можно будетъ удовлетворить, полагая

$$f^2+g^2=0,\ h^2+k^2=0$$

или

(5) $$f=g\sqrt{-1},\ h=k\sqrt{-1}.$$

Изъ уравненій (5) выражаются a_1, a_2 линейно черезъ a_3, a_4. Подставляя эти выраженія въ послѣднее уравненіе $q_3'=0$, получимъ

$$q_3''=0,$$

гдѣ q_3'' кубическая форма относительно двухъ перемѣнныхъ a_3 и a_4. Одна изъ этихъ перемѣнныхъ остается произвольною, другая же опредѣляется изъ уравненія третьей степени, такъ что теорема Jerrard'а оказывается справедливою.

Можно было бы совершенно подобнымъ образомъ достигнуть того чтобы было

$$q_1=0,\ q_2=0,\ q_4=0.$$

Мы придемъ очевидно къ уравненію четвертой степени. Итакъ, мы видимъ, что рѣшается въ радикалахъ задача уничтоженія при помощи преобразованія Tschirnhausen'а или коэффиціентовъ p_1, p_2, p_3, или же коэффиціентовъ p_1, p_2, p_4. Замѣной x на $\frac{1}{x}$ мы перенесемъ соображенія, относящіяся къ старшимъ коэффиціентамъ на соображенія относящіяся къ младшимъ. Можно будетъ достигнуть уничтоженія, или коэффиціентовъ p_{n-3}, p_{n-2}, p_{n-1}, или же коэффиціентовъ p_{n-4}, p_{n-2}, p_{n-1}.

Въ примѣненіи къ уравненіямъ 5-ой степени мы замѣчаемъ, что это уравненіе можетъ быть приведено къ одному изъ слѣдующихъ видовъ

$$x^5+px+q=0$$

$$x^5+px^2+q=0$$

$$x^5+px^3+q=0$$

$$x^5+px^4+q=0$$

§ 36.

Покажемъ теперь замѣчательный видъ, подъ которымъ представляетъ Hermite преобразованіе Tschirnhausen'а.

Мы придадимъ изложенію характеръ приложенія символическаго исчисленія. Мы будемъ предполагать извѣстными начала этого исчисленія

по крайней мѣрѣ въ той формѣ, какъ это изложено въ главѣ XIV моего курса теоріи чиселъ (второе изданіе 1913).

Мысль Hermite'а состоитъ въ выраженіи раціональныхъ функцій y отъ корня x неприводимаго уравненія

$$f(x) = x_0^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

въ видѣ

(1) $$y = \alpha_{n-1}\omega_0 + \alpha_{n-2}\omega_1 + \ldots + \alpha_1\omega_{n-2} + \alpha_0\omega_{n-1}$$

гдѣ

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = x + p_1, \omega_2 = x^2 + p_1x + p_2, \ldots \omega_k = x^k + p_1x^{k-1} + \ldots + p_k, \ldots$$

Коэффиціенты α_i въ выраженіи (1) суть новыя перемѣнныя независимыя. Такъ какъ степени $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ выражаются линейно черезъ

$$\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{n-1},$$

то очевидно, что въ видѣ (1) можетъ быть представлена всякая цѣлая функція степени не выше $n-1$ при помощи соотвѣтственнаго выбора коэффиціентовъ α_i. Выражая черезъ ω_i величину $y\omega_k$ получимъ

(2) $$y\omega_k = A_0^{(k)}\omega_0 + A_1^{(k)}\omega_1 + \ldots + A_{n-1}^{(k)}\omega_{n-1}.$$

Выписавъ всѣ уравненія (2) для всѣхъ значеній $1, 2, \ldots (n-1)$ значка k и исключая $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, получимъ преобразованное уравненіе для y

(3) $$\begin{vmatrix} A_0^{(0)} - y, & A_1^{(0)}, & \ldots & A_{n-1}^{(0)} \\ A_0^{(1)}, & A_1^{(1)} - y, & \ldots & A_{n-1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_0^{(n-1)}, & A_1^{(n-1)}, & \ldots & A_{n-1}^{(n-1)} - y \end{vmatrix} = 0.$$

Остается показать какъ вычислить всѣ коэффиціенты $A_i^{(k)}$.

Равенство (2) должно быть тождествомъ относительно x, если только послѣ перемноженій въ произведеніи $y\omega_k$ замѣнить всѣ степени выше x^{n-1} при помощи уравненія $f(x)=0$. Тождество относительно $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ останется тождествомъ, если замѣнить нижніе значки показателями, то есть, вмѣсто прежнихъ независимыхъ перемѣнныхъ ввести величины $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1}$. Получимъ изъ (2) новое тождество

(4) $$[\alpha^{n-1}\omega_0 + \alpha^{n-2}\omega_1 + \ldots + \alpha\omega_{n-2} + \omega_{n-1}]\omega_k =$$
$$= \mathfrak{A}_0^{(k)}\omega_0 + \mathfrak{A}_1^{(k)}\omega_1 + \ldots + \mathfrak{A}^{(k)}_{n-1}\omega_{n-1},$$

гдѣ $\mathfrak{A}_i^{(k)}$ получается изъ $A_i^{(k)}$ замѣной α_i на α^i.

Подставимъ въ тождество (4) $x=\alpha$, не забывая формальнаго правила исключать степени α выше α^{n-1} при помощи уравненія $f(\alpha)=0$. Пусть обозначенъ черезъ ω_i' результатъ подстановки α вмѣсто x въ величину ω_i. Равенство (4) перепишется такъ

$$[\alpha^{n-1}\omega_k'-\mathfrak{A}_0^{(k)}]\omega_0'+[\alpha^{n-2}\omega_k'-\mathfrak{A}_1^{(k)}]\omega_1'+\ldots=0,$$

отсюда на основаніи независимости функцій ω_i' получимъ

$$\mathfrak{A}_i^{(k)}=\alpha^{n-i-1}\omega_k'.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ символическое равенство

(5) $$A_i^{(k)} \doteq \alpha^{n-i-1}\omega_k(\alpha).$$

Это равенство надо понимать такъ: надо найти остатокъ

$$a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n$$

отъ дѣленія $\alpha^{n-i-1}\omega_k(\alpha)$ на $f(x)$ и тогда получится настоящее равенство

$$A_i^{(k)}=a_1\alpha_{n-1}+a_2\alpha_{n-2}+\ldots+a_{n-1}\alpha_1+a_n\alpha_0,$$

если замѣнить показатели значками

§ 37.

Пояснимъ теорію примѣромъ уравненій 3-ей степени

$$f(x)=x^3+x_1p^2+p_2x+p_3=0$$

$$\omega_0=1,\ \omega_1=x+p_1,\ \omega_2=x^2+p_1x+p_2$$

$$A_0^{(0)}=\alpha^2\omega_0=\alpha_2,\ A_1^{(0)}=\alpha\omega_0=\alpha_1,\ A_2^{(0)}=\omega_0=1$$

$$A_0^{(1)}=\alpha^2\omega_1=\alpha^3+p_1\alpha^2=-p_2\alpha-p_3=-p_2\alpha_1-p_3\alpha_0$$

$$A_1^{(1)}=\alpha\omega_1=\alpha^2+p_1\alpha=\alpha_2+p_1\alpha_1$$

$$A_2^{(1)}=\omega_1=\alpha+p_1=\alpha_1+p_1\alpha_0$$

$$A_0^{(2)}=\alpha^2\omega_2=\alpha^4+p_1\alpha^3+p_2\alpha^2=-p_3\alpha=-p_3\alpha_1$$

$$A_1^{(2)}=\alpha\omega_2=\alpha^3+p_1\alpha^2+p_2\alpha=-p_3=-p_3\alpha_0$$

$$A_2^{(2)}=\omega_2=\alpha^2+p_1\alpha+p_2=\alpha_2+p_1\alpha_1+p_2\alpha_0.$$

Примѣнимъ символическое вычисленіе къ нахожденію кубическаго уравненія

$$y^3 + P_1 y^2 + P_2 y + P_3 = 0 ,$$

которому удовлетворяетъ выраженіе

$$y = \alpha_2\omega_0 + \alpha_1\omega_1 + \alpha_0\omega_2 .$$

Это кубическое уравненіе можетъ быть написано въ символическомъ видѣ такъ

(1) $$\begin{vmatrix} \alpha^2\omega_0 - y , & \alpha\omega_0 , & \omega_0 \\ \beta^2\omega_1(\beta) , & \beta\omega_1(\beta) - y , & \omega_1(\beta) \\ \gamma^2\omega_2(\gamma) , & \gamma\omega_2(\gamma) , & \omega_2(\gamma) - y \end{vmatrix} = 0 ,$$

гдѣ, послѣ выполненія дѣйствій и уничтоженія степеней выше второй символовъ α, β, γ на основаніи уравненій $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$, $f(\gamma) = 0$, придется подставить $\alpha^i = \beta^i = \gamma^i = \alpha_i$.

Получаемъ

$$P_1 = \alpha^2\omega_0 + \beta\omega_1(\beta) + \omega_2(\gamma) = \alpha^2 + \alpha(\alpha + p_1) + \alpha^2 + p_1\alpha + p_2 =$$

$$= 3\alpha^2 + 2p_1\alpha + p_2 = f'(\alpha) = 3\alpha_2 + 2p_1\alpha_1 + p_2\alpha_0 .$$

Коэффиціентъ P_2 будетъ квадратичной формой отъ α_0, α_1, α_2, а P_3 формой кубичной.

Выберемъ одну изъ перемѣнныхъ независимыхъ α_0, α_1, α_2 такъ, чтобы было $P_1 = 0$, или, что одно и тоже,

(2) $$3\alpha_2 + 2p_1\alpha_1 + p_2\alpha_0 = 0$$

изъ этого равенства можно выразить α_2 линейно черезъ α_1 и α_0; подставляя это выраженіе въ коэффиціентъ P_2, мы получимъ этотъ послѣдній въ видѣ квадратичной формы отъ двухъ буквъ α_1 и α_0

$$3P_2 = A\alpha_1^2 + B\alpha_1\alpha_2 + C\alpha_2^2 .$$

Эта форма по предложенію Sylvester'a носитъ названіе *безутіанты* для заданнаго уравненія $f(x) = 0$.

Изъ уравненія (1) имѣемъ

$$P_2 = \beta\omega_1(\beta)\omega_2(\gamma) + \alpha^2\omega_2(\gamma) + \alpha^2\beta\omega_1(\beta) - \gamma^2\omega_2(\gamma) - \alpha\beta^2\omega_1(\beta) -$$

$$- \gamma\omega_2(\gamma)\omega_1(\beta) .$$

Можно ограничиться, очевидно, двумя только символическими буквами α, γ

$$P_2 = \alpha\omega_1(\alpha)\omega_2(\gamma) + \alpha^2\omega_2(\gamma) + \alpha^2\gamma\omega_1(\gamma) + p_3\gamma$$

$$+ \gamma(p_2\alpha + p_3) + p_3(\gamma + p_1) =$$

$$= (3\alpha^2 + p_1\alpha)\omega_2(\gamma) - \alpha^2 p_2 + 3p_3\gamma + p_1 p_3 + p_2\alpha\gamma\,.$$

Но принимая въ соображеніе (2), которое можно переписать въ такомъ символическомъ видѣ

$$3\alpha^2 + 2p_1\alpha + p_2 = 0\,,$$

мы получимъ

$$3P_2 = -(p_1\alpha + p_2)(p_1\gamma + 2p_2) \quad 3\alpha^2 p_2 + 9p_3\gamma + 3p_1p_3 + 3p_2\alpha\gamma$$

$$= (3\gamma + p_1)(p_2\alpha + 3p_3) - (p_1\alpha + p_2)(p_1\gamma + p_2)\,,$$

или окончательно

$$(3) \qquad 3P_2 = \begin{vmatrix} 3\alpha_1 + p_1\alpha_0 & p_1\alpha_1 + p_2\alpha_0 \\ p_1\alpha_1 + p_2\alpha_0 & p_2\alpha_1 + 3p_3\alpha_0 \end{vmatrix}.$$

Найденная формула (3) заслуживаетъ вниманія.

Приведемъ первую часть $f(x)$ заданнаго уравненія въ видъ бинарной формы

$$f(x\,,\ y) = x^3 + p_1x^2y + p_2xy^2 + p_3y^3$$

и составимъ опредѣлитель

$$H(\xi\,,\ \eta) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\xi\,,\ \eta) & f''_{xy}(\xi\,,\ \eta) \\ f''_{yx}(\xi\,,\ \eta)\,, & f''_{yy}(\xi\,,\ \eta) \end{vmatrix},$$

элементы котораго суть вторыя частныя производныя формы $f(x, y)$. Этотъ опредѣлитель носитъ названіе *гессіана* формы $f(x\,,\ y)$.

Очевидно, что будетъ

$$3P_2 = H(\alpha_1\,,\ \alpha_0)$$

и коэффиціенты искомой безутіанты будутъ

$$A = 3p_2 \quad p_1^2,\ B = 9p_3 \quad p_1p_2\,,\ C = 3p_1p_3 - p_2^2.$$

Кромѣ того будетъ

$$3D = 4AC \quad B_1^2,$$

гдѣ D дискриминантъ заданнаго кубическаго уравненія.

Замѣтимъ здѣсь кстати, что гессіанъ $H(\xi\,,\ \eta)$ есть коваріантъ вѣса 2 формы $f(x\,,\ y)$.

Приведенныя соображенія обобщаются на случай безутіанты уравненія всякой степени.

Вычислимъ теперь послѣдній коэффиціентъ P_3.

$$-P_3 = \begin{vmatrix} \alpha^2\omega_0 , & \alpha\omega_0 , & \omega_0 \\ \beta^2\omega_1(\beta) , & \beta\omega_1(\beta) , & \omega_1(\beta) \\ \gamma^2\omega_2(\gamma) , & \gamma\omega_2(\gamma) , & \omega_2(\gamma) \end{vmatrix} = \omega_1(\beta)\omega_2(\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma);$$

производя перемноженіе, уничтожая высшіе степени α, β, γ и замѣняя показатели значками, легко получимъ окончательное выраженіе P_3 черезъ α_0, α_1, α_2.

ГЛАВА X.

Объ отдѣленіи корней.

О предѣлахъ модуля корня.

§ 1.

Покажемъ, что можно найти два такихъ положительныхъ числа l и L (при условіи $L > l$), что модули всѣхъ корней уравненія

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

будутъ заключаться между этими числами.

Такія числа l и L называются *предѣлами* модулей корней заданнаго уравненія; число l называется *низшимъ* предѣломъ, а число L называется *высшимъ*.

§ 2.

Разсмотримъ функцію самаго общаго вида

(1) $$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n ,$$

гдѣ коэффиціенты $p_0, p_1, \ldots p_n$ какія угодно вещественныя или комплексныя числа. Мы видѣли уже (см. стр. 14), что можно указать такой кругъ на плоскости, что для точекъ внѣ этого круга модуль $|f(x)|$ функціи будетъ больше нѣкотораго положительнаго числа, и, слѣдовательно, корни этой функціи будутъ всѣ лежать внутри этого круга. Ихъ разстоянія отъ начала координатъ, т. е. модули, будутъ числа конечныя.

Не трудно указать простое правило для вычисленія такого положительнаго числа L, которое больше модулей всѣхъ корней.

Обозначимъ черезъ

$$a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , \ldots a_n$$

модули коэффиціентовъ

$$p_0\,,\; p_1\,,\; p_2\,,\; p_3\,,\; \dots\; p_n$$

и кромѣ того обозначимъ черезъ a наибольшее изъ чиселъ: $a_1\,,\, a_2\,,\, a_3\,, \dots a_n$; тогда мы получимъ по теоремѣ о модулѣ суммы двухъ чиселъ

(2) $$|f(x)| \geqslant |p_0x^n| - |p_1x^{n-1} + \dots + p_n|\,.$$

Обозначая черезъ ρ модуль x, получимъ

$$|p_0x^n| = a_0\rho^n$$

и кромѣ того

$$|p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n| \leqslant a_1\rho^{n-1} + a_2\rho^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\leqslant a(\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \dots + 1)$$

$$= a\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}\,.$$

Отсюда мы получаемъ

(3) $$|f(x)| \geqslant a_0\rho^n - a\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}\,.$$

Для полученія искомаго верхняго предѣла L модулей корней достаточно указать такое число ρ, чтобы при $|x| = \rho$ модуль $|f(x)|$ былъ больше нуля. Для этой цѣли, предполагая

(4) $$\rho > 1\,,$$

достаточно удовлетворить неравенству

(5) $$a_0\rho^n - a\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} > 0\,.$$

На основаніи неравенства (4) неравенство (5) можетъ быть переписано такъ

$$a_0\rho^n(\rho - 1) - a(\rho^n - 1) > 0\,,$$

или

(6) $$a_0\rho^n(\rho - 1) - a\rho^n + a > 0\,.$$

Неравенство (6) удовлетворится навѣрно, если мы удовлетворимъ неравенству

$$a_0\rho^n(\rho - 1) - a\rho^n > 0\,,$$

или

$$a_0(\rho - 1) - a > 0\,;$$

отсюда

$$a_0\rho > a_0 + a$$

и, значитъ,

(7) $$\rho > 1 + \frac{a}{a_0}$$

Итакъ, за *верхній* предѣлъ L модулей корней разсматриваемой функціи можно принять число $1 + \frac{a}{a_0}$.

Если коэффиціентъ p_n не равенъ нулю, то не существуетъ корней функціи равныхъ нулю, и можно будетъ указать такое число l, что модули всѣхъ корней функціи будутъ больше l.

Въ самомъ дѣлѣ, введемъ новую перемѣнную при помощи уравненія

$$x = \frac{1}{y};$$

тогда уравненіе относительно новой перемѣнной приметъ видъ

(8) $$p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_{n-1} y^{n-1} + p_n y^n = 0.$$

Обозначимъ черезъ b высшій предѣлъ модулей корней послѣдняго уравненія. На основаніи предыдущихъ соображеній будемъ имѣть

$$b = 1 + \frac{\alpha}{a_n},$$

гдѣ α наибольшій изъ модулей $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$.

Очевидно, что за *низшій* предѣлъ модулей корней заданнаго уравненія можно принять

$$\frac{1}{b},$$

т. е. число

$$\frac{a_n}{a_n + \alpha}.$$

Итакъ, мы видимъ, что, если x есть корень уравненія

$$f(x) = 0,$$

то должны имѣть мѣсто неравенства

$$\frac{a_n}{a_n + \alpha} < |x| < 1 + \frac{a}{a_0}.$$

§ 3.

Полученный результатъ можно представить слѣдующимъ образомъ геометрически. Если мы изъ начала координатъ, какъ центра, опишемъ двѣ окружности радiусами, равными высшему и низшему предѣламъ модулей корней, то всѣ корни уравненiя должны заключаться въ пространствѣ между этими окружностями. Сами же предѣлы l и L будутъ давать предѣлы для вещественныхъ корней, причемъ для положительныхъ корней получаются предѣлы $+l$ и $+L$, а для отрицательныхъ корней предѣлы $-L$ и $-l$.

О предѣлахъ вещественныхъ корней.

§ 4.

Хотя показанные нами предѣлы модулей комплексныхъ корней и даютъ непосредственно предѣлы для вещественныхъ корней, но часто такимъ путемъ получаются слишкомъ широкiе предѣлы для вещественныхъ корней.

Покажемъ нѣсколько простыхъ прiемовъ, дающихъ возможность получить на практикѣ для вещественныхъ корней уравненiя болѣе близкiе между собою предѣлы.

Будемъ въ уравненiи

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

предполагать старшiй коэффицiентъ p_0 числомъ положительнымъ и всѣ коэффицiенты числами вещественными. Тогда, если всѣ коэффицiенты числа положительныя, то уравненiе, очевидно, не можетъ имѣть положительныхъ корней, ибо при всякомъ положительномъ x первая часть будетъ числомъ положительнымъ отличнымъ отъ нуля; слѣдовательно, необходимымъ условiемъ для того, чтобы уравненiе имѣло положительные корни, будетъ присутствiе въ первой части уравненiя членовъ съ отрицательными коэффицiентами. Пусть первый отрицательный коэффицiентъ, начиная отъ коэффицiента p_0 будетъ p_{n-m}. Обозначимъ черезъ p наибольшую изъ абсолютныхъ величинъ отрицательныхъ коэффицiентовъ, тогда, предполагая x положительнымъ, получимъ

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-m}x^m + \ldots + p_n \geqq p_0x^n - p(x^m + \ldots + 1).$$

Вторая часть неравенства, очевидно, не больше первой, ибо она получается черезъ пропускъ всѣхъ положительныхъ членовъ между глав-

нымъ и первымъ отрицательнымъ и черезъ замѣну всѣхъ остальныхъ членовъ отрицательными членами съ наибольшей абсолютной величиной коэффиціентовъ. Нетрудно указать такое число, что при x большемъ этого числа вторая часть этого неравенства будетъ оставаться положительнымъ числомъ; для этого придется удовлетворить неравенству

$$p_0x^n - p(x^m + x^{m-1} + \dots + 1) > 0,$$

или

$$p_0x^n - p\frac{x^{m+1} - 1}{x - 1} > 0.$$

Будемъ предполагать $x > 1$, тогда придется рѣшить неравенство

$$p_0x^n(x-1) - px^{m+1} + p > 0.$$

Достаточно удовлетворить такому новому неравенству

$$p_0x^n(x-1) - px^{m+1} > 0,$$

или

$$p_0x^{n-m-1}(x-1) - p > 0.$$

Это же послѣднее неравенство можетъ быть замѣнено слѣдующимъ

$$p_0(x-1)^{n-m-1}(x-1) - p > 0$$

или

$$p_0(x-1)^{n-m} - p > 0.$$

Рѣшая, будемъ имѣть

$$(x-1)^{n-m} > \frac{p}{p_0},$$

или

$$x - 1 > \sqrt[n-m]{\frac{p}{p_0}},$$

откуда

$$x > 1 + \sqrt[n-m]{\frac{p}{p_0}}.$$

Отсюда мы видимъ, что за *верхній* предѣлъ положительныхъ корней можетъ быть принято число

$$1 + \sqrt[n-m]{\frac{p}{p_0}}.$$

Нахожденіе *нижняго* предѣла положительныхъ корней приведется къ преобразованію уравненія при помощи подстановки

$$x = \frac{1}{y}$$

и къ нахожденію высшаго предѣла положительныхъ корней преобразованнаго уравненія.

Замѣняя въ уравненіи x на $-x$, мы приведемъ задачу отысканія предѣловъ отрицательныхъ корней къ задачѣ разысканія предѣловъ положительныхъ корней для новаго уравненія.

Такимъ образомъ, мы замѣчаемъ, что основной задачей при разысканіи предѣловъ вещественныхъ корней является задача опредѣленія высшаго предѣла положительныхъ корней.

§ 5.

Покажемъ еще одинъ способъ рѣшенія послѣдней задачи. Пусть первая часть разсматриваемаго уравненія состоитъ изъ ряда положительныхъ членовъ, слѣдующихъ за главнымъ, за которыми слѣдуютъ члены, всѣ имѣющіе знакъ минусъ. Итакъ, первая часть заданнаго уравненія $f(x)$ имѣетъ видъ

$$f(x)=\varphi(x)\quad \psi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ полиномы съ положительными коэффиціентами. Пусть m будетъ низшая степень x въ функціи $\varphi(x)$; тогда въ выраженіи

$$\frac{f(x)}{x^m}=\frac{\varphi(x)}{x^m}-\frac{\psi(x)}{x^m}$$

часть $\frac{\varphi(x)}{x^m}$ заключаетъ члены не отрицательныхъ степеней, а часть $\frac{\psi(x)}{x^m}$ заключаетъ члены отрицательныхъ степеней. Мы видимъ, слѣдовательно, что при возрастаніи положительныхъ значеній x первая часть не убываетъ, а вторая часть убываетъ. Слѣдовательно, разность

$$\frac{f(x)}{x^m}$$

возрастаетъ. Если эта разность положительна при какомъ-нибудь значеніи a независимаго перемѣннаго x, то она останется положительною и при $x>a$, т. е. функція $f(x)$ не будетъ имѣть корней бо́льшихъ a, и, слѣдовательно,

всякое положительное число a, при которомъ первая часть заданнаго уравненія есть число положительное, можетъ быть принято за высшій предѣлъ положительныхъ корней.

Отсюда получается способъ нахожденія высшаго предѣла корней въ случаѣ произвольно заданнаго уравненія. Всегда первая часть уравненія можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)+\varphi_3(x)-\varphi_4(x)+\ldots+\varphi_{2k-1}(x)-\varphi_{2k}(x),$$

гдѣ полиномы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{2k}$ имѣютъ положительные коэффиціенты. Достаточно подобрать числа

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots a_k,$$

при которыхъ будутъ положительными полиномы

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x), \varphi_3(x) - \varphi_4(x), \ldots \varphi_{2k-1}(x) - \varphi_{2k}(x).$$

Тогда по предыдущему наибольшее изъ чиселъ (1) можетъ быть принято за искомый верхній предѣлъ.

§ 6

Пусть требуется опредѣлить предѣлы корней уравненія

$$2x^5 - 92x^2 + 2x - 1 = 0.$$

По общему правилу находимъ, что верхній предѣлъ будетъ $1 + \frac{a}{a_0}$, гдѣ a есть наибольшій изъ модулей коэффиціентовъ $-92, 2, -1$, значитъ, $a = 92$, а $a_0 = 2$. Отсюда получаемъ $L = 1 + 46 = 47$.

Примѣняя соображенія § 4, получимъ для верхняго предѣла выраженіе $1 + \sqrt[n-m]{\frac{p}{p_0}}$. Въ данномъ случаѣ $n = 5$, $m = 2$, $p = 92$, $p_0 = 2$; значитъ $1 + \sqrt[n-m]{\frac{p}{p_0}} = 1 + \sqrt[3]{46} = 1 + 3, \ldots = 4, \ldots$

Но нетрудно видѣть, на основаніи соображеній § 5, что за верхній предѣлъ положительныхъ корней можно принять число 4. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая функціи $2x^5 - 92x^2$, $2x - 1$, мы замѣчаемъ, что вторая функція уже положительна при $x = 1$, первая же функція $2x^2(x^3 - 46)$ положительна при $x = 4$, слѣдовательно, 4 можно принять за верхній предѣлъ положительныхъ корней.

Чтобы найти нижній предѣлъ положительныхъ корней, замѣнимъ x на $\frac{1}{y}$; получимъ $y^5 - 2y^4 + 92y^3 - 2 = 0$. Найдемъ верхній предѣлъ положительныхъ корней этого уравненія; разсматривая двѣ функціи $y^5 - 2y^4$ и $92y^3 - 2$, мы замѣчаемъ, что первая функція $y^4(y - 2)$ дѣлается положительной послѣ $y = 2$; но при $y = 2$ вторая функція тоже положительна; слѣдовательно, число 2 есть верхній предѣлъ преобразованнаго уравненія, а число $l = \frac{1}{2}$ будетъ нижнимъ предѣломъ положительныхъ корней заданнаго уравненія.

Для нахожденія предѣловъ отрицательныхъ корней замѣнимъ x на $-x$; получимъ уравненіе $2x^5 + 92x^2 + 2x + 1 = 0$. Послѣднее уравненіе имѣетъ всѣ положительные коэффиціенты, слѣдовательно, оно не имѣетъ положительныхъ корней; потому и заданное уравненіе не имѣетъ отрицательныхъ корней.

Способъ Newton'а опредѣленія высшаго предѣла корней.

§ 7

Способъ Newton'а опредѣленія верхняго предѣла положительныхъ корней основывается на слѣдующей теоремѣ

Если при нѣкоторомъ значеніи a независимаго перемѣннаго x всѣ функціи

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n\ p_n$$

принимаютъ положительныя численныя значенія, то число a можетъ считаться верхнимъ предѣломъ положительныхъ корней уравненія $f(x)=0$.

Доказательство этого предложенія основывается на разсмотрѣніи формулы Taylor'а

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Если всѣ числа

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots\ f^{(n)}(a)$$

положительны, то при произвольномъ положительномъ числѣ h будетъ положительнымъ также и выраженіе

$$f(a+h).$$

Другими словами, число $a+h$ не можетъ быть корнемъ уравненія $f(x)=0$.

Нетрудно убѣдиться также, что при произвольномъ h будутъ положительными также числа

$$f'(a+h),\ f''(a+h),\ \ldots\ f^{(n-1)}(a+h).$$

Доказательство этого послѣдняго свойства можетъ быть основано на разложеніи $f^{(k)}(a+h)$ по формулѣ Taylor'а. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$f^{(k)}(a+h) = f^{(k)}(a) + \frac{h}{1} f^{(k+1)}(a) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f^{(k+2)}(a) + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{h^{n-k}}{(n-k)!} f^{(n)}(a),$$

а числа

$$f^{(k)}(a),\ f^{(k+1)}(a),\ \ldots f^{(n)}(a)$$

по сдѣланному выше предположенію положительны.

Изъ этой теоремы получается такой пріемъ вычисленія верхняго предѣла положительныхъ корней. Послѣдняя производная n-аго порядка есть число положительное и притомъ постоянное. Предыдущая производная $f^{(n-1)}(x)$ есть функція первой степени съ положительнымъ коэффиціентомъ при x. Увеличивая достаточно x, остановимся на какомъ-нибудь значеніи a_1 перемѣнной x, при которомъ разсматриваемая производная положительна. Подставляемъ это число a_1 въ предыдущую производную $f^{(n-2)}(x)$. Если результатъ подстановки будетъ положительный, то останавливаемся на числѣ a_1; если же результатъ подстановки отрицательный, то продолжаемъ увеличивать численное значеніе x, пока вторая производная не сдѣлается положительною. Приходимъ такимъ путемъ къ числу a_2, при которомъ съ одной стороны производная $f^{(n-2)}(x)$ число положительное, а, съ другой стороны, останется также положительною и производная $f^{(n-1)}(x)$, ибо число a_2 не меньше числа a_1. Подставляемъ число a_2 въ слѣдующую производную $f^{(n-3)}(x)$ или увеличиваемъ его до тѣхъ поръ, пока эта производная не сдѣлается положительною. Такой процессъ подстановки чиселъ возрастающихъ во всѣ производныя и заданную функцію приведетъ навѣрно къ нахожденію такого числа, при которомъ всѣ функціи $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots f^{(n)}(x)$ сдѣлаются положительными, и, слѣдовательно, это число можетъ считаться за верхній предѣлъ положительныхъ корней уравненія $f(x)=0$.

Алгориемъ Horner'а.

§ 8.

Нахожденіе верхняго предѣла положительныхъ корней по способу Newton'а требуетъ вычисленія значеній, принимаемыхъ функціями

$$f(x),\ f'(x),\ \ldots f^{(n)}(x)$$

при $x=a$. Вычисленіе этихъ результатовъ можетъ быть просто выполнено, пользуясь схемой вычисленій, носящей названіе *алгориема* Horner'а.

Будемъ дѣлить функцію

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n$$

на $x-a$ и обозначимъ частное черезъ

$$\varphi_1(x)=q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\ldots+q_{n-1},$$

гдѣ

$$q_0 \quad = p_0\,,$$

$$q_1 \quad = aq_0 + p_1\,,$$

$$q_2 \quad = aq_1 + p_2\,,$$

$$\cdot \quad \cdot \; \cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$q_{n-1} = aq_{n-2} + p_{n-1}\,,$$

остатокъ же равняется

$$q_n = aq_{n-1} + p_n\,.$$

Послѣдовательное вычисленіе коэффиціентовъ q, и остатка q_n можетъ быть расположено слѣдующимъ образомъ. Составляемъ таблицу, у которой въ первомъ ряду расположены всѣ коэффиціенты заданной функціи въ порядкѣ убывающихъ степеней, причемъ нѣкоторыя изъ этихъ чиселъ могутъ быть нулями; во второмъ ряду таблицы подъ первымъ числомъ p_0 ставимъ то же самое число p_0. Затѣмъ для полученія второго члена этого ряда умножаемъ первый членъ второго ряда на a и складываемъ со вторымъ членомъ перваго ряда; для полученія третьяго члена умножаемъ предыдущій членъ, т. е. q_1, и прибавляемъ третій членъ p_2 перваго ряда, и т. д. продолжаемъ эту операцію до послѣдняго члена q_n. Остатокъ q_n отъ дѣленія $f(x)$ на $x-a$ и будетъ какъ разъ равняться $f(a)$.

p_0	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n
p_0	q_1	q_2	$\dots$	q_{n-1}	q_n
p_0	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-1}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

На основаніи сказаннаго нетрудно получить путемъ подобныхъ же выкладокъ значенія производныхъ $f'(x)$, $f''(x)$, ... разсматриваемой функціи. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы Taylor'а.

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\,,$$

замѣчаемъ, что частное $\varphi_1(x)$ отъ дѣленія $f(x)$ на $x-a$ будетъ

$$\varphi_1(x) = f'(a) + \frac{x-a}{1\,.\,2}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(a)\,;$$

а отсюда мы замѣчаемъ, что $f'(a)$ можно разсматривать, какъ остатокъ отъ дѣленія частнаго $\varphi_1(x)$ на разность $x-a$. Новое частное $\varphi_2(x)$ отъ этого послѣдняго дѣленія будетъ

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{1\,.\,2}f''(a) + \frac{x-a}{3!}f'''(a) + \dots$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что остатокъ отъ дѣленія второго частнаго $\varphi_2(x)$ на $x-a$ будетъ $\frac{1}{1\,.\,2}f''(a)$.

Продолжая послѣдовательное дѣленіе полученныхъ частныхъ, мы будемъ получать остатки

$$\frac{1}{3\,!}f'''(a)\,,\quad \frac{1}{4\,!}f^{\mathrm{IV}}(a)\,,\quad \frac{1}{(n-1)\,!}f^{(n-1)}(a)\,,$$

. . . .

Очевидно, что, вписывая въ нашу таблицу на предыдущей страницѣ третій рядъ чиселъ p_0, r_1, r_2, .. r_{n-1}, которыя также получаются по числамъ второго ряда, какъ числа второго мы получили по числамъ перваго ряда, то значеніе $f'(a)$, которое принимаетъ производная $f'(x)$ при $x=a$, будетъ равно r_{n-1}. Продолжая вписывать въ таблицу дальнѣйшіе ряды чиселъ, будемъ получать значенія производныхъ:

$$\frac{1}{2\,!}f''(a)\,,\quad \frac{1}{3\,!}f'''(a)\,,\ \text{и т. д.}$$

Пусть дана функція

$$f(x)=x^5+2x^4-13x^3-x^2-25x+100\,,$$

причемъ принимается $a=-5$. Составимъ таблицу Horner'а

1	2	—13	— 1	—25	100
1	— 3	2	— 11	30	—50
1	— 8	42	—221	1135	
1	13	107	—756		
1	—18	197			
1	23				

Изъ этой таблицы мы видимъ, что послѣ раздѣленія на $x+5$ получается частное $x^4-3x^3+2x^2-11x+30$ и остатокъ -50. Кромѣ того получается

$$f(-5)=-50\,,\ f'(-5)=1135\,,\ \frac{1}{2}f''(-5)=\ 756\,,\ \frac{1}{6}f'''(-5)=197\,,$$

$$\frac{1}{24}f^{(4)}(-5)=-23\,.$$

Объ отдѣленіи корней.

§ 9

Обращаясь къ задачѣ отдѣленія вещественныхъ корней, мы замѣчаемъ, что она можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ.

Требуется между предѣлами l и L вещественныхъ корней вставить рядъ $m-1$ возрастающихъ вещественныхъ чиселъ

$$l_1, \ l_2, \ l_3, \ \ldots l_{m-1},$$

такимъ образомъ, чтобы въ каждомъ изъ промежутковъ между числами

$$l, \ l_1, \ l_2, \ \ldots l_{m-1}, \ L$$

существовало не болѣе одного вещественнаго корня заданнаго уравненія.

Въ настоящее время задача отдѣленія корней можетъ быть разсматриваема какъ въ значительной мѣрѣ устарѣвшая, ибо существуютъ пріемы приближеннаго вычисленія корней, не требующіе предварительнаго ихъ отдѣленія.

Посвящая, однако, цѣлую главу отдѣленію корней, я имѣлъ главнымъ образомъ въ виду не самую задачу отдѣленія корней, а различные методы и пріемы разсужденія, замѣчательные по ихъ оригинальности, а также рядъ результатовъ, хотя и стоящихъ до нѣкоторой степени отдѣльно другъ отъ друга, но сыгравшихъ извѣстную роль въ исторіи науки.

Теорема. *Если значенія $f(a)$ и $f(b)$ разныхъ знаковъ, то функція $f(x)$ имѣетъ нечетное число корней между a и b. Если же знаки чиселъ $f(a)$ и $f(b)$ одинаковы, то между числами a и b или не существуетъ корней или число ихъ четное.*

Для всякой пары сопряженныхъ комплексныхъ корней $\lambda+\mu i$ и $\lambda-\mu i$ функція $f(x)$ будетъ заключать произведеніе двухъ линейныхъ множителей $(x-\lambda-\mu i)(x-\lambda+\mu i)=(x-\lambda)^2+\mu^2$, которое имѣетъ положительное значеніе при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x. Выдѣляя въ одну цѣлую функцію $F(x)$ всѣ множители, соотвѣтствующіе мнимымъ корнямъ функціи $f(x)$, и обозначая через

$$a_1, \ a_2, \ \ldots a_k$$

вещественные корни функціи $f(x)$, получимъ

$$f(x)=F(x)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k). \tag{1}$$

Функція $F(x)$ будетъ сохранять знакъ плюсъ при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x, если только мы предположимъ положительнымъ коэффиціентъ при высшей степени x въ функціи $f(x)$

Подставляя въ равенство (1) числа a и b, получимъ

$$f(a) = F(a)(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)\ldots(a-\alpha_k),$$

$$f(b) = F(b)(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)\ldots(b-\alpha_k),$$

откуда, раздѣляя, получаемъ

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{F(a)}{F(b)} \cdot \frac{a-\alpha_1}{b-\alpha_1} \cdot \frac{a-\alpha_2}{b-\alpha_2} \cdots \frac{a-\alpha_k}{b-\alpha_k}.$$

Дробь $\frac{F(a)}{F(b)}$ есть число положительное. Разсмотримъ дробь

$$\frac{a-\alpha_i}{b-\alpha_i},$$

гдѣ i одно изъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots k$. Нетрудно видѣть, что эта дробь положительна, если корень α_i лежитъ внѣ промежутка между числами a и b, и отрицательна, если этотъ корень лежитъ внутри указаннаго промежутка.

Итакъ, мы видимъ, что дробь $\frac{f(a)}{f(b)}$ будетъ положительною, если во второй части или не будетъ отрицательныхъ дробей, или же число ихъ будетъ четное, и та же дробь будетъ отрицательна въ случаѣ нахожденія нечетнаго числа корней внутри промежутка (a, b), что и доказываетъ справедливость теоремы.

Теорема. *Если x, возрастая переходитъ черезъ корень α функціи $f(x)$, то выраженіе $\frac{f(x)}{f'(x)}$ переходитъ черезъ нуль всегда отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ.*

Пусть α будетъ k-кратный корень функціи $f(x)$, т. е

$$f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0,\ \ldots f^{(k-1)}(\alpha) = 0,$$

тогда по формулѣ Taylor'а получимъ

(2) $$f(\alpha+h) = \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\alpha) + h^{k+1}A,$$

гдѣ A цѣлая функція отъ h. Примѣняя формулу Taylor'а къ производной $f'(x)$, получимъ

(3) $$f'(\alpha+h) = \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(\alpha) + h^k B,$$

гдѣ B цѣлая функція отъ h. Отсюда

(4) $$\frac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)} = h \cdot \frac{\frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha) + hA}{\frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(\alpha) + hB}$$

второй изъ множителей, стоящихъ въ правой части формулы (4), стремится при приближеніи n' къ нулю къ предѣлу

$$\frac{\frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha)}{\frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(\alpha)},$$

т. е. къ предѣлу

$$\frac{1}{k}.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что при достаточно малыхъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ приращенія h дробь, стоящая въ правой части равенства (4), представляетъ положительное число (ибо ея предѣлъ положительное число). Итакъ, мы видимъ, что знакъ выраженія

(5) $$\frac{f(\alpha+h)}{f'(\alpha+h)}$$

совпадаетъ со знакомъ h при достаточно малыхъ абсолютныхъ значеніяхъ h. Итакъ, въ результатѣ мы видимъ, что, если h переходитъ черезъ нуль отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, то и выраженіе (5) переходитъ черезъ нуль отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, что и требовалось доказать.

Задача отдѣленія корней будетъ просто рѣшена, если въ рядѣ

(6) $$l,\ l_1,\ l_2,\ \ldots\ l_{m-1},\ L$$

будетъ $m=n$ и послѣ подстановки двухъ послѣдовательныхъ чиселъ ряда (6) въ функцію $f(x)$, стоящую въ первой части разсматриваемаго уравненія, получаются результаты разные по знаку. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ въ каждомъ изъ n промежутковъ (n есть степень функціи $f(x)$) должно существовать не менѣе одного корня функціи $f(x)$, а такъ какъ число корней не можетъ быть больше n, то въ каждомъ изъ промежутковъ будетъ заключаться только одинъ корень, и, слѣдовательно, корни функціи $f(x)$ будутъ отдѣлены числами ряда (6).

Способъ Waring'a и Lagrange'a.

§ 10.

Waring и Lagrange указали общій способъ нахожденія ряда чиселъ

(1) $$l_1, l_2, l_3, \ldots l_{m-1},$$

производящаго отдѣленіе корней,—способъ, неоставляющій желать ничего лучшаго съ теоретической точки зрѣнія

Будемъ рядъ (1) предполагать ариѳметическою прогрессіею, крайними членами которой пусть будутъ предѣлы l и L корней. Обозначая разность прогрессіи черезъ h, получимъ рядъ (1) въ видѣ такой прогрессіи

(2) $$l, l+h, l+2h, \ldots l+(m-1)h, L.$$

Остается подобрать положительную разность h столь малою, чтобы въ каждомъ изъ промежутковъ не могло заключаться болѣе одного корня разсматриваемой функціи $f(x)$.

Для этой цѣли составимъ, такъ называемое, *уравненіе въ квадратахъ разностей корней* заданнаго уравненія, т. е. такое уравненіе, корнями котораго будутъ квадраты всевозможныхъ разностей корней заданнаго уравненія

$$(\alpha-\beta)^2, (\alpha-\gamma)^2, (\beta-\gamma)^2, \ldots$$

Число корней новаго уравненія будетъ, очевидно,

$$\mu=\frac{n(n-1)}{2}$$

по числу сочетаній изъ n корней по два.

Предполагая заданное уравненіе въ видѣ

$$x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

а уравненіе въ квадратахъ разностей въ видѣ

$$x^\mu+P_1x^{\mu-1}+\ldots+P_{\mu-1}x+P_\mu=0,$$

мы замѣчаемъ, что коэффиціенты

$$P_1, P_2, \ldots P_{\mu-1}, P_\mu,$$

какъ симметрическія функціи отъ корней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, будутъ выражаться полиномами относительно коэффиціентовъ

$$p_1, p_2, \ldots p_n,$$

причемъ эти полиномы будутъ съ цѣлыми коэффиціентами.

Такъ, напримѣръ, первый коэффиціентъ P_1 вычисляется такъ:

$$P_1 = -\sum(\alpha-\beta)^2.$$

Раскрывая эту сумму, мы замѣчаемъ, что въ нее войдутъ удвоенныя произведенія всевозможныхъ сочетаній корней съ знаками минусъ и сумма квадратовъ корней, причемъ квадратъ каждаго корня повторяется столько разъ, сколько остальныхъ корней, т. е. $n-1$ разъ, и мы получаемъ

$$P_1 = -(n-1)\sum\alpha^2 + 2\sum\alpha\beta.$$

Но $\sum\alpha\beta = p_2$, а по формуламъ Newton'а (см. стр. 282)

$$\sum\alpha^2 = p_1^2 - 2p_2,$$

слѣдовательно, мы получаемъ

$$P_1 = -(n-1)(p_1^2 - 2p_2) + 2p_2 = 2np_2 - (n-1)p_1^2.$$

Слѣдующіе коэффиціенты P_2, P_3, ... вычисляются уже сложнѣе; Lagrange указалъ хорошій пріемъ вычисленія всѣхъ остальныхъ коэффиціентовъ; послѣдній коэффиціентъ P_μ есть не что иное, какъ дискриминантъ уравненія, вычисленіе котораго было уже показано на стр. 306.

Метода Waring'а и Lagrange'а состоитъ въ составленіи уравненія въ квадратахъ разностей и въ нахожденіи нижняго предѣла λ его положительныхъ корней. Нетрудно убѣдиться, что, если мы возьмемъ за разность прогрессіи $\sqrt{\lambda}$, то въ каждомъ изъ промежутковъ между числами (2) не можетъ существовать больше одного корня уравненія, ибо абсолютная величина разности $\alpha-\beta$ любыхъ двухъ корней заданнаго уравненія больше $\sqrt{\lambda}$ (по опредѣленію λ, существуетъ для любого α и β неравенство $\lambda < (\alpha-\beta)^2$, а для вещественныхъ корней α и β корень $(\alpha-\beta)^2$ уравненія въ квадратахъ разностей положителенъ).

Упрощеніе Cauchy.

§ 11.

Практическое неудобство способа Waring'а и Lagrange'а состоитъ въ сложности вычисленій коэффиціентовъ уравненія въ квадратахъ разностей и еще въ томъ, что въ случаѣ малости числа $\sqrt{\lambda}$, число промежутковъ, подлежащихъ изслѣдованію оказывается очень значительнымъ. Эти практическіе недостатки не были устранены и замѣчательной методой, предложен-

мой Lagrange'омъ, для вычисленія коэффиціентовъ уравненія въ квадратахъ разностей.

Cauchy упростилъ задачу, показавъ, что для нахожденія положительнаго числа, меньшаго абсолютной величины разности любыхъ двухъ вещественныхъ корней заданнаго уравненія нѣтъ надобности составлять все уравненіе въ квадратахъ разностей, а достаточно составить только послѣдній коэффиціентъ, т. е. дискриминантъ.

Обозначая черезъ G^2 модуль этого коэффиціента, получимъ

$$G^2 = |(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 \ldots .$$

Введемъ въ разсмотрѣніе верхній предѣлъ ρ модулей корней заданнаго уравненія. Тогда для каждой пары корней получимъ неравенство

(1) $$|(\beta-\gamma)^2| < (2\rho)^2$$

Разсматривая опредѣленную пару α и β вещественныхъ корней заданнаго уравненія и примѣняя ко всѣмъ остальнымъ парамъ неравенство (1), получимъ неравенство

$$G^2 < (\alpha-\beta)^2(2\rho)^{n(n-1)-2},$$

ибо число всѣхъ разностей между корнями, за исключеніемъ разности $\alpha-\beta$, равно

$$\frac{n(n-1)}{2}-1.$$

Итакъ, для всякой разности между двумя вещественными корнями получается неравенство

$$(\alpha-\beta)^2 > \frac{G^2}{(2\rho)^{n(n-1)-2}}.$$

Отсюда мы видимъ, что достаточно взять разность прогрессіи h равною или меньшею числа

$$\frac{G}{(2\rho)^{\frac{n(n-1)-2}{2}}}.$$

Особенно просто разсматривается случай, когда коэффиціенты

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

числа цѣлыя; тогда коэффиціенты $P_1, P_2, \ldots P_\mu$ будутъ также числа цѣлыя, и, слѣдовательно, G^2 будетъ цѣлое число, т. е. оно будетъ не

меньше единицы; и потому въ этомъ случаѣ можно брать разность прогрессіи h непревосходящею числа

$$\frac{1}{(2\rho)^{\frac{n(n-1)}{2}}-1}.$$

Въ этомъ случаѣ, очевидно, нѣтъ надобности вычислять коэффиціентъ P_μ уравненія въ квадратахъ разностей.

Несмотря однако на упрощеніе Cauchy, практическое приложеніе этого способа представляетъ большія неудобства. Математики послѣ Lagrange'а пытались избѣжать разсмотрѣнія уравненія въ квадратахъ разностей, но до открытія Budan'омъ весьма важной теоремы не было получено удобныхъ въ практическомъ отношеніи результатовъ

Теорема Budan'a.

§ 12

Въ 1811 году была сообщена парижской Академіи Наукъ Budan'омъ тоерема, весьма важная по приложеніямъ къ задачѣ объ отдѣленіи корней.

Будемъ разсматривать рядъ функцій

(1) $$f(x),\ f'(x),\ \ldots f^{(n)}(x),$$

гдѣ n степень функціи $f(x)$. Подставимъ въ рядъ (1) вмѣсто x нѣкоторое вещественное число a. Напишемъ рядъ знаковъ (плюсъ или минусъ) численныхъ значеній функцій ряда (1), который будемъ называть рядомъ Budan'a

(2) $$+\,+\,-\,-\,+\,-\ldots$$

Будемъ говорить, что переходъ отъ одного знака ряда (2) къ слѣдующему представляетъ *постоянство* знака, если оба знака одинаковы, и *перемѣну* знака, если эти знаки различны. Число перемѣнъ знака въ ряду (2) будемъ называть *числомъ перемѣнъ знака* ряда Budan'a, соотвѣтствующимъ числу a. Такъ напримѣръ, рядъ

$$+\,-\,-\,+\,+\,-$$

имѣетъ три перемѣны знака, а именно, при переходѣ отъ перваго знака ко второму, отъ третьяго къ четвертому и отъ пятаго къ шестому.

Теорема Budan'a. *При переходѣ отъ вещественнаго числа a къ большему числу β рядъ Budan'a для функціи $f(x)$ теряетъ такое число пе-*

ремѣнъ знака, которое или равно числу вещественныхъ корней функціи $f(x)$ *въ промежуткѣ* (α, β), *или больше этого числа на четное число.*

Измѣненіе числа перемѣнъ знака въ рядѣ Budan'а можетъ происходить только при переходѣ черезъ корень которой-нибудь изъ функцій ряда. Предположимъ, что мы непрерывно увеличиваемъ перемѣнную x отъ α до β и при такомъ увеличеніи переходимъ черезъ корень γ которой-нибудь изъ функціи ряда, напримѣръ, $f^{(\mu)}(x)$. Если этотъ корень γ кратный корень функціи $f^{(\mu)}(x)$, то слѣдующія функціи ряда должны также его имѣть своимъ корнемъ; но, такъ какъ послѣдняя функція ряда Budan'а есть постоянное число отличное отъ нуля, то корень γ не можетъ обратить въ нуль всѣ функціи, слѣдующія за разсматриваемой. Пусть будетъ $f^{(\mu+k)}(x)$ первая функція, слѣдующая за разсматриваемой, не обращающаяся въ нуль при $x=\gamma$. Такимъ образомъ, мы имѣемъ

$$f^{(\mu)}(\gamma)=0, \; \ldots \; f^{(\mu+k-1)}(\gamma)=0, \; f^{(\mu+k)}(\gamma)\gtrless 0.$$

Разсмотримъ два случая.

1-й случай. $f^{(\mu)}(x)$ есть первая функція $f(x)$ ряда Budan'а, т. е. $\mu=0$, и мы имѣемъ

$$f(\gamma)=0, \; f'(\gamma)=0, \; \ldots \; f^{(k-1)}(\gamma)=0, \; f^{(k)}(\gamma)\lesseqgtr 0.$$

Число γ есть k—кратный корень разсматриваемой функціи $f(x)$. Чтобы разсмотрѣть измѣненія въ перемѣнахъ знака ряда, разсмотримъ сначала значенія x, меньшія γ и достаточно близкія къ этому числу, а потомъ значенія x, большія γ и достаточно близкія къ нему. По теоремѣ стр. 343 мы замѣчаемъ, что выраженіе

$$\frac{f^{(\lambda)}(x)}{f^{(\lambda+1)}(x)},$$

гдѣ λ одно изъ чиселъ $0, 1, 2, \ldots k-1$, переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ при переходѣ x отъ значеній меньшихъ γ къ значеніямъ большимъ γ. Такимъ образомъ, мы видимъ, что часть ряда Budan'а

$$f(x), \; f'(x), \; \ldots \; f^{(k)}(x)$$

при значеніяхъ x, близкихъ къ γ и меньшихъ этого числа, представляетъ однѣ перемѣны знака, при значеніяхъ же большихъ γ—одни постоянства знака. Слѣдовательно, при переходѣ черезъ корень γ разсматриваемая часть ряда Budan'а теряетъ k перемѣнъ знака; другими словами, эта часть теряетъ такое число перемѣнъ знака, какова кратность корня γ.

2-й случай. Предположимъ теперь, что μ отлично отъ нуля. Разсмотримъ часть ряда Budan'а, образованную функціями

$$(3)\qquad f^{(\mu-1)}(x),\ f^{(\mu)}(x),\ \ldots\ f^{(\mu+k)}(x),$$

причемъ

$$f^{(\mu-1)}(\gamma)\gtrless 0,\ f^{(\mu)}(\gamma)=0,\ \ldots\ f^{(\mu+k-1)}(\gamma)=0,\ f^{(\mu+k)}(\gamma)\gtrless 0$$

Покажемъ, что рядъ (3) теряетъ всегда четное число перемѣнъ знака. Это число можетъ быть равнымъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, рядъ функцій

$$f^{(\mu)}(x),\ \ldots\ f^{(\mu+k)}(x)$$

теряетъ при переходѣ x черезъ γ равно k перемѣнъ знака, какъ мы это видѣли выше. Разсматривая двѣ первыя функціи

$$f^{(\mu-1)}(x),\ f^{(\mu)}(x)$$

ряда (3), мы замѣчаемъ, что при k четномъ въ этихъ двухъ функціяхъ не происходитъ ни потери, ни пріобрѣтенія перемѣнъ знака; при нечетномъ же k въ этихъ функціяхъ имѣетъ мѣсто или потеря, или пріобрѣтеніе перемѣнъ знака. Въ самомъ дѣлѣ, если k четное, то γ есть корень четной кратности функціи $f^{(\mu)}(x)$, и, слѣдовательно, эта функція не мѣняетъ своего знака при переходѣ черезъ γ; точно также не мѣняетъ своего знака и функція $f^{(\mu-1)}(x)$, ибо она не обращается въ нуль при $x=\gamma$. Съ другой стороны, если k число нечетное, то γ корень нечетной кратности, и, слѣдовательно, при переходѣ черезъ него функція $f^{(\mu)}(x)$ мѣняетъ свой знакъ; функція же $f^{(\mu-1)}(x)$ знака не мѣняетъ, и, слѣдовательно, при переходѣ черезъ γ въ первыхъ двухъ функціяхъ ряда (3) происходитъ или потеря, или пріобрѣтеніе перемѣны знака, такъ что общее число потерянныхъ перемѣнъ знака въ рядѣ (3) при переходѣ черезъ γ будетъ $k\pm 1$, т. е. число четное.

Итакъ, мы видимъ, что теорема Budan'а вполнѣ доказана, ибо общее число перемѣнъ знака ряда Budan'а уменьшится при переходѣ черезъ каждый корень основной функціи $f(x)$ на число, равное кратности этого корня; а общее уменьшеніе числа перемѣнъ знака при измѣненіи x въ предѣлахъ промежутка будетъ равно числу корней основной функціи въ данномъ промежуткѣ плюсъ число потерь перемѣнъ знака, происходящихъ при переходѣ черезъ корни промежуточныхъ функцій ряда Budan'а, а это послѣднее число, какъ мы видѣли, всегда четное.

Слѣдствіе теоремы Budan'a

§ 13.

Изъ теоремы Budan'a легко вывести слѣдующее важное слѣдствіе:

Если число вещественныхъ корней функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (α, β) равняется m, а число потерь перемѣнъ знака въ рядѣ

(1) $$f(x),\ f'(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x)$$

равно $m + 2k$, то уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ по крайней мѣрѣ $2k$ мнимыхъ корней.

Разсмотримъ три промежутка

$$(-\infty, \alpha)\ (\alpha, \beta)\ (\beta, +\infty)$$

Пусть число вещественныхъ корней въ этихъ промежуткахъ будетъ

$$m'\quad m\quad m_1,$$

а пусть число потерь перемѣнъ знака въ этихъ промежуткахъ будетъ

$$m' + 2k'\quad m + 2k\quad m_1 + 2k_1.$$

Тогда число потерь перемѣнъ знака во всемъ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$ будетъ равняться суммѣ

$$m' + m + m_1 + 2(k' + k + k_1);$$

но нетрудно видѣть, что при $x = -\infty$ рядъ Budan'a представляетъ однѣ перемѣны знака, число которыхъ, очевидно, будетъ n, а при $x = +\infty$ знаки всѣхъ функцій Budan'a одинаковы, и, значитъ, въ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$ происходитъ n потерь перемѣнъ знака. Отсюда мы заключаемъ, что

(1) $$n = m' + m + m_1 + 2(k' + k + k_1).$$

Обозначимъ черезъ $2y$ число мнимыхъ корней функціи $f(x)$. Такъ какъ число вещественныхъ корней заданной функціи есть $m' + m + m_1$, то мы получаемъ равенство

(2) $$n = m' + m + m_1 + 2y$$

Сравнивая (2) съ (1), получимъ

$$y = k' + k + k_1.$$

Но, такъ какъ k' и k_1 не отрицательныя числа, то получаемъ неравенство

$$y \geqslant k,$$

т. е. число мнимыхъ корней не меньше $2k$.

Правило знаковъ Descartes'a.

§ 14.

Какъ слѣдствіе теоремы Budan'a получается весьма важная въ практическомъ отношеніи теорема, указанная еще Descartes'омъ.

Теорема. *Число положительныхъ корней функціи $f(x)$ не превосходитъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ коэффиціентовъ функціи $f(x)$ и, если оно меньше, то на число четное.*

Примѣняя формулу Maclaurin'a мы можемъ написать

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

Отсюда мы видимъ, что знаки коэффиціентовъ функціи $f(x)$ не отличаются отъ знаковъ ряда

(1) $$f(0), f'(0), \ldots f^{(n)}(0).$$

Итакъ, число перемѣнъ знака въ коэффиціентахъ функціи $f(x)$ равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ Budan'a для этой функціи при $x = 0$. По теоремѣ Budan'a число положительныхъ корней функціи $f(x)$ можетъ отличаться на четное число отъ числа потерь перемѣнъ знака въ рядѣ $f(x), f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$ при переходѣ x отъ 0 до $+\infty$; но при $x = +\infty$ этотъ рядъ представляетъ одни повторенія знака, слѣдовательно, число положительныхъ корней функціи $f(x)$ будетъ отличаться на четное число отъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ

(2) $$f(0), f'(0), \ldots f^{(n)}(0)$$

Такимъ образомъ справедливость теоремы Descartes'a доказана, ибо знаки ряда (2) совпадаютъ со знаками коэффиціентовъ функціи $f(x)$.

Изъ теоремы Deskartes'a вытекаютъ нѣкоторыя весьма важныя слѣдствія.

Слѣдствіе I. *Число отрицательныхъ корней функціи $f(x)$ на четное число или нуль меньше числа перемѣнъ знака въ функціи $f(-x)$.*

Слѣдствіе II. *Если всѣ корни функціи $f(x) = 0$ вещественны, то число положительныхъ корней точно равно числу перемѣнъ знака въ функ-*

ціи $f(x)$, *а число отрицательныхъ корней равно числу перемѣнъ знака въ функціи* $f(-x)$.

Для доказательства разсмотримъ разности между степенями каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ членовъ полинома $f(x)$ расположеннаго по убывающимъ степенямъ.

Пусть будетъ μ такихъ случаевъ, гдѣ разность степеней *нечетная*, причемъ эти разности пусть будутъ

$$2k_1+1,\ 2k_2+1,\ \ldots 2k_\mu+1.$$

Кромѣ того пусть будетъ ν паръ членовъ *разныхъ знаковъ*, разности степеней которыхъ пусть будутъ числа *четныя*

$$2h_1+2,\ 2h_2+2,\ \ldots 2h_\nu+2;$$

и, наконецъ, пусть будетъ ρ паръ членовъ одинаковаго знака, разности степеней которыхъ пусть будутъ *четныя* числа

$$2g_1,\ 2g_2,\ \ldots 2g_\rho.$$

Разсмотримъ, какое число членовъ будетъ въ заданномъ уравненіи. Такъ какъ число паръ первой категоріи есть μ, второй ν и третьей ρ, то общее число членовъ будетъ, очевидно, на единицу болѣе суммы числа паръ, т. е. будетъ $\mu+\nu+\rho+1$. Разсмотримъ, какое число членовъ не будетъ входить въ уравненіе. Мы замѣчаемъ, что каждая пара членовъ, разность степеней которой есть k, будетъ соотвѣтствовать пропуску $k-1$ членовъ, и, слѣдовательно, общее число пропущенныхъ членовъ будетъ

$$2k_1+2k_2+\ldots+2k_\mu+(2h_1+1)+(2h_2+1)+\ldots+(2h_\nu+1)+$$
$$+(2g_1-1)+(2g_2-1)+\ldots+(2g_\rho-1)=2s+\nu-\rho,$$

гдѣ

$$s=k_1+k_2+\ldots+k_\mu+h_1+\ldots+h_\nu+g_1+\ldots+g_\rho.$$

Итакъ, складывая число $\mu+\nu+\rho+1$ членовъ, входящихъ въ составъ уравненія и $2s+\nu-\rho$, число пропущенныхъ членовъ, мы должны получить общее число членовъ $n+1$ уравненія n-ой степени, т. е.

$$2s+\mu+2\nu+1=n+1,$$

откуда

$$n=2s+\mu+2\nu.$$

Будемъ разсматривать перемѣны знака въ полиномѣ $f(x)$ и обозначимъ ихъ число черезъ V, а черезъ V' число перемѣнъ въ полиномѣ $f(-x)$. Тогда нетрудно показать, чему равно $V+V'$. Въ самомъ дѣлѣ,

пары членовъ одного знака съ четною разностью степеней не даютъ перемѣнъ знака, ни въ составѣ V, ни въ составѣ V'. Каждая пара съ нечетною разностью степеней, если давала повтореніе знака при x, будетъ давать перемѣну знака при $-x$, и обратно. Слѣдовательно, такой парѣ будетъ соотвѣтствовать одна перемѣна знака, входящая или въ V, или въ V'. Число перемѣнъ знака въ суммѣ $V+V'$, введенныхъ такими парами, будетъ, очевидно, μ, и, наконецъ, пара членовъ разныхъ знаковъ съ четною разностью будетъ давать перемѣны, какъ при x, такъ и при $-x$, и, слѣдовательно, каждая такая пара введетъ въ сумму $V+V'$ двѣ единицы. Такимъ образомъ будетъ

$$V+V'=\mu+2\nu.$$

Итакъ, мы получаемъ

(2) $$n=2s+V+V'.$$

Обозначимъ теперь черезъ P число положительныхъ корней заданнаго уравненія, черезъ P' число отрицательныхъ корней, а черезъ $2y$ число мнимыхъ корней. Тогда общее число корней будетъ равняться степени n, т. е.

(3) $$n=P+P'+2y.$$

Сравнивая выраженія (2) и (3), получаемъ

$$2y+P+P'=2s+V+V',$$

или

(4) $$2y=(V-P)+(V'-P')+2s.$$

Если мнимыхъ корней въ уравненіи не существуетъ, то получаемъ равенство

(5) $$0=(V-P)+(V'-P')+2s.$$

Числа $V-P$ и $V'-P'$ не отрицательны, ибо на основаніи теоремы Descartes'а число положительныхъ корней P не превосходитъ числа перемѣнъ знака V въ полиномѣ $f(x)$, а число отрицательныхъ корней P' не превосходитъ числа перемѣнъ знака V' въ полиномѣ $f(-x)$; число же s не отрицательно, ибо оно равно суммѣ чиселъ

$$h_1+\ldots+k_1+\ldots+g_1+\ldots,$$

которыя или нули, или числа положительныя. Слѣдовательно, равенство (5) можетъ быть удовлетворено только положеніемъ

$$P=V,\ P'=V',\ s=0,$$

что и доказываетъ справедливость нашего слѣдствія.

Слѣдствіе III. *Если всѣ корни функціи вещественны, то число корней, заключенныхъ между α и β, гдѣ $\beta > \alpha$, точно равно числу потерь перемѣнъ знака въ рядѣ функцій Budan'a*

$$(6) \qquad f(x)\,,\ f'(x)\,,\ \ldots f^{(n)}(x)$$

при переходѣ отъ α къ β.

Въ самомъ дѣлѣ, число корней уравненія $f(x) = 0$ большихъ α будетъ равняться числу положительныхъ корней уравненія $f(x' + \alpha) = 0$, гдѣ x' новая перемѣнная; но по второму слѣдствію теоремы Descartes'а число положительныхъ корней уравненія $f(x' + \alpha) = 0$ будетъ равно числу перемѣнъ знака въ коэффиціентахъ этого уравненія, а раскрытіе по формулѣ Taylor'а убѣждаетъ насъ, что эти коэффиціенты отличаются только положительными численными множителями отъ величинъ

$$f(\alpha)\,,\ f'(\alpha)\,,\ f''(\alpha)\,,\ \ldots f^{(n)}(\alpha)\,,$$

слѣдовательно, число положительныхъ корней у $f(x' + \alpha)$ будетъ равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ (1) при $x = \alpha$.

Точно такимъ же образомъ число корней функціи $f(x)$ большихъ β будетъ равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ (6) при $x = \beta$. Отсюда, очевидно, и слѣдуетъ, что число корней, заключающихся между α и β, равно числу потерь перемѣнъ знака при переходѣ отъ α къ β.

Простые признаки существованія мнимыхъ корней.

§ 15.

Изъ равенства

$$(1) \qquad 2y = (V - P) + (V' - P') + 2s$$

предыдущаго параграфа можно вывести весьма важное слѣдствіе относительно нижняго предѣла числа мнимыхъ корней уравненія

Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая, что числа $V - P$ и $V' - P'$ не отрицательны, получаемъ изъ равенства (1)

$$y \geqslant s\,.$$

Отсюда видимъ, что, если по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ k_1, $k_2 \ldots$ h_1, h_2, $\ldots g_1$, g_2, $\ldots$ отлично отъ нуля, то s число положительное, и, слѣдовательно, уравненіе навѣрно имѣетъ мнимые корни.

Мы получаемъ такое предложеніе.

Если въ уравненіи имѣется пропускъ одного члена между членами одного знака, или же пропускъ числа членовъ болѣе одного, то уравненіе имѣетъ навѣрно мнимые корни.

Напримѣръ, слѣдующія уравненія

$$x^7 + 3x^5 - 4x^4 + x^3 \quad 2x^2 \quad \cdot x \quad 1 = 0\,,$$

$$x^7 + x^3 - x + 1 = 0\,,$$

$$x^5 - 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0\,,$$

$$x^5 - x^2 + 1 = 0$$

имѣютъ мнимые корни.

Hermite въ бытность его ученикомъ въ лицеѣ Louis le Grand 1842, указалъ на такую теорему: *если четыре послѣдовательныхъ коэффиціента уравненія $f(x) = 0$ представляютъ ариѳметическую прогрессію, то это уравненіе имѣетъ непремѣнно мнимые корни.* Для доказательства достаточно замѣтить, что произведеніе $f(x)(x^2 - 2x + 1)$ будетъ имѣть пропускъ двухъ членовъ.

Теорема Rolle'a.

§ 16.

Теорема. *Между двумя послѣдовательными корнями цѣлой функціи лежитъ по крайней мѣрѣ одинъ корень ея производной.*

Разсмотримъ два послѣдовательныхъ корня a и b функціи $f(x)$, причемъ $b > a$. Предполагая h достаточно малымъ положительнымъ числомъ, мы убѣждаемся въ справедливости двухъ неравенствъ

$$(1) \qquad \frac{f(a+h)}{f'(a+h)} > 0\,, \quad \frac{f(b-h)}{f'(b-h)} < 0\,.$$

Такъ какъ a и b суть два послѣдовательныхъ корня заданной функціи, то между числами $a + h$ и $b - h$ не существуетъ корней функціи $f(x)$, и, слѣдовательно, два результата

$$f(a+h) \text{ и } f(b-h)$$

должны имѣть одинъ и тотъ же знакъ. Но тогда на основаніи неравенствъ (1) выраженія

$$f'(a+h) \text{ и } f'(b-h)$$

должны быть разныхъ знаковъ, и, слѣдовательно, производная $f'(x)$ должна имѣть нечетное число корней въ промежуткѣ между числами

$$a+h \text{ и } b-h,$$

что и требовалось доказать.

Интерполяціонная формула Lagrange'а

§ 17.

Поставимъ себѣ задачею опредѣлить цѣлую функцію $f(x)$ степени n, обращающуюся при $n+1$ частныхъ значеніяхъ

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$$

независимаго перемѣннаго x въ напередъ заданныя численныя значенія

(1) $$f(a_0), f(a_1), f(a_2), \ldots f(a_n).$$

Такъ какъ число коэффиціентовъ функціи $f(x)$ равно $n+1$, то эти коэффиціенты можно будетъ опредѣлить изъ $n+1$ линейныхъ уравненій, получающихся отъ приравниванія числамъ (1) значеній функціи $f(x)$ при $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$.

Нетрудно видѣть, что существуетъ только одна функція $f(x)$, удовлетворяющая требованіямъ задачи, ибо, если были бы возможны двѣ искомыя функціи $f(x)$ и $f_1(x)$, то ихъ разность

$$f(x)-f_1(x)$$

обращалась бы въ нуль для значеній x равныхъ

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$$

и должна была бы тождественно обратиться въ нуль, такъ какъ степень этой функціи n, а число корней $n+1$; значитъ $f(x)$ совпадаетъ съ $f_1(x)$.

Lagrange показалъ простой способъ писать окончательное выраженіе искомой функціи. Введемъ въ разсмотрѣніе слѣдующую функцію степени $n+1$

$$\varphi(x)=(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n),$$

корни которой суть заданныя числа $a_0, a_1, \ldots a_n$. Обозначимъ для сокращенія

$$\varphi_i(x)=\frac{\varphi(x)}{x-a_i},$$

гдѣ i можетъ принимать всѣ значенія ряда $0, 1, 2, \ldots n$. Всѣ функціи $\varphi_i(x)$ суть цѣлыя функціи n-ой степени.

Будемъ искать функцію $f(x)$ въ такомъ видѣ:

$$f(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x), \tag{2}$$

гдѣ

$$A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$$

суть нѣкоторые коэффиціенты, которые надо опредѣлить.

Нетрудно видѣть, что функціи $\varphi_i(x)$ обладаютъ слѣдующими свойствами.

$$\varphi_i(a_k) = 0,$$

при k отличномъ отъ i; это слѣдуетъ изъ того, что фунція $\varphi_i(x)$ имѣетъ корнями всѣ корни функціи $\varphi(x)$ кромѣ a_i.

$$\varphi_i(a_i) = \varphi'(a_i);$$

чтобы показать это, замѣтимъ, что

$$\varphi(x) = (x - a_i)\varphi_i(x),$$

откуда

$$\varphi'(x) = \varphi_i(x) + (x - a_i)\varphi_i'(x):$$

подставляя сюда a_i вмѣсто x, получимъ

$$\varphi'(a_i) = \varphi_i(a_i)$$

Легко видѣть, что $\varphi'(a_i)$ отлично отъ нуля, ибо, согласно опредѣленію функціи $\varphi(x)$, всѣ ея корни простые. Подставляя въ равенство (2) a вмѣсто x, получимъ

$$f(a_i) = A_i\varphi_i(a_i),$$

откуда

$$A_i = \frac{f(a_i)}{\varphi_i(a_i)} = \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)}$$

Отсюда получаемъ окончательное выраженіе для искомой функціи въ видѣ:

$$f(x) = \frac{f(a_0)}{\varphi'(a_0)}\varphi_0(x) + \frac{f(a_1)}{\varphi'(a_1)}\varphi_1(x) + \ldots + \frac{f(a_n)}{\varphi'(a_n)}\varphi_n(x). \tag{3}$$

Послѣдняя формула (3) и есть извѣстная интерполяціонная формула Lagrange'a.

§ 18.

Формулу Lagrange'a (3) можно переписать такъ

$$f(x) = A_0 \frac{\varphi(x)}{x - a_0} + A_1 \frac{\varphi(x)}{x - a_1} + \ldots + A_n \frac{\varphi(x)}{x - a_n},$$

или

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0}{x - a_0} + \frac{A_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

Переписанная въ такомъ видѣ формула Lagrange'a даетъ разложеніе раціональной функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ на простѣйшія дроби и была нами получена на стр. 61.

О функціяхъ съ перемежающимися корнями.

§ 19.

Разсмотримъ функцію $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами, всѣ корни которой

(1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$$

вещественны и различны; пусть кромѣ того имѣютъ мѣсто неравенства

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n$$

Такъ какъ число промежутковъ между корнями (1) есть $n-1$, и кромѣ того у производной, какъ функціи степени $n-1$, число корней есть также $n-1$, то, какъ слѣдствіе теоремы Rolle'a, получится, что всѣ корни

(2) $$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$$

производной должны быть вещественны и должны заключаться по одному въ промежуткахъ между корнями (1); другими словами, между корнями (1) и (2) должны существовать неравенства

(3) $$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 \ldots < \beta_{n-1} < \alpha_n.$$

Неравенства (3) показываютъ, что и обратно въ этомъ случаѣ между каждыми двумя послѣдовательными корнями производной находится корень заданной функціи $f(x)$. Говорятъ, что корни функціи $f(x)$, если они всѣ вещественны, *перемежаются* съ корнями производной. Обобщая это понятіе, мы назовемъ двѣ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ функціями съ перемежаю-

щимися корнями, если всѣ корни этихъ функцій вещественны и между каждыми двумя послѣдовательными корнями одной функціи лежитъ одинъ корень другой функціи.

Очевидно, что функціи съ перемежающимися корнями должны быть или одинаковыхъ степеней, или, какъ въ выше приведенномъ случаѣ, степени ихъ могутъ отличаться на единицу.

Теорема. *Если корни функцій* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *перемежающіеся, то уравненіе*

$$f(x)\varphi'(x)-\varphi(x)f'(x)=0 \tag{4}$$

не имѣетъ вещественныхъ корней

Предположимъ, что степень функціи $f(x)$ не превосходитъ степени $\varphi(x)$, тогда по формулѣ Lagrange'a (см. пред. параграфъ) получимъ

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=C+\sum_i\frac{f(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_i}, \tag{5}$$

гдѣ C постоянная, если степени функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ одинаковы, и нуль, если степень $f(x)$ ниже степени $\varphi(x)$.

Дифференцируя тождество (5) по x, получимъ

$$\frac{\varphi(x)f'(x)-f(x)\varphi'(x)}{\{\varphi(x)\}^2}=-\sum_i\frac{f(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)}\cdot\frac{1}{(x-\alpha_i)^2}. \tag{6}$$

Нетрудно видѣть, что сумма во второй части послѣдняго равенства сохраняетъ свой знакъ при всевозможныхъ значеніяхъ x. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ два послѣдовательныхъ корня

$$\alpha_i \text{ и } \alpha_{i+1}$$

функціи $\varphi(x)$. Такъ какъ корни производной $\varphi'(x)$ перемежаются съ корнями функціи $\varphi(x)$, то числа $\varphi'(\alpha_i)$, и $\varphi'(\alpha_{i+1})$ разныхъ знаковъ. Подобнымъ же образомъ будутъ разныхъ знаковъ числа $f(\alpha_i)$ и $f(\alpha_{i+1})$, ибо перемежаются по условію также корни функціи $f(x)$ съ корнями $\varphi(x)$

Слѣдовательно, дроби

$$\frac{f(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)} \text{ и } \frac{f(\alpha_{i+1})}{\varphi'(\alpha_{i+1})}$$

одного знака, такъ что дроби

$$\frac{f(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)}$$

имѣютъ одинъ знакъ при всевозможныхъ значеніяхъ i.

Формулу (6) можно будетъ написать въ такомъ видѣ

$$\varphi(x)f'(x) \quad \varphi'(x)f(x) = -\sum \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)} \{\varphi_i(x)\}^2;$$

послѣдняя формула показываетъ, что выраженіе

$$\varphi(x)f'(x) \quad \cdot f(x)\varphi'(x)$$

не мѣняетъ своего знака при всевозможныхъ значеніяхъ x. Нетрудно видѣть, что кромѣ того это выраженіе не можетъ обращаться въ нуль ни при какомъ вещественномъ значеніи β числа x. Въ самомъ дѣлѣ, такое обращеніе въ нуль могло бы имѣть мѣсто, если бы β обращала въ нуль сразу всѣ функціи

$$\varphi_1(x) \, . \, \varphi_2(x) \, , \, . \quad . \, \varphi_n(x) \, ,$$

что невозможно

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, слѣдовательно, что уравненіе

$$\varphi(x)f'(x) - f(x)\varphi'(x) = 0$$

не можетъ имѣть вещественныхъ корней.

§ 20.

Приведемъ два примѣра функцій съ перемежающимися корнями

Разсмотримъ, такъ называемые, *полиномы Legendre'а*, играющіе весьма важную роль въ нѣкоторыхъ частяхъ анализа. Назовемъ полиномомъ Legendre'а и обозначимъ его черезъ X_n производную порядка n отъ функціи

$$\varphi(x) = \frac{(x^2-1)^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n\,.\,2^n},$$

т. е. отъ такой цѣлой функціи степени $2n$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\,.\,4\,.\,.\,.\,2n}\Big\{x^{2n} - \frac{n}{1}x^{2n-2} + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,k} x^{2n-2k} + \ldots + \ldots \pm \frac{n}{1}x^2 \mp 1\Big\}.$$

Итакъ, мы видимъ, что выраженіемъ Legendre'овой функціи будетъ

$$X_n = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2\,.\,4\,\ldots\,2n} x^n - \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{(2n-2k)(2n-2k-1)\ldots(n+1-2k)}{2\,.\,4\,\ldots\,2k\,.\,2\,.\,4\,\ldots\,(2n-2k)} x^{n-2k} + \ldots$$

Мы замѣчаемъ, что X_n есть нѣкоторая цѣлая функція отъ x; напримѣръ,

$$X_1 = x, \quad X_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad \ldots$$

Не трудно убѣдиться, прилагая теорему Rolle'я, что всѣ корни Legendre'овой функціи X_n вещественны и различны между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, $\varphi(x)$ имѣетъ всѣ корни вещественные, причемъ этихъ корней два: $+1$ и -1, и каждый изъ нихъ кратности n. На основаніи сказаннаго въ предыдущемъ §-ѣ производная $\varphi'(x)$ будетъ имѣть корни $+1$ и -1 съ кратностями $n-1$ и еще одинъ корень α въ промежуткѣ между $+1$ и -1; для функціи $\varphi''(x)$ кромѣ чиселъ $+1$ и -1 будутъ еще два вещественныхъ корня β_1 и β_2, заключенныхъ въ каждомъ изъ промежутковъ

$$(-1, \alpha), \ (\alpha, 1);$$

$\varphi'''(x)$ будетъ имѣть корни $+1$ и -1 съ кратностями $n-3$ и три новыхъ корня, различныхъ между собою и лежащихъ по одному въ промежуткахъ

$$(-1, \beta_1), \ (\beta_1, \beta_2), \ (\beta_2, 1).$$

Продолжая разсужденіе дальше, мы замѣчаемъ, что производная порядка n отъ $\varphi(x)$, которая представляетъ не что иное, какъ функцію Legendre'a, уже не будетъ имѣть корней равныхъ $+1$ и -1, а будетъ имѣть n различныхъ между собою корней въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$.

Разсмотримъ для примѣра еще функцію

$$V_n = z^n + \frac{1}{z^n},$$

гдѣ

$$x = z + \frac{1}{z}.$$

Нетрудно видѣть, что V_n будетъ полиномомъ степени n отъ x. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая выраженіе xV_{n-1}, получимъ

$$xV_{n-1} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} + z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}} = V_n + V_{n-2};$$

откуда получаемъ такое соотношеніе между тремя функціями V_{n-2}, V_{n-1} и V_n

(1) $$V_n = xV_{n-1} - V_{n-2}.$$

Соотношеніе (1) даетъ возможность вычислять послѣдовательно V_0, V_1, V_2, V_3, ...; получаемъ

$$V_0 = 2\,,\ \ V_1 = x\,,$$

$$V_2 = xV_1 - V_0 = x^2 - 2\,,\ \ V_3 = x^3 - 3x\,.\ .$$

Нетрудно видѣть, что корни двухъ послѣдовательныхъ функцій V_{n-1} и V_n перемежаются. Мы убѣдимся въ справедливости сказаннаго, показавъ, что, если корни двухъ функцій V_{n-2} и V_{n-1} перемежаются, то будутъ перемежаться и корни функцій V_{n-1} и V_n. Подставимъ въ уравненіе (1) два послѣдовательныхъ корня α, β функціи V_{n-1}; тогда результаты подстановокъ чиселъ α и β въ функцію V_{n-2} должны быть разныхъ знаковъ, ибо корни V_{n-2} перемежаются съ корнями V_{n-1}. Но при x, равномъ одному изъ указанныхъ корней, мы имѣемъ изъ равенства (1).

$$V_n = -V_{n-2}\,,$$

значитъ различныхъ знаковъ должны быть результаты постановки α и β въ функцію V_n. Для того, чтобы убѣдиться, что корни V_n и V_{n-1} перемежаются, остается показать, что функція V_n имѣетъ одинъ корень, бо́льшій наибольшаго изъ корней функціи V_{n-1}, и одинъ корень, меньшій наименьшаго изъ корней послѣдней функціи. Такъ какъ старшіе члены функцій V_n и V_{n-2} суть x^n и x^{n-2}, то мы видимъ (см. стр. 47), что знаки функцій V_n и V_{n-2} одинаковы, какъ при $x = +\infty$, такъ и при $x = -\infty$. Примѣняя равенство (1) къ наибольшему корню λ функціи V_{n-1}, мы видимъ, что при $x = \lambda$ функціи V_n и V_{n-2} разныхъ знаковъ. Съ другой стороны функція V_{n-2} не имѣетъ корня большаго λ, слѣдовательно, V_{n-2} не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ $(\lambda, +\infty)$; значитъ, должна мѣнять въ этомъ промежуткѣ свой знакъ функція V_n, и, слѣдовательно, по крайней мѣрѣ одинъ корень функціи V_n долженъ заключаться въ этомъ промежуткѣ. Подобнымъ же образомъ мы покажемъ, что будетъ существовать вещественный корень функціи V_n въ промежуткѣ $(-\infty, \mu)$, гдѣ μ есть меньшій изъ корней функціи V_{n-1}.

Итакъ, мы видимъ, что корни функцій V_n и V_{n-1} перемежаются, что и требовалось доказать.

Перемежаемость корней двухъ рядомъ стоящихъ Legendre'овскихъ функцій зависитъ отъ соотношенія

$$nX_n - (2n - 1)xX_{n-1} + (n-1)X_{n-2} = 0\,.$$

Теорема В. А. Маркова.

§ 21.

Изъ теоремы предыдущаго параграфа вытекаетъ весьма важная теорема, замѣченная В. Марковымъ.

Теорема. *Если корни двухъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ перемежаются, то перемежаются также и корни ихъ производныхъ $f'(x)$ и $\varphi'(x)$.*

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцію

$$(1) \qquad \varphi(x)f'(x) - f(x)\varphi'(x).$$

Пусть будутъ α_1 и α_2 два послѣдовательныхъ корня производной $\varphi'(x)$.

По теоремѣ предыдущаго §-а мы замѣчаемъ, что результаты подстановокъ чиселъ α_1 и α_2 въ выраженіе (1) одного знака. Эти результаты суть, очевидно,

$$\varphi(\alpha_1)f'(\alpha_1) \text{ и } \varphi(\alpha_2)f'(\alpha_2).$$

Но числа $\varphi(\alpha_1)$ и $\varphi(\alpha_2)$ разныхъ знаковъ, слѣдовательно, должны быть разныхъ знаковъ числа $f'(\alpha_1)$ и $f'(\alpha_2)$, т. е. между каждыми двумя послѣдовательными корнями производной $\varphi'(x)$ долженъ лежать вещественный корень производной $f'(x)$

О полиномахъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

§ 22

Совершенно особаго характера вопросы на maxima и minima были поставлены и рѣшены П. Л. Чебышевымъ. Для характеристики этихъ вопросовъ рѣшимъ основную задачу Чебышева о нахожденіи цѣлой функціи степени n со старшимъ коэффиціентомъ, равнымъ единицѣ, при условіи, чтобы эта функція *наименѣе уклонялась отъ нуля* въ данномъ промежуткѣ. Подъ наименьшимъ уклоненіемъ отъ нуля разумѣется требованіе, чтобы былъ *наименьшимъ maximum* абсолютной величины функціи въ данномъ промежуткѣ.

Чебышевъ показалъ, что такая функція для промежутка $(-1, +1)$ есть не что иное, какъ функція

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \, Cos\,(n \, arc \, Cos \, x)$$

Для вычисленія этой функціи (1) можно будетъ поступить такъ. Введемъ уголъ φ при помощи равенства $x = Cos\,\varphi$, тогда мы получимъ

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \, Cos\, n\varphi$$

Значитъ, функція Чебышева есть не что иное, какъ та цѣлая функція степени n, при помощи которой косинусъ кратной дуги $Cos\,n\varphi$ выра-

жается черезъ косинусъ простой дуги $Cos\,\varphi$. Покажемъ, что старшій коэффиціентъ функціи $Cos\,(n\,arc\,Cos\,x)$ есть 2^{n-1}. Въ самомъ дѣлѣ,

$$Cos\,\varphi + i\,Sin\,\varphi = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$Cos\,\varphi - i\,Sin\,\varphi = x - \sqrt{x^2 - 1}\,,$$

откуда

$$Cos\,n\varphi + i\,Sin\,n\varphi = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$$

$$Cos\,n\varphi - i\,Sin\,n\varphi = (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\,.$$

Слѣдовательно

$$Cos\,n\varphi = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots$$

Раздѣляя обѣ части уравненія на x^n, получимъ

$$p_0 + \frac{p_1}{x} + \ldots = \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n}{2}\,.$$

Полагая $x = \infty$, получимъ

$$p_0 = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}\,.$$

Итакъ, старшій коэффиціентъ функціи (1) равенъ единицѣ

Докажемъ теперь, слѣдуя академику А. Маркову, что функція (1) есть наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ $(-1\,, +1)$. Допустимъ, что въ этомъ промежуткѣ другая функція $\psi(x)$ менѣе уклоняется отъ нуля. Мы замѣчаемъ, что функція (1) уклоняется отъ нуля на величину $\frac{1}{2^{n-1}}$, такъ какъ наибольшая абсолютная величина функціи $cos\,(n\,arc\,cos\,x)$ есть 1; это уклоненіе происходитъ при значеніяхъ

$$\varphi = 0\,, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi\,,$$

т. е. когда x принимаетъ значенія

(2) $\quad x_0 = 0\,,\ x_1 = cos\frac{\pi}{n}\,,\ x_2 = cos\frac{2\pi}{n}\,,\ \ldots\ x_{n-1} = cos\frac{n-1}{n}\pi\,,\ x_n = -1\,.$

Такъ какъ значенія функціи $f(x)$ при значеніяхъ (2) перемѣннаго независимаго будутъ

$$\frac{1}{2^{n-1}}, -\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}},$$

то, слѣдовательно, если функція $\psi(x)$ уклоняется отъ нуля менѣе чѣмъ Чебышевская функція, то будутъ существовать неравенства

$$f(x_0) - \psi(x_0) > 0\,,\ f(x_1) - \psi(x_1) < 0\,,\ f(x_2) - \psi(x_0) > 0\,, \ldots$$

Итакъ, разность

$$f(x) - \psi(x)$$

будетъ имѣть по крайней мѣрѣ одинъ корень въ каждомъ промежуткѣ

$$(x_0 x_1)\,,\ (x_1 x_2)\,, \ldots (x_{n-1} x_n)\,,$$

что невозможно, ибо разность $f(x) - \psi(x)$ степени $n-1$, такъ какъ обѣ функціи $f(x)$ и $\psi(x)$ имѣютъ старшій коэффиціентъ равный единицѣ. Итакъ, функція Чебышева (1) есть, дѣйствительно, функція наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, +1)$, изъ всѣхъ цѣлыхъ функцій степени n, имѣющихъ старшимъ коэффиціентомъ 1.

Очень элегантный способъ доказательства данъ также В. Млодзѣевскимъ [1]).

§ 23

Чебышевымъ и его учениками былъ подвергнутъ изученію вопросъ о наименѣе уклоняющихся отъ нуля полиномахъ вида

$$x^n - \sigma x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

гдѣ σ данное число.

Случай $\sigma = 0$ былъ разобранъ впервые самимъ Чебышевымъ въ мемуарѣ „Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes" [2]).

Изученію случая σ отличнаго отъ нуля посвященъ замѣчательный мемуаръ Е. И. Золотарева [3]) „Приложеніе эллиптическихъ функцій къ вопросамъ о функціяхъ, наименѣе и наиболѣе отклоняющихся отъ нуля".

Въ сочиненіи „О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ" Спб. 1892. покойный В. А. Марковъ рѣшаетъ вопросъ для полиномовъ

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n,$$

---

[1]) Б. Млодзѣевскій. Математическій Сборникъ XXIX: 1 Москва.

[2]) Сочиненія II, 1 стр. 111—143

[3]) Приложенія къ XXX тому Записки Академіи Наукъ за 1877 г.

коэффиціенты которыхъ связаны соотношеніемъ

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = \alpha .$$

Указанное сочиненіе В. А. Маркова было его студенческимъ сочиненіемъ. Оно замѣчательно цѣлымъ рядомъ результатовъ важнаго значенія. Между прочимъ, въ этомъ сочиненіи указана теорема приведенная нами въ § 21.

Въ послѣднее время А. П. Пшеборскій[1]) обобщилъ изслѣдованія В. А. Маркова на случай двухъ соотношеній

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = \alpha$$

$$\beta_0 p_0 + \beta_1 p_1 + \ldots + \beta_n p_n = \beta .$$

Въ послѣднее время вопросы Чебышева послужили исходной точкой для теоріи рядовъ, расположенныхъ по полиномамъ, теоріи, связанной съ именемъ Weierstrass'a. Въ этой теоріи обратили на себя вниманіе изслѣдованія выдающагося современнаго математика Сергѣя Бернштейна. Хотя эти изслѣдованія относятся болѣе къ анализу безконечно малыхъ, чѣмъ къ алгебрѣ, тѣмъ не менѣе, я считаю необходимымъ сказать о нихъ нѣсколько словъ по стольку, по скольку эти изслѣдованія относятся къ полиномамъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля. С. Бернштейнъ[2]) вводитъ опредѣленіе:

Полиномъ

$$P(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \ldots + A_n x^{\alpha_n}$$

называется осцилирующимъ въ промежуткѣ (0, 1) *относительно не отрицательныхъ показателей*

$$\alpha_0 < \alpha_1, < \ldots < \alpha_n ,$$

если его абсолютная величина достигаетъ своего наибольшаго значенія $n+1$ *разъ въ промежуткѣ.*

Число n Бернштейнъ называетъ порядкомъ осцилирующаго полинома.

Оказывается, что, если мы зададимъ численное значеніе одного изъ коэффиціентовъ A_i другіе же коэффиціенты будемъ мѣнять, то осцилирующій полиномъ будетъ наименѣе уклоняться отъ нуля, чѣмъ всѣ остальные такого же вида.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, $P(x)$ и $Q(x)$ будутъ полиномы съ тѣми же показателями α_i (того же порядка), имѣющіе одинаковый коэффиціентъ A_i,

---

[1]) Пшеборскій. О нѣкоторыхъ полиномахъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ. Сообщенія Харьк. Мат. Общ. Сер. 2. Т. XIV.

[2]) S Bernstein. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degres donnés. Acta Mathematica t. 37.

причемъ полиномъ $P(x)$ осцилирующій, а полиномъ $Q(x)$ произвольный. Допустимъ, что абсолютная величина $Q(x)$ не превосходитъ абсолютной величины $P(x)$ въ промежуткѣ $(0, 1)$. Тогда для значеній

$$x_0, x_1, \ldots x_n,$$

дающихъ maximum абсолютной величины $P(x)$, получимъ

$$(-1)^{k+\rho}[P(x_k) - Q(x_k)] \geqslant 0,$$

гдѣ ρ есть 0 или 1.

Уравненіе

$$P(x) - Q(x) = 0$$

должно имѣть, слѣдовательно, n корней; что невозможно, ибо въ разности $P(x) - Q(x)$ пропадаетъ членъ съ коэффиціентомъ A_i, такъ что эта разность должна заключать только n членовъ; поэтому число перемѣнъ знаковъ коэффиціентовъ не можетъ быть больше $n-1$, а, слѣдовательно, по теоремѣ Descartes'а не можетъ быть больше чѣмъ $n-1$ положительныхъ корней.

Бернштейнъ заявляетъ, что ему извѣстенъ видъ осцилирующихъ полиномовъ только для того случая, когда показатели $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ образуютъ ариѳметическую прогрессію и ставитъ новую задачу нахожденія этихъ полиномовъ для другихъ случаевъ. Мы считаемъ, что задача Бернштейна имѣетъ свой интересъ.

Метода Fourier.

§ 24.

Здѣсь мы изложимъ методу отдѣленія корней, указанную Fourier и основанную на приложеніи теоремы Budan'а. Хотя эта метода не рѣшаетъ вполнѣ съ теоретической точки зрѣнія задачи объ отдѣленіи корней, но на практикѣ въ большинствѣ случаевъ даетъ простой способъ рѣшить эту задачу.

Историческая роль методы Fourier состоитъ въ томъ, что несомнѣнно, изучая её, Sturm, ученикъ Fourier, былъ приведенъ къ открытію его знаменитой теоремы, которая будетъ предметомъ слѣдующей главы.

Въ основаніи методы Fourier лежатъ слѣдующія предложенія.

Лемма. *При измѣненіи x въ промежуткѣ, не заключающемъ корня производной $f'(x)$, функція*

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

возрастаетъ, если $f(x)$ и $f''(x)$ одного знака, и убываетъ, если эти функціи различныхъ знаковъ.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая

$$x-\frac{f(x)}{f'(x)}=\varphi(x),$$

получимъ

$$\varphi'(x)=1-\frac{\{f'(x)\}^2-f(x)f''(x)}{\{f'(x)\}^2}=\frac{f(x)f''(x)}{\{f'(x)\}^2};$$

отсюда мы замѣчаемъ, что производная $\varphi'(x)$ остается положительною, если $f(x)f''(x)>0$, т. е. $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковыхъ знаковъ, и отрицательна, если $f(x)$ и $f''(x)$ разныхъ знаковъ; отсюда и слѣдуетъ справедливость леммы.

Теорема I. *Если функція $f(x)$ имѣетъ два вещественныхъ корня въ промежуткѣ (a, b), первая производная $f'(x)$ имѣетъ одинъ корень въ этомъ промежуткѣ, а вторая производная $f''(x)$ въ этомъ промежуткѣ не имѣетъ корней, то должно имѣть мѣсто неравенство*

$$\frac{f(b)}{f'(b)}-\frac{f(a)}{f'(a)}<b-a,$$

причемъ предполагается $b>a$.

Обозначимъ черезъ x_1 и x_2 корни функціи $f(x)$ и предположимъ, что $x_2>x_1$. Между этими корнями лежитъ корень x_0 производной $f'(x)$.

Разсмотримъ двѣ функціи

(1) $$\frac{f(x)}{f'(x)}$$

и

(2) $$\frac{f'(x)}{f''(x)}.$$

Функція (1) не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ (a, x_1), ибо въ этомъ промежуткѣ нѣтъ корней ни у числителя, ни у знаменателя. Подобнымъ же образомъ функція (2) не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ (a, x_0). Нетрудно убѣдиться, что знаки обѣихъ функцій (1) и (2) въ промежуткѣ (a, x_1) одинаковы; въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы стр. 343, обѣ дроби (1) и (2) отрицательны: первая для значеній x, близкихъ къ x_1 и меньшихъ этого числа, вторая для значеній x, близкихъ къ x_0 и меньшихъ его. Такимъ образомъ, обѣ дроби (1) и (2) отрицательны во всемъ промежуткѣ (a, x_1). Произведеніе ихъ

$$\frac{f(x)}{f''(x)}$$

оказывается числомъ положительнымъ въ промежуткѣ (a, x_1), т. е. въ этомъ промежуткѣ функціи $f(x)$ и $f''(x)$ одного знака, такъ что для этого промежутка функція

(3) $$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

есть функція возрастающая, и мы имѣемъ неравенство

(4) $$\varphi(a) < \varphi(x_1)$$

Аналогично можетъ быть трактованъ промежутокъ (x_2, b); въ самомъ дѣлѣ, обѣ дроби (1) и (2) положительны въ этомъ промежуткѣ, такъ какъ, съ одной стороны, онѣ не мѣняютъ знака: первая въ промежуткѣ (x_2, b), вторая въ промежуткѣ (x_0, b); съ другой стороны, по теоремѣ стр. 343, значенія ихъ въ этихъ промежуткахъ должны быть положительными. Итакъ, будетъ положительнымъ въ промежуткѣ (x_2, b) ихъ произведеніе

$$\frac{f(x)}{f''(x)}.$$

Значитъ, въ этомъ промежуткѣ будетъ возрастать функція (3), и мы получаемъ неравенство

(5) $$\varphi(x_2) < \varphi(b).$$

Но x_1 и x_2 суть корни функціи $f(x)$; слѣдовательно, по равенству (3) мы получимъ

$$\varphi(x_1) = x_1,$$

$$\varphi(x_2) = x_2;$$

отсюда неравенства (4) и (5) получаютъ видъ

$$\varphi(a) < x_1, \quad x_2 < \varphi(b)$$

Но $x_2 > x_1$, слѣдовательно, подавно

$$\varphi(a) < \varphi(b),$$

то есть

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

или окончательно

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a,$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. *Если въ промежуткѣ (a, b) функція $f(x)$ не имѣетъ вещественныхъ корней, первая же производная имѣетъ одинъ корень, а вторая производная не имѣетъ корня, причемъ знакъ этой второй производной совпадаетъ со знакомъ самой функціи въ этомъ промежуткѣ, и если имѣетъ мѣсто неравенство*

$$\frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a,$$

то уменьшеніемъ промежутка всегда можно будетъ достигнуть того, что для новаго промежутка (a_1, b_1) будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{f(b_1)}{f'(b_1)} - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} \geqslant b_1 - a_1.$$

Обозначимъ черезъ x_0 корень первой производной. Такъ какъ $f(x)$ и $f''(x)$ одного знака во всемъ промежуткѣ, то функція

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

будетъ возрастающая въ разсматриваемъ промежуткѣ (a, b).

Разсмотримъ промежутокъ (a, b_1) и будемъ давать числу b_1 убывающія численныя значенія, начиная отъ числа b, и неопредѣлено приближающіяся къ корню x_0. Тогда функція

$$\varphi(b_1) - \varphi(a)$$

будетъ убывающая, ибо будетъ убывать первый членъ $\varphi(b_1)$. Если было положительнымъ первоначальное значеніе нашей разности

$$\varphi(b) - \varphi(a),$$

то это значеніе должно будетъ, убывая, приближаться къ $-\infty$, ибо число x_0, къ которому приближается число b_1, есть корень знаменателя въ выраженіи функціи $\varphi(x)$, и, слѣдовательно, мы дойдемъ до такого значенія b_1, при которомъ будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\varphi(b_1) - \varphi(a) \leqslant 0,$$

то есть

$$\frac{f(b_1)}{f'(b_1)} - \frac{f(a)}{f'(a)} \geqslant b_1 - a,$$

что и требовалось доказать.

Можно было бы оставить верхній предѣлъ b промежутка (a, b) безъ перемѣны, а увеличивать нижній предѣлъ a, причемъ, разсматривая воз-

растающую функцію $\varphi(x)-\varphi(b)$, можно было бы взять за нижній предѣлъ числа a_1, настолько близкое къ корню x_0, чтобы было

$$\frac{f(b)}{f'(b)}-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)} \geqslant b-a_1 .$$

§ 25.

Обращаясь къ приложенію теоремы Budan'a къ отдѣленію корней, введемъ понятіе о, такъ называемыхъ, указателяхъ функцій ряда Budan'a. Будемъ называть *указателемъ функціи* $f^{(\mu)}(x)$ на промежуткѣ (α, β) число потерь перемѣнъ знака въ рядѣ

$$f^{(\mu)}(x),\ f^{(\mu+1)}(x),\ \ldots f^{(n)}(x),$$

соотвѣтствующее промежутку (α, β), и будемъ обозначать его Δ_μ; тогда всякому промежутку будетъ сооотвѣтствовать рядъ указателей

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \ldots \Delta_n .$$

За Δ_n можно принять число нуль.

Очевидно, что два рядомъ стоящіе указателя могутъ отличаться не болѣе, чѣмъ на 1, такъ что можетъ быть одно изъ трехъ

$$\Delta_{\mu+1}=\Delta_\mu,\ \Delta_{\mu+1}=\Delta_\mu+1,$$

$$\Delta_{\mu+1}=\Delta_\mu-1 .$$

Если первый указатель $\Delta_0=0$, то по теоремѣ Budan'a не существуетъ корней заданной функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (α, β). Когда $\Delta_0=1$, то по той же теоремѣ долженъ существовать непремѣнно одинъ простой корень, который такимъ образомъ оказывается отдѣленнымъ числами α и β. Все, очевидно, сводится къ указанію правилъ, какъ надо разсуждать въ случаѣ $\Delta_0\geqslant 2$.

Разсмотримъ первый слѣва указатель, равный единицѣ; существованіе такого указателя очевидно изъ того соображенія, что первый указатель не меньше числа 2 (ибо мы разсматриваемъ случай $\Delta\geqslant 2$), а послѣдній равенъ нулю, два же рядомъ стоящихъ не могутъ отличаться больше, чѣмъ на единицу. Итакъ допустимъ, что $\Delta_\mu=1$.

Метода Fourier состоитъ въ томъ, что показывается, что уменьшеніемъ промежутковъ можно первый, равный единицѣ, указатель передвинуть влѣво, т. е., другими словами, уменьшить значеніе μ. Такимъ образомъ въ концѣ концовъ можно указатель, равный единицѣ, помѣстить на первое мѣсто, или же достигнуть того, чтобы первый указатель былъ равенъ нулю.

Разсмотримъ предыдущій указатель $\Delta_{\mu-1}$. Очевидно, что этотъ указатель долженъ равняться числу 2, ибо, если бы онъ равнялся единицѣ, то Δ_μ не былъ бы первымъ, равнымъ единицѣ указателемъ. Если же $\Delta_{\mu-1} = 0$, то передъ указателемъ $\Delta_{\mu-1}$ долженъ бы существовать указатель, равный единицѣ, ибо первый указатель не меньше 2. Будемъ разсматривать слѣдующій указатель $\Delta_{\mu+1}$. Сближая предѣлы α и β, можно достигнуть того, чтобы указатель $\Delta_{\mu+1}$ сдѣлать равнымъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, равенство

$$\Delta_\mu = 1$$

показываетъ по теоремѣ Budan'a, что $f^{(\mu)}(x)$ имѣетъ одинъ только корень, причемъ этотъ корень простой; слѣдовательно, указывая два числа α_1 и β_1, достаточно близкія съ двухъ сторонъ къ этому корню, можно достигнуть того, что въ промежуткѣ (α_1, β_1) не будетъ корней производной $f^{(\mu+1)}(x)$.

Итакъ, для промежутка (α_1, β_1) указатель $\Delta_{\mu+1}$ можетъ быть или нуль, или два; но, такъ какъ функція $f^{(\mu+1)}(x)$ въ промежуткѣ (α_1, β_1) не мѣняетъ своего знака, функція же $f^{(\mu)}(x)$ мѣняетъ свой знакъ, проходя черезъ единственный свой корень, то рядъ функцій

$$f^{(\mu)}(x),\ f^{(\mu+1)}(x)$$

представляетъ перемѣну знака до корня функціи $f^{(\mu)}(x)$ и повтореніе знака послѣ этого корня. Другими словами, въ этой парѣ функцій происходитъ потеря одной перемѣны знака при переходѣ отъ α_1 къ β_1, значитъ, указатель функціи $f^{(\mu)}(x)$ долженъ быть на единицу больше указателя функціи $f^{(\mu+1)}(x)$, и, слѣдовательно, для промежутка (α_1, β_1) имѣетъ мѣсто слѣдующій рядъ указателей

$$\Delta_{\mu-1} = 2,\ \Delta_\mu = 1,\ \Delta_{\mu+1} = 0.$$

Что касается двухъ другихъ промежутковъ (α, α_1) и (β_1, β), которые остаются отъ промежутка (α, β) послѣ выдѣленія, то, очевидно, что въ этихъ двухъ промежуткахъ будетъ $\Delta_\mu = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, въ этихъ промежуткахъ нѣтъ корней функціи $f^{(\mu)}(x)$, ибо эта функція имѣетъ единственный корень въ среднемъ промежуткѣ (α_1, β_1). По теоремѣ Budan'a указатель функціи въ каждомъ изъ двухъ послѣднихъ промежутковъ долженъ или равняться нулю, или быть больше нуля на число четное; съ другой стороны указатель Δ_μ на всемъ промежуткѣ (α, β) равенъ суммѣ указателей (что слѣдуетъ изъ опредѣленія), соотвѣтствующихъ тремъ частямъ промежутка; а такъ какъ указатель равенъ единицѣ для всего промежутка и для средней его части, то онъ долженъ, очевидно, равняться нулю для каждой изъ двухъ крайнихъ частей, и, слѣдовательно,

для каждой изъ двухъ этихъ крайнихъ частей первый указатель, равный единицѣ, будетъ лѣвѣе отъ указателя Δ_μ.

Итакъ, весь вопросъ, слѣдовательно, сводится къ разсмотрѣнію случая

$$\Delta_{\mu-1}=2\,,\ \Delta_\mu=1\,,\ \Delta_{\mu+1}=0\,.$$

Въ этомъ случаѣ мы видимъ, что функція $f^{(\mu+1)}(x)$, которая есть не что иное, какъ вторая производная функціи $f^{(\mu-1)}(x)$, не имѣетъ корня въ разсматриваемомъ промежуткѣ. Предыдущая функція $f^{(\mu)}(x)$, (первая производная отъ $f^{(\mu-1)}(x)$) имѣетъ одинъ корень; функція же $f^{(\mu-1)}(x)$ должна имѣть или два корня, или ни одного (теорема Budan'a). Называя черезъ α и β границы нашего промежутка, мы видимъ, что, если

$$\frac{f^{(\mu-1)}(\beta)}{f^{(\mu)}(\beta)}-\frac{f^{(\mu-1)}(\alpha)}{f^{(\mu)}(\alpha)}\geqslant\beta-\alpha\,,$$

то функція $f^{(\mu-1)}(x)$ не имѣетъ корня въ данномъ промежуткѣ; это слѣдуетъ изъ приведенныхъ раньше теоремъ. Въ этомъ случаѣ функція $f^{(\mu-1)}(x)$ не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ $(\alpha\,,\,\beta)$

Такъ какъ въ теоремѣ Budan'a существенную роль играетъ не то обстоятельство, что послѣдняя функція не мѣняетъ своего знака въ данномъ промежуткѣ, то, изслѣдуя промежутокъ, можно прилагать теорему Budan'a къ ряду функцій.

$$f(x)\,,\ f'(x)\,,\ \ldots\ f^{(\mu-1)}(x)\,,$$

остановленному на функціи, не мѣняющей своего знака въ промежуткѣ. Слѣдовательно, разсматривая указатели послѣдняго ряда, можно будетъ послѣдній указатель считать равнымъ нулю. Очевидно, что рядъ новыхъ указателей

$$\Delta_0\,,\ \Delta_1\,,\ \ldots\,\Delta_{\mu-1}$$

будетъ представлять числа на двѣ единицы меньше прежнихъ, ибо послѣднее число будетъ 0, вмѣсто числа 2.

Итакъ, въ новомъ рядѣ указателей указатель, равный единицѣ, будетъ стоять налѣво отъ указателя $\Delta_{\mu-1}$. Если же будетъ

$$\frac{f^{(\mu-1)}(\beta)}{f^{(\mu)}(\beta)}-\frac{f^{(\mu-1)}(\alpha)}{f^{(\mu)}(\alpha)}<\beta-\alpha\,,$$

то нельзя сказать ничего опредѣленнаго объ этомъ промежуткѣ; придется этотъ промежутокъ уменьшить введеніемъ произвольныхъ промежуточныхъ чиселъ. Продолжая такое дѣленіе, мы обыкновенно приходимъ къ про-

межуткамъ, относительно которыхъ можно высказать опредѣленное сужденіе: или, въ случаѣ неравенства

$$\frac{f^{(\mu-1)}(\beta)}{f^{(\mu)}(\beta)} - \frac{f^{(\mu-1)}(\alpha)}{f^{(\mu)}(\alpha)} \geqslant \beta - \alpha ,$$

въ промежуткѣ не будетъ существовать вещественныхъ корней, или же будетъ заключаться одинъ корень функціи $f^{(\mu-1)}(x)$, который такимъ образомъ оказывается отдѣленнымъ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ указатель $\Delta_{\mu-1}$ промежутка съ отдѣленнымъ корнемъ долженъ, очевидно, равняться единицѣ, ибо во всемъ первоначальномъ промежуткѣ этотъ указатель равнялся числу 2 и, слѣдовательно, въ новомъ промежуткѣ указатель не можетъ быть больше числа 2. Итакъ, мы видимъ, что въ этомъ случаѣ $\Delta_{\mu-1} = 1$, т. е. указатель, равный единицѣ, передвинутъ на одно мѣсто влѣво.

Продолжая такимъ образомъ послѣдовательное перемѣщеніе налѣво указателя, равнаго единицѣ, мы достигнемъ того, что этотъ указатель помѣстится на первое мѣсто, т. е. будетъ $\Delta_0 = 1$; тогда въ соотвѣтственномъ промежуткѣ будетъ существовать одинъ только корень заданной функціи $f(x)$, который такимъ образомъ и будетъ отдѣленъ.

Можетъ случиться, что для нѣкоторыхъ изъ разсматриваемыхъ промежутковъ будетъ $\Delta_0 = 0$; тогда въ этихъ промежуткахъ не будетъ корней у заданной функціи.

§ 26.

Изложенный способъ Fourier отдѣленія корней, какъ мы видимъ, заключаетъ слабый пунктъ, а именно, можетъ случиться, что при разсмотрѣніи трехъ указателей

$$\Delta_{\mu-1} = 2, \ \Delta_\mu = 1, \ \Delta_{\mu+1} = 0$$

эти числа будутъ оставаться для соотвѣтственныхъ промежутковъ, какъ бы далеко мы ни производили разбитія промежутка на меньшія.

Такой случай будетъ имѣть мѣсто, когда въ промежуткѣ (α, β) функція $f^{(\mu-1)}(x)$ будетъ имѣть двукратный корень x_0, который, слѣдовательно, будетъ простымъ корнемъ функціи $f^{(\mu)}(x)$, причемъ кромѣ x_0 три функціи

$$f^{(\mu-1)}(x), \ f^{(\mu)}(x), \ f^{(\mu+1)}(x)$$

не имѣютъ другихъ корней (функція $f^{(\mu+1)}(x)$ при этомъ предположеніи, очевидно, совсѣмъ не имѣетъ корней въ этомъ промежуткѣ). Очевидно, что какъ бы ни уменьшали промежутокъ, замѣняя его новыми (α_1, β_1), заключающими корень x_0, въ этомъ промежуткѣ будутъ заключаться два

корня равныхъ x_0 функціи $f^{(\mu-1)}(x)$, одинъ корень у функціи $f^{(\mu)}(x)$ и ни одного корня у функціи $f^{(\mu+1)}(x)$; слѣдовательно, для всѣхъ такихъ промежутковъ числа

$$\Delta_{\mu-1}\,,\ \Delta_{\mu}\,,\ \Delta_{\mu+1}$$

останутся равными 2, 1, 0. Въ этомъ случаѣ, какъ бы далеко ни производить уменьшенія промежутка, нельзя достигнуть перемѣщенія налѣво указателя, равнаго единицѣ; но въ такомъ, особенно неблагопріятномъ, случаѣ всегда можно убѣдиться въ существованіи кратнаго корня функціи $f^{(\mu-1)}(x)$ пріемами нахожденія кратныхъ корней, указанными на стр. 42. и слѣд., или же въ крайнемъ случаѣ трактовать такой неудобный для разсмотрѣнія случай при помощи теоремы Sturm'a (стр. 385).

§ 27.

Покажемъ, какъ поступать въ томъ случаѣ, если при подстановкѣ нѣкотораго числа a въ рядъ функцій

$$f(x)\,,\ f'(x)\,,\ \ldots f^{(n)}(x)$$

нѣсколько функцій подрядъ обращаются въ нуль; пусть эти функціи будутъ

$$f^{(\mu)}(x)\,,\ f^{(\mu+1)}(x)\,,\ \ldots f^{(\mu+k-1)}(x)\,.$$

Разсмотримъ еще слѣдующую функцію $f^{(\mu+k)}(x)$, не обращающуюся въ нуль при $x=a$. Очевидно, что придется брать вмѣсто числа a два числа $a+h$ и $a-h$, достаточно близкія къ a по обѣ стороны $(h>0)$. При этомъ, если a есть нижняя граница промежутка, то число a замѣнять числомъ $a+h$, и числомъ $a-h$ въ случаѣ верхней границы; h можно выбрать настолько малымъ, что не будетъ равно нулю ни одно изъ чиселъ

(1) $\quad f^{(\mu)}(a+h)\,,\ f^{(\mu+1)}(a+h)\,,\ \ldots f^{(\mu+k-1)}(a+h)\,,\ f^{(\mu+k)}(a+h)\,,$

и

(2) $\quad f^{(\mu)}(a-h)\,,\ f^{(\mu+1)}(a-h)\,,\ \ldots f^{(\mu+k-1)}(a-h)\,,\ f^{(\mu+k)}(a-h)\,.$

Но мы уже знаемъ, что первый рядъ долженъ представлять одни повторенія знака, второй же рядъ однѣ перемѣны знака; слѣдовательно, по знаку послѣдней функціи $f^{(\mu+k)}(x)$ можно будетъ опредѣлить знакъ всѣхъ остальныхъ. Пусть будетъ написанъ рядъ знаковъ при $x=a$, причемъ вмѣсто соотвѣтственнаго знака написано число нуль для всѣхъ тѣхъ функцій, которыя обращаются въ нуль при $x=a$; тогда, если условимся надъ цыфрою нуль писать тотъ знакъ, который соотвѣтственная функція получаетъ при $a+h$, а подъ цыфрою нуль знакъ, соотвѣтству-

юнцій $a-h$, то легко указать на основаніи сказаннаго всѣ, какъ верхніе, такъ и нижніе знаки. Напримѣръ, если имѣется рядъ знаковъ

$$-+00--0000+,$$

то получимъ, напримѣръ, такой рядъ знаковъ

$$\begin{array}{cccccccccccc} a+h & & & - & - & & & + & + & + & + & \\ a & - & + & 0 & 0 & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ a-h & & & & + & & & + & & + & & \end{array}$$

Указанное правило носитъ названіе *правила двойного знака.*

§ 29.

Разсмотримъ теперь численные примѣры и будемъ примѣнять способъ Fourier отдѣленія корней.

Примѣръ I Пусть дано уравненіе

$$x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1=0.$$

Имѣемъ рядъ функцій

$$f(x)=x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1,$$

$$f'(x)=6x^5+5x^4-4x^3-3x^2+2x-1,$$

$$\frac{f''(x)}{1.2}=15x^4+10x^3-6x^2-3x+1,$$

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3}=20x^3+10x^2-4x-1,$$

$$\frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{1.2.3.4}=15x^2+5x-1.$$

$$\frac{f^{\mathrm{V}}(x)}{1.2.3.4.5}=6x+1,$$

$$\frac{f^{\mathrm{V}}(x)}{1.2.3.4.5.6}=1.$$

Дѣйствительные корни заданнаго уравненія $f(x)=0$ заключаются между числами -1 и $+1$. Подставляя числа

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ +\frac{1}{2},\ +1$$

въ рядъ функцій

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{\mathrm{IV}}(x),\ f^{\mathrm{V}}(x),\ f^{\mathrm{VI}}(x),$$

получаемъ слѣдующіе результаты

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{\text{IV}}(x)$	$f^{\text{V}}(x)$	$f^{\text{VI}}(x)$
1	$+$		$+$	$-$	$+$		$+$
$-\frac{1}{2}$	$+$		$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$+$	$-$		$+$	$+$
$+\frac{1}{2}$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Произошло двѣ потери перемѣнъ знака при переходѣ отъ -1 до $\frac{1}{2}$, двѣ отъ 0 къ $\frac{1}{2}$ и двѣ отъ $+\frac{1}{2}$ къ 1. Мы немедленно можемъ заключить, что между $\frac{1}{2}$ и 1 дѣйствительныхъ корней нѣтъ, такъ какъ мы имѣемъ

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{39}{64},\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{48}{64},\ f(1)=1,\ f'(1)=5,$$

что даетъ

$$\frac{f(1)}{f'(1)}-\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}>1-\frac{1}{2}.$$

Въ промежуткѣ $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ рядъ указателей есть

$$2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0.$$

Первый указатель 1, сопровождаемый другимъ, равнымъ единицѣ, заставляетъ насъ сузить предѣлы. Подстановка $\frac{1}{4}$ даетъ результаты

$$+\quad+\quad+\,+\,+,$$

откуда видно, что нѣтъ никакой потери при переходѣ отъ нуля къ $\frac{1}{4}$; достаточно разсмотрѣть промежутокъ $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$; соотвѣтствующій рядъ указателей будетъ

$$2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Такъ какъ мы имѣемъ

$$f''\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{126}\,,\ f'''\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{51}{8}\,,\ f''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\,,\ f'''\left(\frac{1}{2}\right)=12\,,$$

то будетъ

$$\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{f'''\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{f''\left(\frac{1}{4}\right)}{f'''\left(\frac{1}{4}\right)}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,;$$

отсюда заключаемъ, что уравненіе

$$f''(x)=0$$

не имѣетъ корней между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$; слѣдовательно, данное уравненіе тоже не имѣетъ ихъ въ этомъ промежуткѣ. Наконецъ, разсматривая рядъ указателей для промежутка $\left(-1\,,\,-\frac{1}{2}\right)$, получимъ

$$2\,,\ 2\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0$$

Такъ какъ мы имѣемъ

$$f''(-1)=6\,,\ f'''(-1)=-42\,,\ f''\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{8}\,,\ f'''\left(-\frac{1}{2}\right)=6\,,$$

то будетъ

$$\frac{f''\left(-\frac{1}{2}\right)}{f'''\left(-\frac{1}{2}\right)}-\frac{f''(-1)}{f'''(-1)}>-\frac{1}{2}+1\,,$$

что указываетъ на то, что уравненіе $f''(x)=0$ не имѣетъ корней между $\frac{1}{2}$ и -1, слѣдовательно, и сама данная функція не имѣетъ корней въ этомъ промежуткѣ.

Итакъ шесть корней нашего уравненія мнимые.

Примѣръ II. Пусть дано уравненіе

$$x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012=0\,,$$

разсмотрѣнное самимъ Fourier.

Получаемъ для этого уравненія рядъ функцій

$$f(x) = x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^2 + 4567x - 89012\,,$$

$$f'(x) = 6x^5 - 60x^4 + 240x^3 + 246x + 4567\,,$$

$$\frac{f''(x)}{1\,.\,2} = 15x^4 - 120x^3 + 360x^2 + 123\,,$$

$$\frac{f'''(x)}{1\,.\,2\,.\,3} = 20x^3 - 120x^2 + 240x\,,$$

$$\frac{f^{\text{IV}}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 15x^2 - 60x + 60\,,$$

$$\frac{f^{\text{V}}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 6x - 12\,.$$

$$\frac{f^{\text{VI}}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} = 1\,.$$

Выберемъ положительную и сколь угодно малую величину h. Подставляя рядъ чиселъ

$$-10\,,\ -1\,,\ -h\,,\ +h\,,\ +1\,,\ +10\,;$$

получимъ слѣдующіе результаты

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{\text{IV}}(x)$	$f^{\text{V}}(x)$	$f^{\text{VI}}(x)$
-10	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
h	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$		$+$
$+h$		$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$+10$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Такъ какъ мы замѣчаемъ въ промежуткѣ $(-10\,,\ +10)$ шесть потерь перемѣнъ знака, то отсюда заключаемъ, что всѣ дѣйствительные корни заключены между числами -10 и $+10$.

Между -10 и -1 произошла одна потеря перемѣны знака, слѣдовательно, между этими числами существуетъ всего одинъ корень, который такимъ образомъ отдѣленъ.

Между $-h$ и $+h$ мы замѣчаемъ двѣ потери, что показываетъ, что существуютъ два мнимые корня.

Наконецъ, между $+1$ и $+10$ три потери, слѣдовательно, между этими границами находится одинъ или три дѣйствительныхъ корня.

Рядъ указателей функціи $f(x)$, отнесенный къ промежутку между числами 1 и 10, есть

$$3, 2, 2, 2, 2, 1, 0;$$

вычисленіемъ находимъ, что

$$\frac{f^{\text{iv}}(10)}{f^{\text{v}}(10)}-\frac{f^{\text{iv}}(1)}{f^{\text{v}}(1)}<10-1.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что промежутокъ между 1 и 10 слишкомъ значителенъ, чтобы можно было судить о природѣ корней по одной только операціи.

Прежде чѣмъ уменьшить этотъ промежутокъ, нужно посмотрѣть, не имѣетъ ли уравненіе $f^{\text{iv}}(x)=0$ равныхъ корней между 1 и 10. Дѣйствительно, мы замѣчаемъ, что $x-2$ есть общій дѣлитель между $f^{\text{v}}(x)$ и $f^{\text{v}}(x)$; съ другой стороны этотъ биномъ не дѣлитъ функцій

$$f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

предшествующихъ $f^{\text{iv}}(x)$; значитъ, можно будетъ уменьшить на 2 пять первыхъ указателей. Получимъ новый рядъ

$$1, 0, 0, 0, 0, 1, 0$$

который показываетъ, что отдѣленіе корней закончено. Итакъ, предложенное уравненіе имѣетъ только два дѣйствительныхъ корня; одинъ между -10 и -1, другой между $+1$ и $+10$.

Теорема Newton'a. Доказательство Sylvester'a.

§ 30.

Въ заключеніе упоминаемъ объ одной теоремѣ Newton'a [1]). Эта теорема была дана безъ доказательства и доказана была въ первый разъ Sylvester'омъ [2]).

Разсмотримъ уравненіе

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_n=0.$$

съ вещественными коэффиціентами.

---

[1]) Is. Newton. Arithmetica universalis.

[2]) Sylvester. Transactions of R. Irish. Acad. t. 24 (1871).

Составимъ два ряда чиселъ

$$(1) \qquad \begin{matrix} p_0, & p_1, & p_2, & \ldots & p_n \\ q_0, & q_1, & q_2, & \ldots & q_n, \end{matrix}$$

при чемъ первый рядъ составленъ изъ коэффиціентовъ заданнаго уравненія, а второй рядъ указанъ формулами

$$q_0 = q_n = 1\,, \quad q_i = p_i^2 - \frac{(i+1)(n-i+1)}{i(n-i)}\, p_{i-1} p_{i+1}\,.$$

Каждые четыре числа

$$(2) \qquad \begin{matrix} p_i p_{i+1} \\ q_i q_{i+1} \end{matrix}$$

представляютъ относительно знаковъ одинъ изъ шестнадцати случаевъ

$$a) \quad \begin{matrix}+\,+\\+\,+\end{matrix},\ \begin{matrix}+\,+\\-\,-\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,-\\+\,+\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,-\\-\,-\end{matrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix}+\,+\\+\,-\end{matrix},\ \begin{matrix}+\,+\\-\,+\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,-\\+\,-\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,-\\-\,+\end{matrix}$$

$$c) \quad \begin{matrix}+\,-\\+\,-\end{matrix},\ \begin{matrix}+\,-\\-\,+\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,+\\+\,-\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,+\\-\,+\end{matrix}$$

$$d) \quad \begin{matrix}+\,-\\+\,+\end{matrix},\ \begin{matrix}+\,-\\-\,-\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,+\\+\,+\end{matrix},\ \begin{matrix}-\,+\\-\,-\end{matrix}$$

Эти случаи мы будемъ указывать слѣдующими выраженіями и символами.

a) Постоянство — постоянство . . . PP
b) Постоянство — перемѣна . . . PV
c) Перемѣна — перемѣна . . . VV
d) Перемѣна — постоянство . . . VP.

Теорема Newton'а. Число положительныхъ корней уравненія не превосходитъ числа VP въ рядахъ (1), а если меньше, то на число четное.

Число отрицательныхъ корней не превосходитъ числа PP, а если меньше, то на четное число.

Доказательство Sylvester'а состоитъ въ томъ, что онъ доказываетъ новую теорему, изъ которой теорема Newton'а получается такимъ же образомъ, какъ теорема Descartes'а изъ теоремы Budan'а.

Теорема Sylvester'а. Пусть будетъ задано уравненіе n-ой степени $f(x) = 0$.

Полагая

$$F(x) = [f(x)]^2, \quad F_n(x) = [f^{(n)}(x)]^2,$$

$$F_i(x) = [f^{(i)}(x)]^2 - \frac{n-i+1}{n \quad i} f^{(i-1)}(x) f^{(i+1)}(x),$$

составимъ два ряда функцій

$$(3) \qquad \begin{array}{l} f(x)\ ,\ f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ \ldots\ f^{(n)}(x) \\ F(x)\ ,\ F_1(x)\ ,\ F_2(x)\ ,\ \ldots\ F_n(x)\,. \end{array}$$

Число лежащихъ между a и b корней $f(x)$ *или равно или на четное число меньше, чѣмъ число потерь перемѣнъ - постоянствъ* (VP) *въ рядахъ (3) при переходѣ отъ a къ* $b > a$.

Число лежащихъ между a и b корней $f(x)$ *или равно или на четное число меньше, чѣмъ число пріобрѣтеній постоянствъ — постоянствъ* (pp) *въ рядахъ (3) при переходѣ отъ a къ* $b > a$.

Мы получимъ изъ теоремы Sylvester'а теорему Newton'а, если примѣнимъ теорему къ промежутку $(0, \infty)$, ибо

$$F_i(0) = (1 . 2 \ldots i)^2 \left[p_{n-i}^2 - \frac{(n-i+1)(i+1)}{(n-i)i} p_{n-i-1} p_{n-i+1} \right].$$

Мы не будемъ останавливаться на доказательствѣ теоремы Sylvester'а. Читатель найдетъ подробное доказательство въ книгѣ Юл. Сохоцкаго. *Высшая алгебра.* Болѣе короткія доказательства можно найти въ книгѣ H. Weber'а, Lehrbuch der Algebra, а также въ книгѣ Petersen, Théorie des équations algébriques 1897. Лучше же всего посовѣтовать обратиться къ мемуару самого Sylvester'а.

Теоремы Sylvester'а и Newton'а часто въ приложеніяхъ даютъ лучшіе результаты чѣмъ теоремы Budan'а и Descartes'а, ибо по этимъ теоремамъ можетъ получиться болѣе низкій предѣлъ для числа корней, заключающихся въ данномъ промежуткѣ. Это пониженіе предѣла происходитъ потому, что при теоремѣ Budan'а разсматриваются только перемѣны знака перваго ряда функцій, а при теоремѣ Sylvester'а откидываются изъ нихъ тѣ, при которыхъ второй рядъ дастъ также перемѣну знака. Указанному преимуществу теоремы Sylvester'а передъ теоремой Budan'а я придаю мало значенія, ибо я лично считаю сомнительнымъ практическое значеніе всѣхъ пріемовъ отдѣленія корней вмѣстѣ взятыхъ.

ГЛАВА XI.

Теорема Sturm'а.

§ 1.

Будемъ разсматривать уравненіе $f(x) = 0$ съ вещественными коэффиціентами и простыми корнями. Обозначая для сокращенія $f(x)$ черезъ V, мы замѣтимъ, что у функціи V и ея производной V' не будетъ общихъ дѣлителей.

Будемъ относительно функцій V и V' производить выкладку нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя при помощи послѣдовательнаго дѣленія.

Отъ дѣленія V на V' получимъ остатокъ, степень котораго не выше $n-2$, гдѣ n — степень функціи V.

Измѣнимъ знаки у всѣхъ членовъ остатка; тогда остатокъ обратится въ функцію, которую назовемъ V_2.

Будемъ дѣлить производную V' на V_2 и обозначимъ черезъ V_3 остатокъ съ измѣненнымъ знакомъ. Затѣмъ будемъ дѣлить функцію V_2 на функцію V_3 и продолжать дѣленіе далѣе, измѣняя всякій разъ знакъ у остатка.

Получаемъ рядъ остатковъ

$$V_2,\ V_3,\ V_4,\ \ldots\ V_r, \qquad (r < n)$$

степени которыхъ убываютъ. Послѣдній остатокъ V_r долженъ быть постояннымъ числомъ, ибо V и V' не имѣютъ общихъ дѣлителей.

Указанный способъ вычисленія приводитъ къ ряду функцій

$$(1) \qquad V,\ V',\ V_2,\ V_3,\ \ldots\ V_r,$$

который мы для сокращенія будемъ называть *рядомъ функцій Sturm'a*, соотвѣтствующимъ функціи V.

Обозначая через

$$Q_1, Q_2, \ldots Q_{r-1}$$

частныя въ послѣдовательномъ дѣленіи, получимъ между функціями Sturm'a слѣдующія соотношенія

$$V = V'Q_1 - V_2, \ V' = V_2Q_2 - V_3, \ \ldots \ V_{r-2} = V_{r-1}Q_{r-1} - V_r$$

§ 2.

Подставимъ нѣкоторое вещественное число α вмѣсто x въ рядъ функцій Sturm'a и напишемъ рядъ знаковъ результатовъ подстановки въ такомъ же порядкѣ, въ какомъ расположены функціи Sturm'a.

Будемъ называть число перемѣнъ знака въ ряду функцій Sturm'a, получающихся послѣ подстановки числа α,—числомъ перемѣнъ, соотвѣтствующимъ α.

Теорема Sturm'a.

§ 3

Число перемѣнъ знака въ ряду функцій Sturm'a, соотвѣтствующихъ меньшему числу α, не менѣе числа перемѣнъ, соотвѣтствующихъ большему числу β; при чемъ число потерь перемѣнъ знака при переходѣ отъ α къ β точно равно числу вещественныхъ корней функціи $V = f(x)$, заключающихся между числами α и β

Примѣняя соображенія, аналогичныя тѣмъ, которыя мы производили при доказательствѣ теоремы Budan'a (см. § 12 глава X), мы должны будемъ заставлять независимую перемѣнную x непрерывно возрастать отъ α до β. При этомъ мы должны принимать во вниманіе измѣненіе знака всякой функціи V_i, если только перемѣнная x перейдетъ черезъ корень этой функціи.

Придется разсматривать два предположенія: 1) измѣненіе числа перемѣнъ знака при переходѣ черезъ корень первой функціи V, 2) измѣненіе числа перемѣнъ знака при переходѣ черезъ корень одной изъ промежуточныхъ функцій V', V_2, ... V_{r-1} (V_r — не мѣняетъ знака, какъ число постоянное)

Докажемъ, что при переходѣ независимой перемѣнной x черезъ корень функціи V всегда теряется одна перемѣна знака.

На основаніи теоремы § 9 главы X замѣчаемъ, что отношеніе

$$\frac{V}{V'}$$

при переходѣ x черезъ корень a отъ меньшихъ значеній къ большимъ переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ; значитъ, для значеній $x = a + h$ будемъ имѣть при достаточно малыхъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ h неравенства

$$h < 0, \ \frac{V}{V'} < 0$$

$$h > 0, \ \frac{V}{V'} > 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что двѣ функціи V и V' разныхъ знаковъ при значеніяхъ x меньшихъ корня a и достаточно близкихъ къ нему и одного знака при значеніяхъ x, непосредственно слѣдующихъ за корнемъ a уравненія $V = 0$. Итакъ, до корня a первые два знака въ ряду Sturm'а будутъ давать перемѣну, послѣ же корня -повтореніе и, слѣдовательно, при переходѣ черезъ корень уравненія $V = 0$ происходитъ потеря одной перемѣны знака въ ряду Sturm'а, если пока не обращать вниманія на то, что происходитъ въ слѣдующихъ функціяхъ ряда Sturm'а.

Покажемъ теперь, что при переходѣ черезъ корень одной изъ промежуточныхъ функцій не происходитъ измѣненія числа перемѣнъ знаковъ. Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться, что для значенія b, обращающаго въ нуль функцію V_m, не могутъ обращаться въ нуль рядомъ стоящія функціи V_{m-1} и V_{m+1}. Предположимъ обратное, т. е., что при $x = b$ двѣ рядомъ стоящія функціи V_{m-1} и V_m, обращаются въ нуль. Тогда на основаніи равенства

(1) $$V_{m-1} = V_m Q_m - V_{m+1}$$

должна обратиться въ нуль при $x = b$ и слѣдующая функція V_{m+1}. Прилагая подобное разсужденіе, замѣтимъ, что обратятся въ нуль всѣ слѣдующія функціи V_{m+2}, V_{m+3}, .. V_r, что невозможно, ибо V_r отличное отъ нуля постоянное число.

Полагая въ равенствѣ (1) $x = b$, гдѣ b корень функціи V_m, мы получимъ

$$V_{m-1} = - V_{m+1}$$

и, слѣдовательно, результаты подстановокъ корня b въ рядомъ стоящія функціи V_{m-1} и V_{m+1} разныхъ знаковъ. Отсюда мы видимъ, что, какіе бы знаки ни имѣла функція V_m при значеніяхъ x сосѣднихъ по обѣ стороны съ корнемъ b, въ ряду функцій

$$V_{m-1}, \ V_m, \ V_{m+1}$$

будетъ всегда одна перемѣна знака, ибо крайнія функціи—разныхъ зна-

ковъ, а знакъ средней (при $x = b - h$ и $x = b + h$) будетъ въ обоихъ случаяхъ совпадать со знакомъ одной изъ крайнихъ. Итакъ, мы видимъ, что при переходѣ черезъ корень одной изъ среднихъ функцій не происходитъ измѣненія перемѣнъ знака въ ряду Sturm'a.

Резюмируя все сказанное, мы видимъ, что при непрерывномъ возрастаніи x отъ α до β могутъ происходить измѣненія числа перемѣнъ знака только при переходѣ x черезъ корень первой функціи V, причемъ при переходѣ черезъ каждый корень происходитъ одна потеря перемѣны знака въ первыхъ двухъ функціяхъ. Слѣдовательно, общее число потерь перемѣнъ знака при измѣненіи x отъ α до β будетъ равно числу корней функціи V, заключенныхъ въ промежуткѣ отъ α до β

§ 4

По поводу доказанной теоремы упомянемъ о трехъ замѣчаніяхъ, принадлежащихъ самому Sturm'y.

1-ое замѣчаніе. При послѣдовательномъ вычисленіи остатковъ имѣемъ право умножать или дѣлить на произвольныя положительныя числа всѣ дѣлимыя и всѣ дѣлители; отъ этого функціи Sturm'a получатъ положительныхъ множителей, что не отразится на ихъ знакахъ. Надо избѣгать лишь введенія отрицательныхъ множителей.

2-ое замѣчаніе. Условіе, чтобы послѣдняя функція V_r обязательно была постояннымъ числомъ, не играетъ никакой роли въ доказательствѣ. Доказательство предполагаетъ только, что послѣдняя функція V_r не мѣняетъ знака, когда x измѣняется отъ α до β. Отсюда слѣдуетъ, что если какая нибудь промежуточная функція V_i не имѣетъ корня между α и β, то на этой функціи можно оборвать рядъ Sturm'a и слѣдующихъ функцій V_{i+1}, $V_{i+2} \ldots V_r$ не разсматривать

3-е замѣчаніе. Можетъ случиться, что для одного изъ предѣловъ α, β обращается въ нуль одна или нѣсколько функцій Sturm'a; это обстоятельство не производитъ однако никакого недоразумѣнія при счетѣ числа перемѣнъ знака. Достаточно замѣнить въ этомъ случаѣ α на $\alpha - h$ и β на $\beta + h$, гдѣ h сколь угодно малая величина. Если первая функція V обращается въ нуль для одного изъ предѣловъ α или β, то двѣ первыя функціи V, V' будутъ представлять перемѣну знака при $x = \alpha - h$ и постоянство знака при $x = \beta + h$. Что касается обращенія въ нуль при α или β одной изъ промежуточныхъ функцій V_i, то при $x = \alpha - h$ или $x = \beta + h$ будетъ одна только перемѣна знака въ рядѣ трехъ функцій V_{i-1}, V_i, V_{i+1}. Практически дѣло сводится къ отбрасыванію функціи V_i равной нулю, ибо ту же самую одну перемѣну знака представляетъ послѣдовательность V_{i-1}, V_{i+1}.

§ 5

Теорема Sturm'а прилагается безъ видоизмѣненій также къ случаю уравненій, имѣющихъ кратные корни. При этомъ необходимо кратный корень считать за одинъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $X=0$ будетъ подлежащее изученію уравненіе съ кратными корнями, и обозначимъ черезъ X' производную его первой части. Будемъ искать при помощи послѣдовательнаго дѣленія общаго наибольшаго дѣлителя функціи X и ея производной X', не позабывая мѣнять знакъ у всякаго остатка. Мы получимъ рядъ функцій

$$(1) \qquad X, \; X', \; X_2, \; \ldots \; X_{r-1} X_r ,$$

изъ которыхъ послѣдняя не будетъ постоянною, а будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функціи X, X' и будетъ, слѣдовательно, дѣлить всѣ остальныя функціи.

Между функціями (1) существуютъ соотношенія

$$(2) \qquad X_{i-1} = X_i Q_i - X_{i+1}$$

гдѣ Q_i цѣлая функція.

Если мы обозначимъ черезъ D произведеніе общихъ линейныхъ множителей X и X', то дѣля на D всѣ функціи ряда (1), получимъ рядъ слѣдующихъ цѣлыхъ функцій

$$(3) \qquad V, \; V_1, \; V_2, \; \ldots \; V_{r-1}, \; V_r ,$$

изъ которыхъ послѣдняя приводится къ постоянному числу. Рядъ (3) удовлетворяетъ всѣмъ свойствамъ теоремы Sturm'а, ибо во первыхъ на основаніи (2) будутъ имѣть мѣсто соотношенія

$$V_{i-1} = V_i Q_i - V_{i+1} ,$$

а кромѣ того отношеніе $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{X}{X'}$ по теоремѣ § 9 главы X переходитъ черезъ корень функціи X всегда отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ. Итакъ, число корней X въ промежуткѣ α, β можно изслѣдовать по перемѣнамъ знака въ рядѣ (3), но число перемѣнъ знака въ этомъ рядѣ тоже, что и въ рядѣ (1), функціи котораго отличаются отъ функцій (3) однимъ и тѣмъ же множителемъ D.

Такимъ образомъ рядъ (3) можно замѣнить рядомъ (1).

§ 6

Пояснимъ теорему Sturm'а на примѣрѣ. Найдемъ число вещественныхъ корней уравненія

(1) $$(x+a)^p(x-a)^q=b\,,$$

гдѣ a положительное число, p и q числа натуральныя, а b вещественное число, которое можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ.

Для нахожденія числа всѣхъ вещественныхъ корней уравненія (1) достаточно принять $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$.

Итакъ будемъ изслѣдовать корни функціи

$$V=(x+a)^p(x-a)^q-b\,;$$

ея производная будетъ

$$V'=(x+a)^{p-1}(x-a)^{q-1}\{(p+q)x-(p-q)a\}\,.$$

Дѣля V на V' и измѣняя знакъ у остатка, получимъ

$$V_2=(x+a)^{p-1}(x-a)^{q-1}+\frac{b}{a^2}\,\frac{(p+q)^2}{4pq}\,.$$

Дѣля далѣе V' на V_2 и продолжая процессъ послѣдовательнаго дѣленія, получимъ остальныя двѣ функціи Sturm'а

$$V_3=b\{(p+q)x-(p-q)a\}$$

$$V_4=(-1)^q\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}-\frac{b}{(2a)^{p+q}}\,.$$

Разберемъ отдѣльно четыре случая

I) p — четное, q — четное

a) $b>0$

1) $\frac{b}{(2a)^{p+q}}<\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}$

	V,	V',	V_2,	V_3,	V_4	Число перемѣнъ	
$+\infty$	+	+	+	+	+	0	4 вещественныхъ корня
$-\infty$	+	—	+	—	+	4	

2) $\frac{b}{(2a)^{p+q}}>\frac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}$

	V,	V',	V_2,	V_3,	V_4	Число перемѣнъ	
$+\infty$	+	+	+	+	—	1	2 вещественныхъ корня
$-\infty$	+	—	+	—	—	3	

3) $\frac{b}{(2a)^{p+q}} = \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$

	$V,$	V'	$V_2,$	$V_3,$	V_4	Число перемѣнъ	
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	0	3 вещественныхъ корня
$-\infty$	$+$	$-$	$+$		0	3	

Въ этомъ случаѣ $V_4 = 0$, слѣдовательно, корень

$$x = \frac{p-q}{p+q}a$$

функціи V_4 будетъ двукратнымъ корнемъ V.

β) $b < 0$

	$V,$	V',	$V_2,$	$V_3,$	V_4	Число перемѣнъ	
$+\infty$	$+$	$+$	$+$		$+$	2	Нѣтъ вещественныхъ корней.
∞	$+$		$+$	$+$	$+$	2	

Остальные случаи укажемъ, не выписывая подробно знаковъ функцій Sturm'a.

II) p — нечетное, q — четное.

α) $b > 0$.

1) $\frac{b}{(2a)^{p+q}} < \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; 3 вещественныхъ корня.

2) $\frac{b}{(2a)^{p+q}} > \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; одинъ вещественный корень

3) $\frac{b}{(2a)^{p+q}} = \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; 1 двукратный корень $\frac{p-q}{p+q}a$.

β) $b < 0$; одинъ вещественный корень.

III) p — четное, q — нечетное

α) $b > 0$; одинъ вещественный корень

β) $b < 0$

1) $-\frac{b}{(2a)^{p+q}} < \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; 3 вещественныхъ корня.

2) $-\frac{b}{(2a)^{p+q}} > \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; одинъ вещественный корень.

3) $-\frac{b}{(2a)^{p+q}} = \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; 1 двукратный корень $\frac{p-q}{p+q}a$.

IV) p — нечетное, q — нечетное.

α) $b > 0$. Два вещественныхъ корня

β) $b > 0$.

1) $\frac{b}{(2a)^{p+q}} < \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; 2 вещественныхъ корня.

2) $-\frac{b}{(2a)^{p+q}} > \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; нѣтъ корней

3) $\frac{b}{(2a)^{p+q}} = \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$; 1 двукр. корень $\frac{p-q}{p+q}a$.

Итакъ, мы видимъ, что данное уравненіе не можетъ имѣть болѣе 4-хъ вещественныхъ корней.

§ 7

Теорема Sturm'а можетъ быть измѣнена такимъ образомъ, что вмѣсто послѣдовательныхъ остатковъ отъ дѣленія функціи на ея производную можно за функціи Sturm'а выбирать полиномы, составляемые другимъ образомъ. Такое видоизмѣненіе увеличиваетъ практическое и теоретическое значеніе теоремы Sturm'а. Нетрудно видѣть, что при доказательствѣ теоремы Sturm'а играло роль не то обстоятельство, что функціи Sturm'а составлялись послѣдовательнымъ дѣленіемъ, а слѣдующія четыре свойства функцій Sturm'а:

1) послѣдняя функція V_r не мѣняетъ своего знака между разсматриваемыми предѣлами;

2) когда при нѣкоторомъ значеніи $x = a$ обращается въ нуль одна изъ промежуточныхъ функцій, то рядомъ стоящія по обѣ стороны функціи должны принимать значенія разныхъ знаковъ;

3) ни для какого частнаго значенія x въ данномъ промежуткѣ не могутъ обратиться въ нуль двѣ рядомъ стоящія функціи Sturm'а;

4) при переходѣ черезъ корень первой функціи V отъ значеній меньшихъ къ бо́льшимъ отношеніе $\frac{V}{V_1}$, гдѣ V_1 вторая функція ряда Sturm'а можетъ и не быть производною отъ V, переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ.

Очевидно, что, какимъ бы образомъ ни составленъ былъ рядъ функцій

(1) $$V,\ V_1,\ V_2,\ \ldots V_r$$

число корней первой функціи V, лежащихъ между α и $\beta > \alpha$, равняется числу потерь перемѣнъ знака при переходѣ отъ α къ β, если только функціи (1) удовлетворяютъ поставленнымъ выше четыремъ свойствамъ

§ 8.

Часто могутъ быть употреблены съ пользой ряды функцій, неудовлетворяющіе указаннымъ четыремъ свойствамъ. Мы разсмотримъ случай приложенія такихъ рядовъ, которые, удовлетворяя тремъ первымъ свойствамъ, не удовлетворяютъ четвертому.

Въ самомъ дѣлѣ, если отношеніе

$$\frac{V}{V_1}$$

переходитъ черезъ нуль, какъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, такъ и отъ отрицательныхъ къ положительнымъ, то въ ряду функціи Sturm'а при измѣненіи x отъ α до β можетъ произойти одно изъ трехъ: или число перемѣнъ знака не измѣнится, или произойдетъ потеря нѣкотораго числа перемѣнъ, или же, наконецъ, увеличеніе числа перемѣнъ; при этомъ всегда будетъ происходить потеря перемѣнъ знака при переходѣ черезъ корень функціи V, при которомъ отношеніе $\frac{V}{V_1}$ переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, и, наоборотъ, одно пріобрѣтеніе перемѣны знака при переходѣ черезъ корень другой категоріи, а именно такой, что отношеніе переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ.

Если при переходѣ черезъ корень V отношеніе $\frac{V}{V_1}$ не мѣняетъ знака, то не происходитъ измѣненія числа перемѣнъ знака.

Назовемъ корень *принадлежащимъ къ первой категоріи*, если отношеніе (1) переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, и обратно назовемъ его *принадлежащимъ ко второй категоріи*, если отношеніе (1) переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ.

Пусть Δ обозначаетъ *избытокъ* числа корней первой категоріи надъ числомъ корней второй.

Если черезъ k обозначить натуральное число, на которое измѣнится число перемѣнъ знака въ рядѣ Sturm'а при переходѣ отъ α къ β, то очевидно, будемъ имѣть

$$\Delta = \pm k\,,$$

гдѣ знакъ $+$ долженъ быть, когда рядъ Sturm'а *пріобрѣтаетъ* k перемѣнъ при измѣненіи x отъ α до β, и знакъ $-$, когда теряется k перемѣнъ.

Если число k равняется n, степени функціи V, то, очевидно, что уравненіе $V=0$ имѣетъ всѣ корни вещественные и кромѣ того при непрерывномъ измѣненіи x отъ α до β отношеніе (1), проходя черезъ нуль, переходитъ всякій разъ или отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ ($\Delta = -n$) или же всякій разъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ ($\Delta = +n$). Отсюда слѣдуетъ, что между двумя послѣдовательными корнями функціи V долженъ существовать по крайней мѣрѣ одинъ корень функціи V_1. Если эта послѣдняя функція имѣетъ степень $n-1$, то ея корни перемежаются съ корнями $V=0$.

§ 9.

Разсмотримъ теперь условія необходимыя и достаточныя, для того чтобы при обыкновенномъ примѣненіи теоремы Sturm'a уравненіе $V=0$ имѣло всѣ корни вещественные.

Обозначимъ черезъ k число перемѣнъ знака въ ряду Sturm'a при $x=-\infty$, а черезъ k_1 число перемѣнъ знака при $x=+\infty$.

Для числа вещественныхъ корней мы получаемъ выраженіе

$$k-k_1.$$

Если всѣ n корней функціи V вещественны, то получимъ

(1) $$k-k_1=n.$$

Если рядъ Sturm'a есть

$$V,\ V',\ V_2,\ \ldots\ V_r$$

то числа k и k_1 не могутъ превосходить числа r; но $r \leqq n$, слѣдовательно, равенству (1) возможно не иначе удовлетворить, какъ полагая

$$k=n,\ k_1=0,$$

ибо, если $k_1>0$, то для числа k получимъ значеніе большее n, что невозможно. Отсюда выводимъ $r=n$, то есть, *для функціи V, имѣющей всѣ вещественные корни, рядъ функцій Sturm'a долженъ обязательно состоять изъ $n+1$ функцій*, ибо при $x=-\infty$ число перемѣнъ знака k должно равняться n и, слѣдовательно, число самихъ функцій должно быть $n+1$.

Кромѣ того, рядъ функцій Sturm'a не долженъ имѣть перемѣнъ знака при $x=+\infty$, и, слѣдовательно, во всѣхъ функціяхъ Sturm'a коэффиціенты при старшихъ членахъ должны быть числа положительныя, если мы предположимъ, что коэффиціентъ p_0 старшаго члена функціи V число

положительное. Такъ какъ коэффиціенты старшихъ членовъ функціи V и ея производной V' суть p_0 и np_0, то условія, необходимыя и достаточныя для вещественности всѣхъ корней функціи V, будутъ состоять въ томъ, чтобы старшіе коэффиціенты всѣхъ остальныхъ $n-1$ функцій Sturm'а были числами положительными.

Получаются такимъ образомъ $n-1$ неравенствъ между коэффиціентами функціи V. Изъ этихъ неравенствъ нѣкоторыя могутъ быть слѣдствіями остальныхъ, такъ что число условій можетъ быть меньше $n-1$.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе 3-ей степени

$$V = x^3 + px + q$$

$$V' = 3x^2 + p.$$

Будемъ дѣлить V на V', и, чтобы не вводить дробныхъ чиселъ, умножимъ, согласно замѣчанію 2 § 4, функцію V на 3

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 3px + 3q & 3x^2 + p \\ \underline{3x^3 + px} & x \\ \quad\quad 2px + 3q. & \end{array}$$

Отсюда за функцію V_2 можемъ выбрать

$$V_2 = -2px - 2q.$$

Будемъ дѣлить V' на V_2, умноживъ предварительно V' на $4p^2$

$$\begin{array}{l|l} 12p^2x^2 + 4p^3 & -2px - 3q \\ \underline{12p^2x^2 + 18pqx} & \overline{-6px + 9q} \\ \quad -18pqx + 4p^3 & \\ \quad \underline{-18pqx - 27q^2} & \\ \quad\quad\quad 27q^2 + 4p^3 & \end{array}$$

Отсюда за функцію V_3 можно принять $-27q^2 - 4p^3$.

Такъ какъ общее число функцій въ данномъ случаѣ равно $n+1-4$, то условіемъ вещественности будутъ неравенства, число которыхъ равно $n-1=2$

$$-2p > 0, \quad -27q^2 - 4p^3 > 0.$$

Нетрудно видѣть, что неравенство $p < 0$ есть простое слѣдствіе неравенства $27q^2 + 4p^3 < 0$, ибо это неравенство, очевидно, не имѣетъ мѣста при p положительномъ или $p = 0$. Итакъ, для вещественности корней уравненія

$$x^3 + px + q = 0$$

получается одно условіе

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

какъ это мы видѣли въ § 9 Главы III.

Связь съ непрерывными дробями.

§ 10

По ходу вычисленія функцій Sturm'a, представляющаго алгориемъ Эвклида для разложенія дроби

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

въ непрерывную, видна связь теоремы Sturm'a съ теоріей непрерывныхъ дробей Углубимся нѣсколько болѣе въ эту связь, причемъ начнемъ съ замѣчательныхъ изслѣдованій академика А. Маркова [1]), публикованныхъ въ мемуарѣ „О функціяхъ, получаемыхъ при обращеніи рядовъ въ непрерывныя дроби" 1894.

Будемъ разсматривать безконечный рядъ

$$f=\frac{s_0}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\ldots$$

причемъ предположимъ, что $s_0\neq 0$.

Разсматривая обратную функцію, получимъ

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{\frac{s_0}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x_3}+\ldots}=\frac{\frac{x}{s_0}}{1+\frac{s_1}{s_0}\frac{1}{x}+\frac{s_2}{s_0}\frac{1}{x^2}+\ldots}=$$

$$=\frac{x}{s_0}\left\{1-\frac{s_1}{s_0}\frac{1}{x}-\frac{s_2}{s_0}\frac{1}{x^2}-\ldots+\left(\frac{s_1}{s_0}\frac{1}{x}+\frac{s_2}{s_0}\frac{1}{x^2}+\ldots\right)^2-\ldots\right\}=q_1-f_1,$$

гдѣ

$$q_1=\frac{1}{s_0}x-\frac{s_1}{s_0^2},\quad f_1=\frac{\sigma_0}{x}+\frac{\sigma_1}{x^2}+\frac{\sigma_2}{x^3}+\ldots$$

гдѣ

$$\sigma_0=\frac{1}{s_0^3}\begin{vmatrix}s_0 & s_1\\ s_1 & s_2\end{vmatrix}$$

---

[1]) Приложеніе къ LXXIV тому Записокъ Импер. Академіи Наукъ.

Если $\sigma_0 \neq 0$, то подобнымъ же образомъ получимъ

$$\frac{1}{f_1} = q_2 \quad f_2,$$

гдѣ

$$q = \frac{1}{\sigma_0} x - \frac{\sigma_1}{\sigma_0^2}.$$

Продолжая далѣе, разложимъ f въ непрерывную дробь

$$f = \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 \ldots}}}$$

Параметрамъ

$$s_0, s_1, s_2, \ldots s_{2m-2}, s_{2m-1}$$

мы будемъ давать вещественныя значенія; при томъ только такія, чтобы ни одинъ изъ опредѣлителей

$$\Delta_1 = s_0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \ \ldots$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots s_{m-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, & \ldots s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

не обращался въ нуль.

Мы будемъ въ дальнѣйшемъ изложеніи употреблять обозначеніе

$$\Delta_m = |s_i|_m$$

Въ такомъ случаѣ

$$q_1, q_2, \ldots q_k, \ldots q_m$$

цѣлыя функціи первой степени относительно x

Обращая дроби

$$\frac{1}{q_1}, \ \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2}}, \ \ldots \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \ldots \cfrac{1}{q_k}}} \ \ldots \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \ldots - \cfrac{1}{q_m}}}$$

въ обыкновенныя

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ \ldots \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}, \ \ldots \frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)},$$

мы можемъ получить

$$\psi_k(x) = P_{0,k} + P_{1,k}x + P_{2,k}x^2 + \ldots + P_{k,k}x^k$$

и опредѣлять отношенія

$$\frac{P_{0,k}}{P_{k,k}}, \frac{P_{1,k}}{P_{k,k}}, \ldots \frac{P_{k-1,k}}{P_{k,k}}$$

изъ уравненій

$$s_0P_{0,k} + s_1P_{1,k} + s_2P_{2,k} + \ldots + s_{k-1}P_{k-1,k} + s_kP_{k,k} = 0$$

$$s_1P_{0,k} + s_2P_{1,k} + s_3P_{2,k} + \ldots + s_kP_{k-1,k} + s_{k+1}P_{k,k} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_{k-1}P_{0,k} + s_kP_{1,k} + s_{k+1}P_{2,k} + \ldots + s_{2k-2}P_{k-1,k} + s_{2k-1}P_{k,k} = 0 .$$

Эти уравненія получаются изъ того соображенія, что выраженіе

$$\psi_k(x)\left\{\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x_3} + \ldots\right\}$$

не должно заключать членовъ

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^k},$$

т. е другими словами должно быть

$$\psi_k(x)f = \varphi_k(x) + \frac{\alpha}{x^{k+1}} + \frac{\beta}{x^{k+2}} + \ldots,$$

ибо [1])

$$f - \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)} = \frac{\mp 1}{\psi_k(x)\{\varphi_k(x)(q_{k+1} - f_{k+1}) - \varphi_{k-1}(x)\}} .$$

Рѣшая уравненія (1), получимъ

$$P_{ik} = \frac{(-1)^{k-i}P_{k,k}}{\Delta_k} \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots & s_{i-1}, & s_{i+1}, & \ldots & s_k \\ s_1, & s_2, & \ldots & s_i, & s_{i+2}, & \ldots & s_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1}, & s_k, & \ldots & s_{k+i-2}, & s_{k+i}, & \ldots & s_{2k-1} \end{vmatrix}$$

Когда функція $\psi_k(x)$ составлена, нетрудно уже составить и функцію

$$\varphi_k(x) = Q_{0,k} + Q_{1,k}x + Q_{2,k}x^2 + \ldots + Q_{k-1,k}x^{k-1},$$

которая должна быть равна цѣлой части произведенія $\psi_k(x)f$

---

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ 1913 г. Второе изд. Стр. 187 § 10. (1).

Именно, въ силу только что указаннаго требованія можемъ написать слѣдущія формулы

$$
\begin{aligned}
Q_{0,k} &= s_0 P_{1,k} + s_1 P_{2,k} + \ldots + s_{k-1} P_{k,k} \\
Q_{1,k} &= \qquad\quad s_0 P_{2,k} + \ldots + s_{k-2} P_{k,k} \\
(2) \qquad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_{k-1,k} &= \qquad\qquad\qquad\qquad s_0 P_{k,k}
\end{aligned}
$$

Коэффиціентъ $P_{k,k}$ остается пока неопредѣленнымъ. Конечно эта неопредѣленность пропадаетъ въ выраженіи дроби

$$\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}.$$

Если же мы хотимъ, чтобы числитель и знаменатель дроби получались по извѣстнымъ формуламъ

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
&\psi_1(x) = q_1\,, \ \psi_2(x) = q_2\psi_1(x) - 1\,, \ \ldots \ \psi_m(x) = q_m\psi_{m-1}(x) - \psi_{m-2}(x) \\
&\varphi_1(x) = 1\,, \ \varphi_2(x) = q_2\,, \qquad\qquad \ldots \ \varphi_m(x) = q_m\varphi_{m-1}(x) - \varphi_{m-2}(x)\,,
\end{aligned}
$$

то должны удовлетворить уравненіямъ слѣдующаго вида

$$
\begin{aligned}
&(s_0 P_{1,k} + s_1 P_{2,k} + \ldots + s_{k-1} P_{k,k}) P_{0,k-1} \\
&- P_{0,k}(s_0 P_{1,k-1} + s_1 P_{2,k-1} + \ldots + s_{k-2} P_{k-1,k-1}) = 1\,,
\end{aligned}
$$

т. е.

$$(4) \qquad \varphi_k(0)\psi_{k-1}(0) - \varphi_{k-1}(0)\psi_k(0) = 1\,.$$

При разсмотрѣніи послѣдняго уравненія полезно ввести опредѣлитель

$$
(5) \qquad \Delta = \begin{vmatrix}
s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{k-1} & s_k \\
s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k & s_{k+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\
s_{k-1} & s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-2} & s_{2k-1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{vmatrix}\,,
$$

и его миноры

$$\Delta_{i,j}.$$

Подъ Δ_{ij} мы подразумѣваемъ произведеніе $(-1)^{i+j}$ на опредѣлитель, получаемый изъ (5) вычеркиваніемъ $j+1$-ой горизонтали (считая сверху) и $i+1$-ой колонны (считая слѣва). Замѣтимъ кстати, что $\Delta = \Delta_k = \Delta_{k,k}$.

Введя такія обозначенія, мы можемъ представить отношенія

$$\frac{P_{0,k}}{P_{k,k}},\ \frac{P_{1,k}}{P_{k,k}},\ \ldots\ \frac{P_{k-1,k}}{P_{k,k}}$$

подъ видомъ дробей

$$\frac{\Delta_{0,k}}{\Delta},\ \frac{\Delta_{1,k}}{\Delta},\ \dots\ \frac{\Delta_{k-1,k}}{\Delta},$$

а отношенія

$$\frac{P_{0,k-1}}{P_{k-1,k-1}},\ \frac{P_{1,k-1}}{P_{k-1,k-1}},\ \dots\ \frac{P_{k-2,k-1}}{P_{k-1,k-1}}$$

подъ видомъ дробей

$$\frac{\Delta_{0,k-1}}{\Delta_{k-1}},\ \frac{\Delta_{1,k-1}}{\Delta_{k-1}},\ \dots\ \frac{\Delta_{k-2,k-1}}{\Delta_{k-1}}.$$

Уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$(s_0\Delta_{1,k}+s_1\Delta_{2,k}+\dots+s_{k-1}\Delta_{k,k})\Delta_{0,k-1}$$
$$-\Delta_{0,k}(s_0\Delta_{1,k-1}+s_1\Delta_{2,k-1}+\dots+s_{k-2}\Delta_{k-1,k-1})=\frac{\Delta_k\Delta_{k-1}}{P_{k,k}P_{k-1,k-1}}$$

или

(4)
$$s_0(\Delta_{1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{1,k-1})+s_1(\Delta_{2,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{2,k-1})+\dots$$
$$\dots+s_{k-2}(\Delta_{k-1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{k-1,k-1})+s_{k-1}\Delta_{k,k}\Delta_{0,k-1}=\frac{\Delta_k\Delta_{k-1}}{P_{k,k}P_{k-1,k-1}}.$$

На основаніи § 41 главы IV, получимъ

$$\Delta_{1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{1,k-1}=\Delta\begin{vmatrix} s_2 & s_3 & \dots & s_k \\ s_3 & s_4 & \dots & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-2}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_{2,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{2,k-1}=-\Delta\begin{vmatrix} s_1 & s_3 & s_4 & \dots & s_k \\ s_2 & s_4 & s_5 & \dots & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{2k-2}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_{3,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{3,k-1}=\Delta\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_4 & s_5 & \dots & s_k \\ s_2 & s_3 & s_5 & s_6 & \dots & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & s_{k+2} & s_{k+3} & \dots & s_{2k-2}\end{vmatrix}$$

. . . .

$$\Delta_{k-1,k}\Delta_{0,k-1}-\Delta_{0,k}\Delta_{k-1,k-1}=(-1)^{k-2}\Delta\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{k-2} & s_k \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{k-1} & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-4} & s_{2k-2}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_{k,k}\Delta_{0,k-1}=\Delta(-1)^{k-1}\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{k-1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{2k-3}\end{vmatrix}$$

и кромѣ того

$$s_0\begin{vmatrix} s_2 & s_3 & \cdots & s_k \\ s_3 & s_4 & \cdots & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{2k-2}\end{vmatrix} - s_1\begin{vmatrix} s_1 & s_3 & s_4 & \cdots & s_k \\ s_2 & s_4 & s_5 & \cdots & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_{k+1} & s_{k+2} & \cdots & s_{2k-2}\end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{k-1}s_{k-1}\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{k-1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \cdots & s_{2k-3}\end{vmatrix} = \Delta = \Delta_k = \Delta_{k,k}.$$

Поэтому уравненіе (2) или что одно и тоже (4) приводитъ къ слѣдующему равенству

(5) $$\Delta_k^2 = \frac{\Delta_k\Delta_{k-1}}{P_{k,k}P_{k-1,k-1}}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видѣли въ самомъ началѣ, что надо положить

$$P_{1,1} = \frac{1}{s_0} = \frac{1}{\Delta_1}$$

для того, чтобы было $\varphi_1(x) = 1$.

Уравненіе (5) даетъ

$$P_{k,k}P_{k-1,k-1} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Отсюда послѣдовательно выводимъ

$$P_{2,2} = \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2},\ P_{3,3} = \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2\Delta_3},\ P_{4,4} = \frac{\Delta_1^2\Delta_3^2}{\Delta_2^2\Delta_4}$$

и вообще

$$P_{2l,2l} = \frac{\Delta_1^2\Delta_3^2\ldots\Delta_{2l-1}^2}{\Delta_2^2\Delta_4^2\ldots\Delta_{2l-2}^2\Delta_{2l}},\ P_{2l+1,2l+1} = \frac{\Delta_2^2\Delta_4^2\ldots\Delta_{2l}^2}{\Delta_1^2\Delta_3^2\ldots\Delta_{2l-1}^2\Delta_{2l+1}},$$

Такимъ образомъ функціи $\psi_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ нами опредѣлены вполнѣ. Наконецъ мы можемъ опредѣлить

$$q_1,\ q_2,\ \ldots q_k,\ \ldots q_m$$

какъ цѣлыя части дробей

$$\frac{\psi_1(x)}{1},\ \frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)},\ \ldots\frac{\psi_k(x)}{\psi_{k-1}(x)},\ \ldots\frac{\psi_m(x)}{\psi_{m-1}(x)}.$$

Не останавливаясь на этомъ, замѣтимъ только, что коэффиціентъ при x въ выраженіи q_k равенъ отношенію

$$\frac{P_{k,k}}{P_{k-1,k-1}}.$$

Обратимся теперь къ корнямъ уравненія

(6) $$\psi_k(x) = 0,$$

которые условимся обозначать символомъ

$$x_{i,k},$$

отличая ихъ другъ отъ друга индексомъ i.

Исключая изъ разсмотрѣнія случай кратныхъ корней, будемъ имѣть формулу

$$\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)} = \sum \frac{R_{i,k}}{x - x_{i,k}},$$

гдѣ

$$R_{i,k} = \frac{\varphi_k(x_{i,k})}{\psi_k'(x_{i,k})}.$$

Разлагая нашу сумму

$$\sum \frac{R_{i,k}}{x - x_{i,k}}$$

въ рядъ по цѣлымъ отрицательнымъ степенямъ x и ограничиваясь тѣми членами, гдѣ $\frac{1}{x}$ входитъ въ степени меньшей чѣмъ $2k+1$, мы должны получить

$$\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots + \frac{s_{2k-1}}{x^{2k}}.$$

Отсюда вытекаютъ уравненія

$$s_0 = \sum R_{i,k},\ s_1 = \sum R_{i,k} x_{i,k},\ s_2 = \sum R_{i,k} x_{i,k}^2, \ \ldots\ s_{2k-1} = \sum R_{i,k} x_{i,k}^{2k-1}.$$

Если мы ограничимъ параметры

$$s_0,\ s_1,\ s_2, \ldots s_{2m-2}$$

неравенствами

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots \Delta_k > 0, \ldots \Delta_m > 0,$$

то всѣ коэффиценты

$$P_{1,1},\ P_{2,2},\ P_{3,3}, \ldots P_{m,m}$$

будутъ числами положительными и, слѣдовательно, рядъ функцій

$$\psi_m(x),\ \psi_{m-1}(x),\ \psi_{m-2}(x),\ \ldots \psi_1(x),\ 1$$

будетъ обладать всѣми свойствами функцій Sturm'а и ни одно изъ уравненій

$$\psi_m(x)=0,\ \psi_{m-1}(x)=0,\ \ldots \psi_k(x)=0,\ \ldots \psi_1(x)=0$$

не будетъ допускать *ни мнимыхъ ни кратныхъ корней*.

На основаніи соображеній § 8 можно утверждать, что корни всякой функціи $\psi_k(x)$ перемежаются съ корнями сосѣднихъ двухъ $\psi_{k-1}(x)$, $\psi_{k+1}(x)$.

Изъ формулъ (1) мы выводимъ

$$\varphi_m(x)\psi_{m-1}(x)-\psi_m(x)\varphi_{m-1}(x)=\varphi_{m-1}(x)\psi_{m-2}(x)-\psi_{m-1}(x)\varphi_{m-2}(x)=$$

$$\ldots=\varphi_2(x)\psi_1(x)-\psi_2(x)\varphi_1(x)=1,$$

такъ что

(7) $$\varphi_k(x)\psi_{k-1}(x)-\psi_k(x)\varphi_{k-1}(x)=1,$$

отсюда

$$\varphi_k(x_{i,k})\psi_{k-1}(x_{i,k})=1$$

числа

$$R_{i,k}=\frac{\varphi_k(x_{i,k})}{\psi_k'(x_{i,k})}=\frac{1}{\psi_{k-1}(x_{i,k})\psi_k'(x_{i,k})}$$

будутъ положительными, такъ какъ $\psi_{k-1}(x_{i,k})$ и $\psi_k'(x_{i,k})$ одного знака.

Нетрудно написать условія, чтобы всѣ корни уравненій

$$\psi_m(x)=0,\ \psi_{m-1}(x)=0,\ \ldots \psi_k(x)=0,\ \ldots \psi_1(x)=0$$

были положительными. Для этой цѣли рядъ чиселъ

$$\psi_m(0),\ \psi_{m-1}(0),\ \ldots \psi_1(0),\ 1,$$

или что одно и тоже

$$P_{0,m},\ P_{0,m-1},\ \ldots P_{0,1},\ 1,$$

представлялъ *все* перемѣны знака.

Нетрудно видѣть, что должны имѣть мѣсто неравенства

$$s_1>0,\ \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix}>0 \text{ и т. д.}$$

§ 11.

Переходя къ случаю разложенія въ непрерывную дробь

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

мы получаемъ, какъ частный случай, изслѣдованія M. Sylvester'a, публикованныя безъ доказательства въ Philosophical Magazine (Декабрь 1839). Sturm доказалъ формулы Sylvester'a въ VII томѣ журнала Liouville'a. Въ XII томѣ того же журнала находятся замѣчательныя изслѣдованія о томъ же вопросѣ Borchardt'a.

Итакъ, выведемъ эти результаты изъ теоріи Маркова. Мы будемъ имѣть

$$(1) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \dots$$

причемъ

$$(2) \qquad s_k = x_1^k + x_2^k + \dots x_m^k,$$

гдѣ $x_1, x_2, \dots x_m$ корни уравненія $f(x) = 0$, которое мы предполагаемъ освобожденнымъ отъ кратныхъ корней.

Въ этомъ случаѣ разложеніе дроби (1) дастъ конечную непрерывную дробь, такъ что послѣднимъ знаменателемъ $\psi_m(x)$ подходящихъ дробей можно считать функцію $f(x)$ и мы приходимъ къ теоремѣ:

Условіе необходимое и достаточное для вещественности всѣхъ корней уравненія $f(x)$ состоитъ въ неравенствахъ

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m-1} & s_m & s_{m+1} & \dots & s_{2m-2} \end{vmatrix} > 0.$$

Очевидно, что

$$\Delta_k = 0$$

при $k > m$.

Обозначимъ

$$V = f(x), \quad V_1 = f'(x)$$

$$V = V_1 q_1 - V_2, \quad V_1 = V_2 q_2 - V_3, \quad \dots \quad V_{m-2} = V_{m-1} q_{m-1} - V_m.$$

Мы оставляемъ въ силѣ предположеніе $\Delta_i \neq 0$ при $i \leq m$.

Будемъ имѣть

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = q_2, \quad \varphi_3(x) = q_2 q_3 - 1$$

$$\psi_1(x) = q_1, \quad \psi_2(x) = q_1 q_2 - 1, \quad \psi_3(x) = q_1 q_2 q_3 - q_1 - q_3.$$

Получаемъ формулу

$$(4) \qquad V_{k+1} = V_1 \psi_k(x) - V \varphi_k(x) = f'(x) \psi_k(x) - f(x) \varphi_k(x).$$

Это соотношеніе дастъ возможность выразить въ явномъ видѣ V_{k+1}.

§ 12

На основаніи (1) и (2) § 10 получаемъ

$$
(1)\qquad \varphi_k(x) = \frac{P_{k,k}}{\Delta_k}\begin{vmatrix} 0, & \mu_1(x), & \mu_2(x), & \dots & \mu_k(x) \\ s_0, & s_1, & -s_2, & \dots & s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1}, & -s_k, & s_{k+1}, & \dots & s_{2k-1} \end{vmatrix}
$$

гдѣ

$$
\mu_1(x) = s_0, \quad \mu_i(x) = s_0x^{i-1} + s_1x^{i-2} + \dots + s_{i-1}.
$$

Функція $\mu_i(x)$ есть не что иное какъ цѣлая часть раціональной функціи

$$
\frac{x^i f'(x)}{f(x)}.
$$

Подобнымъ же образомъ

$$
(2)\qquad \psi_k(x) = \frac{P_{k,k}}{\Delta_k}\begin{vmatrix} 1, & x, & x^2, & \dots & x^k \\ -s_0, & -s_1, & -s_2, & \dots & -s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -s_{k-1}, & -s_k, & s_{k+1}, & \dots & s_{2k-1} \end{vmatrix}
$$

Преобразуемъ теперь выраженіе (2). Умножимъ первую колонку на $-x$ и приложимъ ко второй, умножимъ вторую въ ея первоначальномъ видѣ на $-x$ и приложимъ къ третьей; продолжая такимъ образомъ до послѣдней колонны получимъ

$$
(3)\quad \psi_k(x) = \frac{1}{\lambda_k}\begin{vmatrix} s_0x - s_1, & s_1x - s_2, & \dots & s_{k-1}x - s_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1}x - s_k, & s_kx - s_{k+1}, & \dots & s_{2k-2}x - s_{2k-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_k}|\Sigma\alpha^{i-1}(x-\alpha)|_k
$$

сумма Σ распространяется на всѣ корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ уравненія $f(x) = 0$, а

$$
\lambda_k = \frac{\Delta_k}{P_{k,k}}.
$$

Очевидно, что формула (3) представляетъ $\psi_k(x)$ при помощи произведенія двухъ матрицъ

$$
\begin{vmatrix} x - \alpha_1 & \dots & x - \alpha_m \\ \alpha_1(x-\alpha_1) & \dots & \alpha_m(x-\alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1}(x-\alpha_1) & \dots & \alpha_m^{k-1}(x-\alpha_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \dots & \alpha_m^{k-1} \end{vmatrix}
$$

Получаемъ, слѣдовательно, (см. § 26 Главы IV)

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\lambda_k}\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}^2 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k).$$

Обозначая дискриминантъ функціи $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$ черезъ

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k) = (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\ldots(\alpha_{k-1}-\alpha_k)^2,$$

получимъ

(4)
$$\psi_k(x) = \frac{1}{\lambda_k}\sum D(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k).$$

Здѣсь сумма распространяется на всѣ сочетанія m корней α_i по k.

§ 13.

Для вычисленія выраженія функціи V_{k+1} примемъ въ соображеніе формулу (4) § 11 и формулы (1) и (2) § 12. Будемъ имѣть

$$\frac{V_{k+1}}{f(x)} = \frac{1}{\lambda_k}\begin{vmatrix} \frac{f'(x)}{f(x)}, & \frac{xf'(x)}{f(x)}-\mu_1, & \frac{x^2f'(x)}{f(x)}-\mu_2, & \ldots & \frac{x^kf'(x)}{f(x)}-\mu_k \\ s_0, & -s_1, & -s_2, & \ldots & -s_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -s_{k-1}, & -s_k, & -s_{k+1}, & \ldots & -s_{2k-1} \end{vmatrix}.$$

Имѣя въ виду соотношеніе

$$\mu_i x + s_i = \mu_{i+1},$$

мы послѣ простыхъ преобразованій получимъ

$$\frac{V_{k+1}}{f(x)} = \frac{1}{\lambda_k}\left|\frac{x^if'(x)}{f(x)} - \mu_i(x)\right|_k.$$

Но извѣстно, что

$$\frac{x^if'(x)}{f(x)} - \mu_i(x) = \sum \frac{\alpha^i}{x-\alpha},$$

слѣдовательно,

(1)
$$V_{k+1} = \frac{f(x)}{\lambda_k}\left|\sum \frac{\alpha^i}{x-\alpha}\right|$$

и мы получаемъ произведеніе матрицъ

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{x-\alpha_1} & \dots & \frac{1}{x-\alpha_m} \\ \frac{\alpha_1}{x-\alpha_1} & \dots & \frac{\alpha_m}{x-\alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\alpha_1^k}{x-\alpha_1} & \dots & \frac{\alpha_m^k}{x-\alpha_m} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \dots & \alpha_m^k \end{Vmatrix}$$

т. е

$$V_{k+1} = \frac{1}{\lambda_k} \sum D(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k, \alpha_{k+1})(x-\alpha_{k+2}) \dots (x-\alpha_m).$$

Эта формула и формула (4) § 12 суть какъ разъ формулы, указанныя Sylvester'омъ.

§ 14.

Множители λ_k выражаются по формуламъ

$$\lambda_{2k} = \left(\frac{\Delta_2\Delta_4 \dots \Delta_{2k}}{\Delta_1\Delta_3 \dots \Delta_{2k-1}}\right)^2, \quad \lambda_{2k+1} = \left(\frac{\Delta_1\Delta_3 \dots \Delta_{2l+1}}{\Delta_2\Delta_4 \dots \Delta_{2l}}\right)^2.$$

При вещественныхъ значеніяхъ s_i множители суть числа положительныя.

Сравнивая коэффиціенты при старшихъ степеняхъ въ уравненіи (4), § 12, получимъ

$$P_{k,k} = \frac{1}{\lambda_k} \sum D(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k);$$

отсюда получаемъ

$$\Delta_k = \Sigma D(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k),$$

что очевидно на основаніи возвышенія въ квадратъ матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1, & \dots & 1 \\ \alpha_1, & \dots & \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1}, & \dots & \alpha_m^{k-1} \end{Vmatrix}.$$

При примѣненіи теоремы Sturm'a можно откинуть положительные множители λ_k. Число μ вещественныхъ корней уравненія $V = f(x) = 0$ будетъ равно числу потерь перемѣнъ знака при переходѣ отъ ряда

(1) $$V(-\infty), \; V_1(-\infty), \; \dots, \; V_{m-1}(-\infty), \; V_m(-\infty)$$

къ ряду

(2) $$V(+\infty),\ V_1(+\infty),\ \ldots\ V_{m-1}(+\infty),\ V_m(+\infty).$$

Знаки ряда (1) укажутся рядомъ величинъ

(3) $$(-1)^m,\ (-1)^{m-1}\Delta_1,\ \ldots\ \Delta_{m-1},\ \Delta_m,$$

а знаки ряда (2) будутъ совпадать со знаками ряда

(4) $$1,\ \Delta_1,\ \ldots\ \Delta_{m-1},\ \Delta_m.$$

Пусть ξ обозначаетъ число перемѣнъ знаковъ въ рядѣ (3), а η число перемѣнъ знаковъ въ рядѣ (4).

Получаемъ два равенства

$$\xi-\eta=\mu,\ \xi+\eta=m,$$

откуда

$$\mu=m-2\eta;$$

такимъ образомъ мы приходимъ къ теоремѣ: *число паръ мнимыхъ корней уравненія* $V=0$ *равно числу перемѣнъ знаковъ въ рядѣ величинъ*

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots\ \Delta_m.$$

Такъ что, если эти величины всѣ положительныя, то мы приходимъ къ нашему прежнему заключенію объ отсутствіи мнимыхъ корней уравненія.

Приложеніе теоремы Sturm'а къ одному классу уравненій.

§ 15.

Приложимъ теорему Sturm'а къ доказательству вещественности корней одного замѣчательнаго уравненія, а именно, характеристическаго уравненія симметрической матрицы, всѣ элементы которой вещественные.

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11}-g, & a_{21}, & \ldots & a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22}-g, & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots & a_{nn}-g \end{vmatrix}=0$$

гдѣ $a_{ik}=a_{ki}$.

Это уравненіе заключаетъ какъ частный случай уравненіе третьей степени, отъ котораго зависитъ нахожденіе осей поверхности второго порядка, а также уравненія при помощи которыхъ опредѣляются возмущенія эллиптическихъ элементовъ движенія небесныхъ тѣлъ.

Дано разными авторами очень много доказательствъ того, что всѣ корни уравненія (1) вещественные. Мы приведемъ доказательство Borchardt'a [1]), модернизируя нѣсколько его изложеніе.

Нетрудно составить уравненіе, которому будутъ удовлетворять k-ыя степени g_k корней g уравненія (1). На основаніи теоремы Cayley—Hamilton'a [2]), гласящей, что матрица $\mathfrak{a} = \| a_{ij} \|$ удовлетворяетъ символически (въ смыслѣ дѣйствій надъ матрицами) ея характеристическому уравненію, мы получимъ уравненіе для g^k, если составимъ характеристическое уравненіе для матрицы

$$\mathfrak{a}^k = \| a_{ij}^{(k)} \| ,$$

то есть уравненіе

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(k)} - x, & a_{21}^{(k)} & , \ldots & a_{n1}^{(k)} \\ a_{12}^{(k)} & , a_{22}^{(k)} - x, & \ldots & a_{n2}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{kn}^{(k)} & , a_{2n}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} - x \end{vmatrix} = 0 .$$

Очевидно, что элементы $a_{ij}^{(k)}$ матрицы, представляющей k-ую степень заданной $\mathfrak{a}$, выражаются однородными цѣлыми функціями k-ой степени черезъ элементы a_{ij} матрицы $\mathfrak{a}$.

Дадимъ элементарное доказательство высказаннаго предложенія независимое отъ теоремы Hamilton'a-Cayley. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотрѣніе характеристическаго уравненія (1) равносильно съ разсмотрѣніемъ преобразованія.

$$(2)\qquad \begin{aligned} gx_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \\ gx_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ gx_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n . \end{aligned}$$

Умножимъ уравненія (2) на g и подставимъ во вторыхъ частяхъ вмѣсто

$$(3)\qquad gx_1 , \; gx_2 , \; \ldots \; gx_n$$

ихъ выраженія изъ тѣхъ же уравненій (2); получимъ

$$(4)\qquad \begin{aligned} g^2x_1 &= a_{11}^{(2)}x_1 + a_{21}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{n1}^{(2)}x_n \\ g^2x_2 &= a_{12}^{(2)}x_1 + a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{n2}^{(2)}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g^2x_n &= a_{1n}^{(2)}x_1 + a_{2n}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n . \end{aligned}$$

[1]) Journ. de Mathématiques pures et appliquées. t. XVI.

[2]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Второе изд. Глава XIII

Нетрудно видѣть, что матрица коэффиціентовъ правыхъ частей уравненій (4) будетъ $\mathfrak{a}^2$, если $\mathfrak{a}$ будетъ матрица коэффиціентовъ уравненій (2). Итакъ, мы видимъ, что теорема справедлива для случая $k=2$. Умножая (4) на g и выражая (3) при помощи (2), убѣдимся въ справедливости теоремы для $k=3$, и т. д.

§ 16

Раскрывая опредѣлитель (1) § 15 по степенямъ g, мы получимъ для суммы корней характеристическаго уравненія выраженіе

$$s_1 = g_1 + g_2 + \dots + g_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum a_{ii},$$

составленное изъ элементовъ главной діагонали матрицы $\mathfrak{a}$.

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$s_k = g_1^k + g_2^k + \dots + g_n^{(k)} = a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} + \dots + a_{nn}^{(k)} = \sum a_{ii}^{(k)}.$$

Введемъ для аналогіи обозначенія

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$$

$$a_{ii}^{(0)} = 1\,, \quad a_{ij}^{(0)} = 0 \qquad (i \neq j)\,.$$

Очевидно, что $a_{ij}^{(0)}$ будутъ элементами единичной матрицы

$$\mathfrak{a}^0 = 1\,.$$

Можно будетъ написать $s_0 = n = \sum a_{ii}^{(0)}$, $s_1 = \sum a_{ii}^{(1)}$.

§ 17

Тождество

$$\mathfrak{a}^{k+l} = \mathfrak{a}^k \mathfrak{a}^l$$

даетъ по правиламъ умноженія симметрическихъ матрицъ

$$a_{ij}^{(k+l)} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{hi}^{(k)} a_{hj}^{(l)},$$

отсюда

$$s_{k+l} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{rr}^{(k+l)} = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{r=1}^{r=n} a_{hr}^{(k)} a_{hr}^{(l)}.$$

Мы видимъ, что опредѣлитель

$$\Delta_\mu = \begin{vmatrix} s_0 & , s_1 \ldots & s_{\mu-1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot \\ s_{\mu-1}, & s_\mu \ldots & s_{2\mu-2} \end{vmatrix}.$$

Имѣетъ матрицу

$$s_0 = \sum\sum a_{hr}^{(0)} a_{hr}^{(0)}, \; s_1 = \sum\sum a_{hr}^{(0)} a_{hr}^{(1)}, \ldots s_{\mu-1} = \sum\sum a_{hr}^{(0)} a_{hr}^{(\mu-1)}$$

$$s_1 = \sum\sum a_{hr}^{(1)} a_{hr}^{(0)}, \; s_2 = \sum\sum a_{hr}^{(1)} a_{hr}^{(1)}, \ldots s_\mu = \sum\sum a_{hr}^{(1)} a_{hr}^{(\mu-1)}$$

. . . .

слѣдовательно, онъ происходитъ отъ возвышенія въ квадратъ матрицы

$$\left\| a_{rh}^{(0)} \; a_{rh}^{(1)} \ldots a_{rh}^{(\mu-1)} \right\|;$$

различныя горизонтали послѣдней матрицы получаются, если индексамъ r и h давать всѣ возможныя значенія $1, 2, \ldots n$.

Итакъ $\Delta_\mu > 0$, ибо Δ_μ есть сумма квадратовъ различныхъ опредѣлителей матрицы, всѣ же элементы этихъ опредѣлителей числа вещественныя, какъ раціональныя функціи элементовъ основной матрицы a.

На основаніи доказаннаго выше положительность всѣхъ опредѣлителей Δ_μ влечетъ за собой вещественныя всѣхъ корней уравненія (1) § 15 и теорема доказана.

Изслѣдованія Hermite'a.

§ 18.

Глубокое значеніе теоремы Sturm'a въ алгебрѣ выяснилось съ особою рельефностью послѣ замѣчательныхъ изслѣдованій Hermite'a [1]). Знаменитый ученый показалъ связь теоремы Sturm'a съ теоріей квадратичныхъ формъ; изъ этой связи вытекли самыя разнообразныя слѣдствія, относящіяся къ другимъ частямъ алгебры: къ теоріи инваріантовъ, къ преобразованіямъ Tschirnhausen'a и т. п. Надо обратить особенное вниманіе на замѣчательныя изслѣдованія Darboux [2]), посвященныя тому же вопросу. Не имѣя возможности изложить изслѣдованія Hermite'a въ полномъ ихъ объемѣ, мы обратимъ вниманіе на ихъ характерные пункты.

Прежде всего Hermite показываетъ, что функціи Sturm'a V_h (см. (2) § 13) можно представить въ видѣ дискриминантовъ нѣкоторыхъ квадратичныхъ формъ

[1]) *Ch. Hermite.* Remarques sur le théorème de M. Sturm. Comtes rendues de l'Acad. de Paris T 36 (1853).

[2]) *G. Darboux.* Sur le théorème de Sturm. Bulletin des Sciences Math. 1875

Разсмотримъ форму

$$(1)\qquad G=\frac{1}{\alpha_1-x}Y_1^2+\frac{1}{\alpha_2-x}Y_2^2+\ldots+\frac{1}{\alpha_n-x}Y_n^2,$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ суть корни заданнаго уравненія

$$f(x)=0,$$

а

$$Y_k=y_0+\alpha_k y_1+\alpha_k^2 y_2+\ldots+\alpha_k^{n-1}y_{n-1},$$

величины

$$(2)\qquad y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$$

суть произвольно выбранныя независимыя перемѣнныя. Очевидно, что относительно величинъ (2) функціи (1) будетъ квадратичной формой

$$G=\sum a_{ij}y_iy_j, \begin{pmatrix} i=0, \ldots n-1 \\ j=0, \ldots n-1 \end{pmatrix}$$

гдѣ

$$a_{ij}=\frac{\alpha_1^{i+j}}{\alpha_1-x}+\frac{\alpha_2^{i+j}}{\alpha_2-x}+\ldots+\frac{\alpha_n^{i+j}}{\alpha_n-x}=\sum\frac{\alpha^{i+j}}{\alpha-x}$$

Очевидно, что дискриминантъ Δ_n (см. § 12 главы VII) выразится по формулѣ

$$\Delta_n=\left|\sum\frac{\alpha^i}{\alpha-x}\right|_n,$$

то есть мы получаемъ формулу (1) § 13

Итакъ

$$\Delta_n=\frac{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}{(-1)^n f(x)}$$

Δ_n отлично отъ нуля, если всѣ корни α_i различны между собой. Итакъ, если всѣ корни α_i различны между собой, то форма (1) имѣетъ рангъ n.

Нетрудно видѣть, что вообще говоря будетъ

$$\Delta_k=\left|\sum\frac{\alpha^i}{\alpha-x}\right|_k$$

или

$$\Delta_k=\frac{(-1)^k}{f(x)}\sum D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)(x-\alpha_{k+1})\ldots(x-\alpha_n).$$

Коэффиціенты a_{ij} квадратичной формы (1), будучи симметрическими функціями корней α_i, будутъ величинами вещественными, если вещест-

венны, коэффиціенты уравненія $f(x)=0$ и также дадимъ вещественное значеніе числу x, не совпадающее ни съ однимъ корнемъ α_i.

На основаніи формулъ M. Sylvester'a имѣемъ

$$\frac{V_1}{V} = \rho_1 \frac{\Delta_1}{1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = -\rho_2 \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \ldots \quad \frac{V_n}{V_{n-1}} = -\rho_n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

гдѣ всѣ ρ_i числа положительныя.

Число перемѣнъ знака въ рядѣ

(3) $$V, \; V_1, \; V_2, \; \ldots \; V_n$$

равняется числу положительныхъ величинъ въ рядѣ

$$\frac{\Delta_1}{1}, \; \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \; \ldots \; \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Въ § 12 главы VII мы видѣли, что разложеніе квадратичной формы на сумму квадратовъ имѣетъ видъ

(4) $$G = \frac{\Delta_1}{1}\mathfrak{Y}_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\mathfrak{Y}_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\mathfrak{Y}_n^2$$

гдѣ $\mathfrak{Y}_i$ есть линейная функція отъ y_i съ вещественными коэффиціентами.

Итакъ, число перемѣнъ знака въ рядѣ Sturm'a (3) при $x=a$ будетъ равняться числу квадратовъ разложенія (4), имѣющихъ *положительные* коэффиціенты.

§ 19.

Поставимъ задачу Hermite'a самымъ общимъ образомъ, т. е. разсмотримъ квадратичную форму

(1) $$G = H(\alpha_1)Y_1^2 + H(\alpha_2)Y_2^2 + \ldots + H(\alpha_n)Y_n^2,$$

гдѣ $H(\alpha)$ есть произвольно выбранная раціональная функція отъ корня α съ вещественными коэффиціентами.

Коэффиціенты формы G будутъ теперь

(2) $$a_{ij} = \Sigma H(\alpha)\alpha^{i+j}.$$

Дискриминантъ формы G будетъ

$$\Delta_n = |\, H(\alpha)\alpha^{i}\,|_n$$

другими словами

$$\Delta_n = H(\alpha_1)H(\alpha_2)\ldots H(\alpha_n)D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$\Delta_k = \Sigma D(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k) H(\alpha_1) H(\alpha_2) \ldots H(\alpha_k),$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ сочетанія корней по k.

Дискриминантъ формы Δ_n отличенъ отъ нуля если всѣ корни α_i различные, а также ни одинъ изъ нихъ не обращаетъ функцію $H(\alpha)$ въ нуль.

Коэффиціенты (2) формы G, будучи симметрическими функціями отъ корней α_i, будутъ величинами вещественными.

Если всѣ корни α_i вещественные, то формулу (1) можно разсматривать, какъ каноническій видъ формы, ибо функціи Y_i всѣ независимыя между собой, такъ какъ ихъ опредѣлитель есть $D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, а корни α_i мы считаемъ всѣ различными.

Вещественному корню α_i будетъ соотвѣтствовать вещественный квадратъ линейной функціи

$$H(\alpha_i) Y_i^2.$$

Двумъ мнимымъ сопряженнымъ корнямъ α_i, α_k будетъ соотвѣтствовать совокупность двухъ квадратовъ

$$H(\alpha_i)Y_i^2 + H(\alpha_k)Y_k^2 = [Y_i\sqrt{H(\alpha_i)}]^2 + [Y_k\sqrt{H(\alpha_k)}] =$$

$$= (u + iv)^2 + (u - iv)^2 = 2u^2 - 2v^2,$$

гдѣ u и v линейныя функціи отъ y_i съ вещественными коэффиціентами.

Предполагая корни α_i различными, мы замѣчаемъ, что рангъ формы можетъ быть меньше n лишь въ томъ случаѣ, когда нѣсколько изъ $H(\alpha)$ равны нулю.

Обозначая черезъ ρ дополненіе ранга до n, черезъ π число положительныхъ квадратовъ въ каноническомъ представленіи формы, а черезъ ν число квадратовъ со знакомъ минусъ, получаемъ

$$n = \rho + \pi + \nu$$

Каждая пара мнимыхъ сопряженныхъ корней $\alpha_i\alpha_k$ даетъ одинъ положительный квадратъ $2u^2$ и одинъ отрицательный $-2v^2$.

Мы приходимъ къ такой общей теоремѣ.

Число ρ равно числу равныхъ нулю выраженій $H(\alpha_i)$.

Число π равно числу паръ мнимыхъ корней увеличенному на число вещественныхъ корней уравненія удовлетворяющихъ неравенству

$$H(\alpha_i) > 0.$$

Число ν равно числу паръ мнимыхъ корней увеличенному на число вещественныхъ корней уравненія, удовлетворяющихъ неравенству

$$H(a_i) < 0 .$$

§ 20.

Дѣлая различнымъ образомъ выборъ функціи H, будемъ получать различные результаты.

Такъ, напримѣръ, полагая $H = 1$, придемъ къ теоремѣ, которую мы доказали уже другимъ способомъ:

Число паръ мнимыхъ корней равно числу отрицательныхъ квадратовъ въ формѣ

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2,$$

и с равно числу перемѣнъ знака въ рядѣ чиселъ

$$1 , \Delta_1 , \Delta_2 , \ldots \Delta_n .$$

§ 21.

Предположеніе $H(\alpha) = \frac{1}{a - x}$, какъ мы видѣли, уже сводитъ дѣло къ функціямъ V_k и къ обычной формулировкѣ теоремы Sturm'a.

Такъ какъ число перемѣнъ знака въ рядѣ Sturm'a равно числу положительныхъ квадратовъ въ каноническомъ представленіи Hermite'овской квадратичной формы, то мы приходимъ къ теоремѣ:

Число перемѣнъ знака въ ряду Sturm'a при $x = a$ равно числу вещественныхъ корней бо́льшихъ a, сложенному съ числомъ паръ мнимыхъ корней

§ 22.

Такъ какъ функціи φ_k (см. § 10) обладаютъ свойствами функцій Sturm'a, то Hermite разсматриваетъ также соотвѣтствующій этимъ функціямъ случай $H = \alpha - x$.

Отдѣленіе мнимыхъ корней.

§ 23.

По аналогіи съ случаемъ вещественныхъ корней мы должны будемъ формулировать задачу отдѣленія мнимыхъ корней слѣдующимъ образомъ.

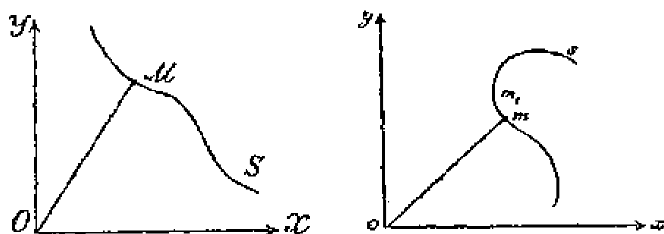
Мы будемъ говорить, что мнимый корень отдѣленъ, если въ плоскости независимаго перемѣннаго z указанъ такой сомкнутый контуръ, внутри котораго лежитъ только одинъ этотъ корень. Подобно тому, какъ для отдѣленія вещественныхъ корней важно было знать точное число корней въ каждомъ данномъ промежуткѣ, такъ для случая мнимыхъ корней является важнымъ знать пріемы для нахожденія точнаго числа мнимыхъ корней внутри даннаго сомкнутаго контура. Распространеніе соображеній, связанныхъ съ теоремой Sturm'а для случая вещественныхъ корней, на случай мнимыхъ корней принадлежитъ Cauchy.

§ 24.

Разсмотримъ двѣ плоскости, соотвѣтствующія независимому перемѣнному $z = x + iy$ и цѣлой функціи $f(z) = X + iY$, гдѣ X и Y суть цѣлыя функціи съ вещественными коэффиціентами отъ вещественныхъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Если независимая перемѣнная z будетъ перемѣщаться въ своей плоскости по нѣкоторой непрерывной кривой s, опредѣляемой уравненіями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

гдѣ t независимая перемѣнная, съ измѣненіемъ которой измѣняется положеніе точки на кривой s, то аффиксъ $f(z)$ въ другой плоскости будетъ перемѣщаться по нѣкоторой кривой S, опредѣляемой уравненіями



Черт. 7.

$$X = \Phi(t), \quad Y = \Psi(t).$$

Функціи Φ и Ψ получатся черезъ подстановку функцій φ и ψ вмѣсто x и y въ выраженія функцій X и Y. Вслѣдствіе непрерывности цѣлой функціи (см. стр. 15) мы замѣчаемъ, что непрерывному движенію точки m по кривой s будетъ соотвѣтствовать непрерывное перемѣщеніе точки M по кривой S

Вычисленіе модуля функціи, т. е. разстоянія точки M отъ начала координатъ, не представляетъ затрудненія.

Аргументъ функціи есть, какъ извѣстно, одна изъ дугъ, тангенсъ которой равенъ $\frac{Y}{X}$. Затрудненіе при вычисленіи аргумента представляется въ неопредѣленности функціи $\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$, т. е. въ указаніи кратности не-

ріода 2π, которую нужно прибавить къ значенію *arctg*, заключенному между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, для полученія требуемаго въ задачѣ. Во всемъ дальнѣйшемъ мы обойдемъ это затрудненіе, разсматривая не самый аргументъ функціи, а приращеніе этого аргумента, соотвѣтствующее непрерывному перемѣщенію точки m вдоль по кривой s. Очевидно, что, на основаніи непрерывности функціи, приращеніе аргумента функціи не зависитъ отъ кратности періода у начальнаго значенія *arctg*, соотвѣтствующаго начальной точкѣ m.

Мы будемъ разсматривать такія кривыя s плоскости независимаго перемѣннаго z, которыя не проходятъ ни черезъ одинъ изъ корней цѣлой функціи $f(z)$. Тогда для такихъ кривыхъ s соотвѣтственная кривая S не проходитъ черезъ соотвѣтствующее ей начало координатъ. Для такихъ кривыхъ аргументъ функціи измѣняется непрерывно.

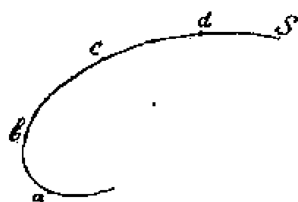
Аргументъ функціи претѣрпѣваетъ разрывъ непрерывности только въ томъ случаѣ, когда кривая S проходитъ черезъ свое начало координатъ. Въ этомъ случаѣ аргументъ при переходѣ точки M черезъ начало координатъ претѣрпѣваетъ разрывъ непрерывности, причемъ получаетъ сразу приращеніе равное $+\pi$ или $-\pi$.

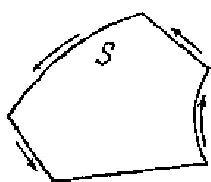
Итакъ, будемъ во всемъ дальнѣйшемъ разсматривать такіе контуры s, которые не проходятъ черезъ корни функціи $f(z)$.

Теорема Cauchy.

§ 25.

Лемма I. Приращеніе аргумента цѣлой функціи, соотвѣтствующее нѣкоторой дугѣ ad контура S равняется суммѣ приращеній аргументовъ частей этой дуги ab, bc, cd. Контуръ S можетъ имѣть угловыя точки и прямолинейныя части. Разсматривая сомкнутые контуры мы условимся движеніе вдоль сомкнутаго контура считать положительнымъ, если это движеніе оставляетъ слѣва часть плоскости, ограниченную этимъ контуромъ.

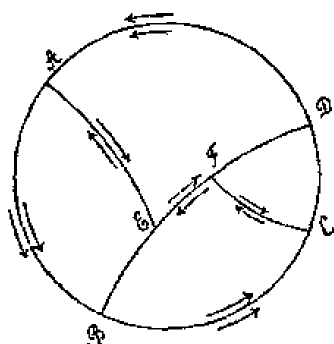




Черт. 8

Лемма II. Если мы заданный сомкнутый контуръ $ABCD$ разобьемъ на нѣсколько новыхъ, проводя различныя сѣкущія линіи BE, FD, AE, CF, ..., то приращеніе аргумента функціи, соотвѣтствующее положи-

тельному перемѣщенію вдоль всего контура, будетъ равно суммѣ приращеній аргумента функціи, получаемыхъ при положительныхъ обходахъ всѣхъ частичныхъ контуровъ.


Черт. 9.

Справедливость леммы слѣдуетъ изъ того, что при такомъ обходѣ частичныхъ контуровъ, каждая изъ сѣкущихъ линій, проведенныхъ внутри заданнаго контура, проходится два раза въ обратныхъ направленіяхъ.

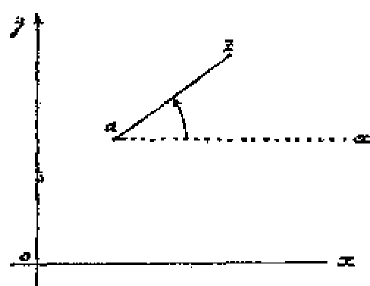
Лемма III. Приращеніе аргумента произведенія ряда цѣлыхъ функцій

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots\ f_n(z),$$

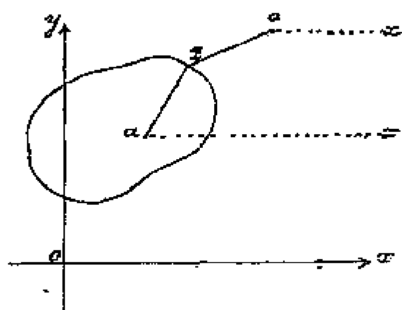
соотвѣтствующее перемѣщенію по нѣкоторой линіи S, равняется суммѣ приращеній аргументовъ отдѣльныхъ множителей.

Справедливость леммы слѣдуетъ изъ того, что аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ множителей.

Разсмотримъ приращеніе аргумента линейной функціи $z-a$, гдѣ a нѣкоторое постоянное число. Указывая точки a и z на плоскости комплекснаго перемѣннаго, мы замѣчаемъ, что аргументъ разности $z-a$ (съ точностью до кратности 2π) равняется углу, образованному съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ векторомъ az, начало котораго есть a. Условимся отсчитывать углы векторовъ съ осью x-овъ въ томъ же смыслѣ, какъ мы опредѣлили положительное направленіе при обходѣ сомкнутыхъ контуровъ.


Черт. 10.

Лемма IV. Приращеніе аргумента разности $z-a$ при обходѣ точкою z сомкнутаго контура равно 0, если контуръ не заключаетъ точки a, и равно 2π, если точка a внутри контура.


Черт. 11.

Это почти очевидно изъ чертежа. Въ самомъ дѣлѣ, въ какомъ бы мѣстѣ ни находилась точка a внутри контура S, или внѣ его, всегда аргументъ разности $z-a$ равняется углу zax, и, очевидно, когда точка z обойдетъ контуръ въ положительномъ направленіи и вернется

въ начальное положеніе, то уголъ zax, измѣняясь непрерывно, получитъ или приращеніе 2π, или 0, смотря по тому, будетъ ли точка a лежать внутри или внѣ контура S.

На основаніи доказанныхъ леммъ можно просто доказать основную теорему Cauchy.

Теорема. *Приращеніе аргумента цѣлой функціи $f(z)$, соотвѣтствующее обходу точкою z нѣкотораго сомкнутаго контура, равно $2k\pi$, гдѣ цѣлое число k равно числу корней функціи $f(z)$, лежащихъ внутри этого контура.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$f(x) = p_0(z-a_1)(z-a_2)\ \ldots\ (z-a_n),$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_n$ суть корни функціи $f(z)$. Получаемъ

$$arg\, f(z) = arg\, p_0 + arg\,(z-a_1) + \ldots + arg\,(z-a_n).$$

Каждый изъ аргументовъ $z-a_k$ получаетъ приращеніе равное 0 или 2π, судя по тому, лежитъ ли корень внѣ контура, или внутри контура. Отсюда аргументъ функціи получаетъ приращеніе такой кратности 2π, сколько корней лежитъ внутри контура.

§ 26

Будемъ называть *внѣшнимъ контуромъ совокупности n точекъ* плоскости такой замкнутый многоугольникъ безъ входящихъ угловъ, вершины котораго находятся въ заданныхъ точкахъ и всѣ заданныя точки лежатъ или внутри его или на его сторонахъ но не внѣ этого контура.

Очевидно, что легко для всякаго расположенія точекъ построить ихъ внѣшній контуръ. Понятіе о внѣшнемъ контурѣ можетъ быть обобщено на случай безчисленнаго множества точекъ [1]).

Теорема. *Корни производной $f'(z)$ находится внутри внѣшняго контура, соотвѣтствующаго корнямъ самой функціи $f(x)$.*

Для доказательства теоремы предположимъ, что за ось x-овъ взята одна изъ сторонъ внѣшняго контура, а ось y-овъ направлена подъ прямымъ угломъ въ ту сторону, съ которой лежитъ самъ контуръ. Тогда всѣ корни $x_k = a_k + \beta_k i$ функціи $f(x)$ имѣютъ не отрицательные мнимые коэффиціенты β_k, причемъ по крайней мѣрѣ два изъ нихъ равны нулю и кромѣ того, если мы не предполагаемъ всѣхъ корней вещественными, то надо допустить, что среди не отрицательныхъ чиселъ β_k есть отличныя отъ нуля.

[1]) *Д. Граве.* Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ. Сообщенія Харьковскаго Математ. Общ. т. VI.

Равенство

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{m_k}{x - x_k},$$

гдѣ m_k есть натуральное число, *выражающее* кратность корня x_k, даетъ, если въ него подставить корень $\xi + i\eta$ производной

$$\sum \frac{m_k}{(\xi - \alpha_k) + i(\eta - \beta_k)} = 0 .$$

Приравнивая нулю коэффиціентъ при i, получимъ

$$\sum \frac{(\beta_k - \eta) m_k}{(\xi - \alpha_k)^2 + (\eta - \beta_k)^2} = 0 .$$

Очевидно, что число η не можетъ быть *не положительнымъ* и теорема доказана.

§ 27.

Какъ частный случай предыдущей теоремы получаемъ.

Теорема. *Для уравненія третьей степени $f(x) = 0$ корни производной $f'(x)$ даютъ фокусы эллипса Steiner'а, вписаннаго въ треугольникъ, образованный какъ вершинами корнями заданнаго уравненія.*

Мы напомнимъ, что эллипсъ Steiner'а обладаетъ слѣдующими свойствами: 1, онъ касается сторонъ треугольника въ ихъ срединахъ, 2, центръ его совпадаетъ съ пересѣченіемъ медіанъ треугольника, 3, онъ имѣетъ наибольшую площадь изъ всѣхъ эллипсовъ, вписанныхъ въ треугольникъ.

Теорія индексовъ.

§ 28.

Покажемъ теперь правило для вычисленія приращенія аргумента цѣлой функціи при обходѣ независимымъ перемѣннымъ нѣкотораго сомкнутаго контура.

Обозначая $f(z) = X + iY$ мы замѣчаемъ, что аргументъ $f(z)$ есть одно изъ значеній угла, имѣющаго тангенсомъ функцію $\frac{Y}{X}$. Для опредѣленности разсужденій разсмотримъ случай, когда начальное значеніе X, соотвѣтсвующее нѣкоторой точкѣ описываемаго точкою z контура, есть число положительное; тогда за начальное значеніе φ_0 аргумента функціи можно будетъ принять дугу, имѣющую тангенсомъ $\frac{Y_0}{X_0}$ и заключенную въ границахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, ибо $X = \rho \cos \varphi_0$, гдѣ ρ есть модуль функціи.

Если при перемѣщеніи точки z по контуру функція X не обращается въ нуль, то дробь $\frac{Y}{X}$, которая есть функція отъ независимаго перемѣннаго t (см. стр. 415), не обращается въ ∞; а потому аргументъ, измѣняясь непрерывно, остается въ границахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, и, слѣдовательно, если мы обозначимъ черезъ φ_1 конечное значеніе аргумента, гдѣ число φ_1 заключается въ тѣхъ же границахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, то полное приращеніе аргумента равно $\varphi_1 - \varphi_0$.

Остается разсмотрѣть случай, когда аргументъ функціи, измѣняясь непрерывно, будетъ переходить черезъ крайніе предѣлы $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Аргументъ функціи перейдетъ черезъ $+\frac{\pi}{2}$, непрерывно возрастая, въ томъ случаѣ, если дробь $\frac{Y}{X}$ переходитъ черезъ ∞ отъ значеній положительныхъ къ значеніямъ отрицательнымъ; въ этомъ случаѣ можно сказать, что новое значеніе аргумента, бóльшее чѣмъ $+\frac{\pi}{2}$, можетъ быть выражено по формулѣ $\varphi = \pi + \psi$, гдѣ ψ есть уголъ, лежащій въ границахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, если $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, гдѣ ε нѣкоторое малое положительное число, то $\psi = \varphi - \pi = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon = -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Подобнымъ же образомъ, если дробь $\frac{Y}{X}$ переходитъ черезъ безконечность отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, то аргументъ φ, убывая, переходитъ черезъ $-\frac{\pi}{2}$, причемъ новое значеніе аргумента можетъ быть написано такъ $\varphi = -\pi + \psi$, гдѣ ψ уголъ, заключающійся въ тѣхъ же границахъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Итакъ, мы видимъ, что при переходѣ дроби $\frac{Y}{X}$ черезъ ∞ новое значеніе аргумента можетъ быть выражено такъ: $\varphi = \varepsilon_1\pi + \psi$, гдѣ ε_1 есть $+1$ при переходѣ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ и есть -1 при переходѣ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ. Если при дальнѣйшемъ перемѣщеніи z по контуру дробь $\frac{Y}{X}$ второй разъ обратится въ ∞, измѣняя свой знакъ, то аргументъ φ получитъ новое приращеніе $\varepsilon_2\pi$, гдѣ ε_2 есть $+1$ или -1,

так что $\varphi = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi + \psi$, гдѣ ψ заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. Предположимъ, что независимая перемѣнная z, обойдя контуръ, возращается въ начальную точку, причемъ дробь $\frac{Y}{X}$ мѣняетъ свой знакъ, проходя p разъ черезъ ∞; тогда получаемъ для искомаго аргумента такое число

$$\varphi = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi + \ldots + \varepsilon_p\pi + \psi_0,$$

гдѣ число ψ_0, очевидно, должно равняться начальному значенію аргумента φ_0. Отсюда мы видимъ, что полное приращеніе аргумента $\varphi - \varphi_0$ выражается по формулѣ

(1) $$\varphi - \varphi_0 = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi + \ldots + \varepsilon_p\pi.$$

Обозначая черезъ k число корней функціи, заключенныхъ внутри контура, описаннаго независимымъ перемѣннымъ z, получаемъ по теоремѣ Cauchy

(2) $$\varphi - \varphi_0 = 2k\pi.$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получаемъ для числа корней k выраженіе

$$k = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_p}{2}.$$

Если дробь $\frac{Y}{X}$, переходя p разъ черезъ ∞, переходитъ m разъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ и n разъ отъ отрицательныхъ къ положительнымъ, то среди чиселъ ε_i будетъ m равныхъ $+1$ и n равныхъ -1, и, слѣдовательно, получимъ

$$k = \frac{m - n}{2}.$$

Случай обращенія функціи $\frac{Y}{X}$ въ ∞ безъ перемѣны знака не вліяетъ на приращеніе аргумента.

Разсужденія останутся тѣми же, если мы значеніе аргументовъ φ и ψ будемъ разсматривать въ другой половинѣ, между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

§ 29.

Будемъ, по примѣру Cauchy, называть число $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$ *индексомъ* функціи $f(z)$ по контуру C, описанному точкою. Обозначая черезъ t_0 и t_1 начальное и конечное значеніе перемѣннаго t, при непрерывномъ измѣненіи котораго линія C была пройдена точкою t, будемъ обозначать индексъ функціи такъ

$$I_{t_0}^{t_1}\left(\frac{Y}{X}\right), \quad I_{t_0}^{t_1}\{F(t)\}.$$

Изъ опредѣленія индекса вытекаетъ, что индексъ функціи по нѣкоторой линіи C равенъ суммѣ индексовъ, соотвѣтствующихъ частямъ этой линіи; при этомъ предполагается, что всѣ части линіи C проходятся въ въ томъ же направленіи, въ какомъ была пройдена вся линія C.

Cauchy показалъ, что вычисленіе индекса можетъ быть сведено къ соображеніямъ, имѣющимъ прямую связь съ теоремою Sturm'а въ тѣхъ случаяхъ, когда X и Y суть цѣлыя функціи отъ t.

§ 30.

Символъ индекса обладаетъ слѣдующими основными свойствами.

Если степень цѣлой функціи относительно Y выше степени X, и мы обозначимъ черезъ Y_1 остатокъ отъ дѣленія полинома Y на полиномъ X, то будетъ

$$I\left(\frac{Y}{X}\right)=I\left(\frac{Y_1}{X}\right).$$

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ Q частное, получимъ

$$Y=QX+Y_1;$$

отсюда

$$\frac{Y}{X}=Q+\frac{Y_1}{X}.$$

Такъ какъ цѣлая функція сохраняетъ конечныя значенія при всевозможныхъ значеніяхъ независимаго перемѣннаго, то двѣ функціи $\frac{Y}{X}$ и $\frac{Y_1}{X}$ обращаются одновременно въ безконечность, причемъ достаточно большія значенія этихъ функцій совпадаютъ по знаку, и, слѣдовательно, у обѣихъ дробей

$$\frac{Y}{X} \text{ и } \frac{Y_1}{X}$$

будутъ одинаковые индексы.

Разсмотримъ двѣ обратныя дроби

$$\frac{Y}{X},\ \frac{X}{Y}.$$

Обозначимъ черезъ I индексъ первой дроби, а черезъ I_1 индексъ второй дроби. Покажемъ, что

$$I+I_1=\varepsilon,$$

гдѣ ε одно изъ чиселъ 0, $+1$, -1. Разсматривая первую дробь $\frac{Y}{X}$, мы замѣчаемъ, что для вычисленія индекса I надо разсматривать перемѣны знака дроби $\frac{Y}{X}$ при переходѣ черезъ безконечность, а I_1 будетъ соотвѣтствовать случаямъ перемѣны знака той же дроби при переходѣ ея черезъ нуль. Мы видимъ, что сумма $I+I_1$ будетъ равна разности между числомъ переходовъ дроби $\frac{Y}{X}$ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ и числамъ переходовъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ. Очевидно, что, если полиномы одного знака, какъ при начальномъ значеніи t_0 независимаго перемѣннаго, такъ и при конечномъ значеніи t_1, то дробь $\frac{Y}{X}$ положительна въ обоихъ случаяхъ, и, слѣдовательно, эта дробь проходитъ столь же разъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, какъ и обратно. Это значитъ, что сумма индексовъ, или, что одно и то же, число ε должно равняться нулю. Если дробь $\frac{Y}{X}$ при начальномъ значеніи t_0 была положительна, а при конечномъ t_1 отрицательна, то общее число переходовъ дроби отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ должно на единицу превышать число обратныхъ переходовъ т. е. $\varepsilon=1$; и, наконецъ, $\varepsilon=-1$, если начальное значеніе дроби отрицательное, а конечное значеніе положительное

Разсмотримъ дробь $\frac{X}{X_1}$, гдѣ степень числителя будемъ предполагать выше степени знаменателя. Раздѣлимъ X на X_1 и обозначимъ остатокъ отъ этого дѣленія съ перемѣной знака черезъ X_2; подобнымъ же образомъ черезъ X_3 обозначимъ остатокъ съ обратнымъ знакомъ отъ дѣленія X_1 на X_2. Продолжаемъ послѣдовательное вычисленіе функцій X_4, X_5, ... пока не дойдемъ до остатка X_n, равнаго постоянному числу. На основаніи выведеннаго раньше свойства, получаемъ

$$I\left(\frac{X_1}{X}\right)+I\left(\frac{X}{X_1}\right)=\varepsilon_1,$$

гдѣ ε_1 есть одно изъ чиселъ 0, $+1$, -1, кромѣ того имѣемъ

$$I\left(\frac{X}{X_1}\right)=I\left(\frac{-X_2}{X_1}\right)=-I\left(\frac{X_2}{X_1}\right),$$

значитъ, получаемъ

$$I\left(\frac{X_1}{X}\right)-I\left(\frac{X_2}{X_1}\right)=\varepsilon_1.$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, получаемъ рядъ равенствъ

$$I\left(\frac{X_2}{X_1}\right) \qquad I\left(\frac{X_3}{X_3}\right) = \varepsilon_2 ,$$

$$I\left(\frac{X_3}{X_2}\right) \qquad I\left(\frac{X_4}{X_3}\right) = \varepsilon_3 ,$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$I\left(\frac{X_{n-1}}{X_{n-2}}\right) - I\left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\right) = \varepsilon_{n-1} ,$$

$$I\left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\right) + I\left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right) = \varepsilon_n .$$

Такъ какъ X_n число постоянное, отличное отъ нуля, то дробь $\frac{X_{n-1}}{X_n}$ не обращается въ безконечность, и, слѣдовательно, $I\left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right) = 0$.

Отсюда, складывая полученныя нами равенства, найдемъ

$$I\left(\frac{X_1}{X}\right) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

На основаніи равенства

$$I\left(\frac{X_p}{X_{p-1}}\right) + I\left(\frac{X_{p-1}}{X_p}\right) = \varepsilon_p ,$$

мы замѣчаемъ что $\varepsilon_p = 0$, когда двѣ функціи X_{p-1} и X_p представляютъ или повтореніе знака, какъ при начальномъ значеніи t_0, такъ и при конечномъ значеніи t_1 или же въ обоихъ случаяхъ перемѣну знака; $\varepsilon_p = +1$, если двѣ функціи X_{p-1} и X_p при начальномъ значеніи представляютъ повтореніе знака, а при конечномъ перемѣну, и $\varepsilon_p = -1$, если, обратно, начальному значенію соотвѣтствуетъ перемѣна знака, а конечному повтореніе знака. Итакъ, если мы разсмотримъ рядъ функцій

(1) $$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots X_n ,$$

то составляя два ряда численныхъ значеній этихъ функціи при t_0 и t_1, мы замѣчаемъ, что индексъ $I\left(\frac{X}{X_1}\right)$ будетъ равенъ

$$P_v - V_p ,$$

гдѣ P_v есть число повтореній знака ряда для t_0, перешедшихъ въ пере-

мѣны въ ряду для t_1, а V_p число перемѣнъ знака ряда для t_0, перешедшихъ въ повтореніе знака для t_1. Обозначая черезъ V число перемѣнъ знака въ рядѣ для t_0, а черезъ V_1 число перемѣнъ знака въ рядѣ для t_1, мы, очевидно, получимъ

$$V_1 = V + P_v - V_p,$$

слѣдовательно,

$$P_v - V_p = V_1 - V.$$

Итакъ, получаемъ

$$I\left(\frac{X_1}{X}\right) = V_1 \quad V.$$

т. е. *индексъ дроби* $\frac{X_1}{X}$ равняется числу пріобрѣтеній перемѣнъ знака въ рядѣ функцій (1) при переходѣ отъ t_0 къ t_1

§ 31.

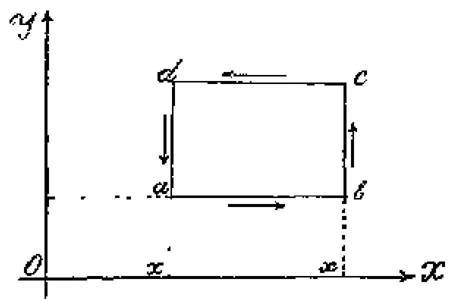
Самымъ удобнымъ способомъ на практикѣ для отдѣленія мнимыхъ корней является разсмотрѣніе прямоугольника со сторонами параллельными вещественной и мнимой оси, причемъ ставится задачею найти число корней уравненія

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

лежащихъ въ каждомъ изъ такихъ прямоугольниковъ.

Напримѣръ, если мы разсмотримъ прямоугольникъ *abca* со сторонами опредѣляемъ уравненіями

ab	$y = y_0$
bc	$x = x_1$
cd	$y = y_1$
da	$x = x_0$,



Черт. 12.

то при разсмотрѣніи измѣненія аргумента функціи вокругъ такого прямоугольника, намъ придется на сторонѣ ab брать $X = \varphi(x, y_0)$, $Y = \psi(x, y_0)$, гдѣ X и Y суть полиномы отъ одного независимаго перемѣннаго x, и нужно будетъ вычислить $I\left(\frac{Y}{X}\right)$ при измѣненіи независимаго перемѣннаго x отъ x_0 до x_1. Подобнымъ же образомъ на прямой bc придется положить $X = \varphi(x_1, y)$, $Y = \psi(x_1, y)$ и разсматривать измѣненіе y отъ y_0 до y_1. На третьей сторонѣ cd будетъ $X - \varphi(x, y_1)$, $Y - \psi(x, y_1)$ и x будетъ измѣняться отъ x_1 до x_0. Нако-

нецъ, на четвертой сторонѣ da будетъ $X = \varphi(x_0, y)$, $Y = \psi(x_0, y)$ и y мѣняется отъ y_1 до y_0.

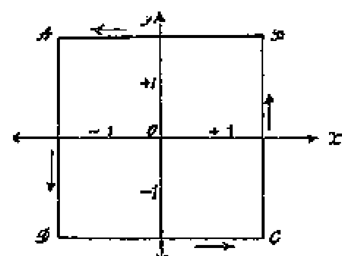
Число корней внутри прямоугольника равно полусуммѣ индексовъ для всѣхъ сторонъ прямоугольника.

§ 32.

Разсмотримъ численный примѣръ. Пусть дано уравненіе

$$z^4 - 5z + 1 = 0,$$

гдѣ $z = x + iy$. Поставимъ себѣ задачею найти число корней заданнаго уравненія, заключающихся въ квадратѣ, образованномъ прямыми



Черт. 13.

$$x_0 = -1, \quad x_1 = +1,$$

$$y_0 = \quad 1, \quad y_1 = +1.$$

Наше уравненіе можно представить въ видѣ

$$(x + iy)^4 - 5(x + iy) + 1 = 0,$$

или

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad 5x + 1 + i(4x^3y - 4xy^3 - 5y) = 0$$

Разсматривая сторону DC, соотвѣтствующую $y = -1$, получимъ

$$X = x^4 \quad 6x^2 - 5x + 2.$$

$$X_1 = -4x^3 + 4x + 5.$$

Остатокъ отъ дѣленія X на X_1, взятый съ обратнымъ знакомъ, будетъ

$$X_2 = 20x^2 + 15x - 8.$$

Слѣдующій остатокъ съ обратнымъ знакомъ будетъ $X_3 = \quad 3x \quad 124$, и, наконецъ, $X_4 = -301868$. Подставимъ въ рядъ функцій

(1) $$X, X_1, X_2, X_3, X_4,$$

1 и +1 и выпишемъ рядъ получившихся знаковъ

$$-1 \quad + + - - -$$

$$+1, - + +$$

Изъ этой таблицы видно, что число пріобрѣтеній перемѣнъ знака въ ряду функцій (1) при переходѣ x отъ -1 до $+1$ равно 1, слѣдовательно, индексъ для стороны DC равенъ 1.

Для стороны BA, гдѣ $y = +1$, мы можемъ не вычислять ряда функцій, а, замѣтивъ, что она проходится въ направленіи обратномъ DC, написать знаки обратные знакамъ предыдущей таблицы

$$\begin{array}{ccccc} +1 & - & - & + + + \\ -1 & + & & - + + \end{array}$$

Для стороны BA индексъ равняется также 1.

Разсмотримъ сторону CB, соотвѣтствующую $x = +1$. Получимъ

$$X = y^4 - 6y^2 - 3,$$

$$X_1 = \quad 4y^3 - y,$$

$$X_2 = 25y^2 + 12,$$

$$X_3 = \quad 23y, \; X_4 = -276.$$

Рядъ знаковъ будетъ

$$\begin{array}{ccccc} -1 & - & + + + & - \\ +1 & - & + & - \end{array}$$

Число пріобрѣтеній перемѣнъ знака здѣсь равняется нулю; слѣдовательно, индексъ для стороны CB равенъ нулю.

Для стороны AD, соотвѣтствующей $x = -1$, получимъ

$$X = y^4 - 6y^2 + 7,$$

$$X_1 = 4y^3 - 9y,$$

$$X_2 = 15y^2 - 28,$$

$$X_3 = 23y. \; X_4 = 644.$$

Рядъ знаковъ будетъ

$$\begin{array}{ccccc} +1 & + & - - & + + \\ -1 & + + & & - + \end{array}$$

Индексъ для этой стороны также равенъ нулю.

Такъ какъ число корней равно полусуммѣ индексовъ для всѣхъ сторонъ прямоугольника $ABCD$, то въ разсматриваемомъ нами прямоугольникѣ число корней будетъ 1.

§ 33.

Изложенныя изслѣдованія Cauchy завершаются знаменитымъ обобщеніемъ на случай произвольной функціи $f(z)$ комплекснаго перемѣннаго z.

Если функція $f(z)$ регулярная для всѣхъ точекъ внутри контура C то, обозначая черезъ N число нулей $f(z)$ внутри C, получимъ

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\,,$$

гдѣ интегралъ распространяется на контуръ C [1])

Теорія Kronecker'а.

§ 34.

Теорія Cauchy оказалась частнымъ случаемъ болѣе общей теоріи, созданной Kronecker'омъ и названной имъ теоріей *характеристикъ*. Эта теорія замѣчательна тѣмъ, что распространяетъ соображенія связанныя съ теоремой Sturm'а на случаи функцій многихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Пусть заданы двѣ вещественныя алгебраическія линіи уравненіями

$$\varphi(x,\ y) = 0\,,\ \psi(x,\ y) = 0\,.$$

Во всѣхъ элементарныхъ курсахъ приложеній дифференціальнаго исчисленія къ геометріи доказываются формулы

$$(1)\qquad \frac{dx}{ds} = -\frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}\,,\ \frac{dy}{ds} = \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}\,,$$

гдѣ для сокращенія обозначено

$$\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,,\ \psi_2 = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,,$$

а дифференціалы dx, dy берутся при положительности дифференціала ds, т. е. они выражаютъ перемѣщеніе вдоль по кривой $\psi = 0$ соотвѣтствующее возрастанію дуги. Мы будемъ предполагать, что всѣ алгебраическія кривыя $f = 0$, которыя мы будемъ разсматривать, заданы такъ, что функція f, равная нулю вдоль по кривой отрицательна съ одной стороны и положительна съ другой ея стороны. Если мы будемъ предполагать кривую $f = 0$ замкнутою и дѣлящею всю плоскость на двѣ части: *внутреннюю и внѣшнюю*, то мы будемъ предполагать существованіе неравенства

[1]) Д. Граве. Элементы теоріи эллиптическихъ функцій 1910, стр. 53.

$f < 0$ для внутренней части. Мы знаемъ, что такимъ свойствомъ обладаютъ простѣйшія уравненія круга и эллипса.

Если считать корень квадратный въ формулахъ (1) *положительнымъ*, то получится тотъ обходъ по контуру $\psi = 0$, при которомъ внутренняя часть контура ($\psi < 0$) остается налѣво.

Разсмотримъ дифференціалъ

$$d\varphi = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy$$

и подставимъ сюда значенія дифференціаловъ, взятыя изъ (1); получимъ

(2)
$$d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} |\psi_1 \varphi_2|,$$

гдѣ

$$|\psi_1 \varphi_2| = \psi_1 \varphi_2 - \varphi_1 \psi_2 .$$

Мы введемъ обозначеніе *зн. u*, причемъ подъ этимъ символомъ будемъ разумѣть $+1$, если u число положительное и -1, если u — отрицательно. Символъ *зн. u* будемъ читать—*знакъ величины u*. Формула (2) въ связи съ выше поставленными предположеніями дастъ

$$\text{зн. } d\varphi = \text{зн.} |\psi_1 \varphi_2| .$$

§ 35.

Двигаясь по замкнутому контуру $\psi = 0$ въ указанномъ направленіи, мы будемъ встрѣчать линію $\varphi = 0$ въ нѣкоторыхъ точкахъ M.

Если въ точкѣ M будетъ существовать неравенство $\psi_1 \varphi_2 - \varphi_1 \psi_2 > 0$, то будетъ также $d\varphi > 0$ и значитъ при переходѣ черезъ точку M мы идемъ изъ части плоскости, гдѣ $\varphi < 0$, въ ту часть, гдѣ $\varphi > 0$. При $\psi_1 \varphi_2 - \varphi_1 \psi_2 < 0$ происходитъ явленіе обратное.

Случай $\psi_1 \varphi_2 - \varphi_1 \psi_2 = 0$ мы не будемъ разсматривать, ибо не будемъ никогда предполагать въ нашемъ изложеніи, что три алгебраическія кривыя встрѣчаются въ одной точкѣ.

Очевидно, что при движеніи по замкнутому обходу, когда это движеніе оканчивается въ той же точкѣ, изъ которой началось, будетъ имѣть мѣсто равенство

(1)
$$\sum \text{зн. } d\varphi = 0 .$$

Въ самомъ дѣлѣ, если путешественникъ при своемъ движеніи переходитъ нѣсколько разъ черезъ границу двухъ сосѣднихъ странъ A и B, причемъ оканчиваетъ движеніе въ той же странѣ, изъ которой началъ, то онъ долженъ перейти столько же разъ границу изъ страны A въ

страну B сколько разъ изъ B въ A. Въ лѣвой части равенства (1) будетъ столько же членовъ $+1$, сколько 1

Мы можемъ написать равенство

(2) $$\sum \text{зн.} |\psi_1\varphi_2| = 0$$

равносильное равенству (1)

§ 36.

Возьмемъ теперь кромѣ алгебраическихъ линій $\varphi = 0$, $\psi = 0$ еще третью $f(x \,.\, y) = 0$

Будемъ предполагать кривую f замкнутою и будемъ разсматривать ея точки встрѣчи съ кривою

$$\varphi\psi = 0,$$

представляющею совокупность двухъ кривыхъ $\varphi = 0$, $\psi = 0$

Очевидно, что равенство (1) § 34 напишется такъ

$$\sum \text{зн.} \, d(\varphi\psi) = 0,$$

$$(f = 0, \; \varphi\psi = 0)$$

нижними формулами мы подчеркиваемъ тотъ фактъ, что сумма распространяется на всѣ точки встрѣчи двухъ линій $f = 0$ и $\varphi\psi = 0$. Раздѣляя эти точки встрѣчи на двѣ части: на точки встрѣчи $f = 0$, $\varphi = 0$ и на точки встрѣчи $f = 0$, $\psi = 0$, получимъ

$$\sum \text{зн.} \, d(\varphi\psi) + \sum \text{зн} \; d(\varphi\psi) = 0$$

$$(f = 0, \;\; \varphi = 0)(f = 0, \;\; \psi = 0)$$

Но при $\varphi = 0$

$$d(\varphi\psi) = \varphi d\psi + \psi d\varphi = \psi d\varphi,$$

а при $\psi = 0$

$$d(\varphi\psi) = \varphi d\psi + \psi d\varphi = \varphi d\psi.$$

Слѣдовательно

$$\sum \text{зн.} \, \psi d\varphi + \sum \text{зн.} \, \varphi d\psi = 0$$

$$(f = 0, \; \varphi = 0)(f = 0, \; \psi = 0),$$

или иначе

$$\sum \text{зн.} \, \psi |f_1\varphi_2| + \sum \text{зн.} \, \varphi |f_1\psi_2| = 0$$

$$(f = 0, \; \varphi = 0)(f = 0, \; \psi = 0)$$

или, что одно и тоже,

(1) $$\sum \text{зн} \,.\, \psi |f_1\varphi_2| = \sum \text{зн} \,.\, \varphi |\psi_1 f_2|$$

$$(f = 0, \; \varphi = 0)(f = 0, \; \psi = 0).$$

Сдѣлаемъ транспозицію функцій f и φ оставляя ψ безъ измѣненія

$$\sum_{(f=0\,,\ \varphi=0)} зн.\, \psi\, |\varphi_1 f_2| = \sum_{(\varphi=0\,,\ \psi=0)} зн.\, f\, |\psi_1\varphi_2|$$

или иначе

(2)
$$\sum_{(f=0\,,\ \varphi=0)} зн.\, \psi\, |f_1\varphi_2| = \sum_{(\varphi=0\,,\ \psi=0)} зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2|\,.$$

Сопоставляя (1) и (2), получимъ тройную формулу

$$\sum зн.\, \psi\, |f_1\varphi_2| = \sum зн.\, \varphi\, |\psi_1 f_2| = \sum зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2| = 2k\,,$$

гдѣ черезъ $2k$ обозначена общая величина трехъ равныхъ между собою суммъ.

Оказывается, что число k всегда *цѣлое*; это число Kronecker называетъ *характеристикой* системы функцій $(f;\ \varphi,\ \psi)$.

Для того чтобы доказать, что число k цѣлое, достаточно показать, что сумма

$$\sum_{(\varphi=0\,,\ \psi=0)} зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2|$$

число всегда четное.

Разобьемъ всѣ точки встрѣчи $\varphi=0$ и $\psi=0$ на двѣ категоріи, когда $f<0$ и $f>0$.

Имѣемъ

$$\sum_{(\varphi=0\,,\ \psi=0)} зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2| = \sum_{f>0} зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2| + \sum_{f<0} зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2|$$

(3)
$$\sum зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2| = \sum_{(f>0)} зн.\, |\varphi_1\psi_2| - \sum_{(f<0)} зн.\, |\varphi_1\psi_2|\,.$$

Равенство (2) § 34 можно будетъ переписать такъ

(4)
$$0 = \sum_{(f>0)} зн.\, |\varphi_1\psi_2| + \sum_{(f<0)} зн.\, |\varphi_1\psi_2|\,.$$

Вычитая (4) изъ (3) получимъ

$$\sum зн.\, f\, |\varphi_1\psi_2| = -2\sum_{(f<0)} зн.\, |\varphi_1\psi_2|$$

откуда приходимъ окончательно къ равенству

$$(5) \qquad k = \sum зн. |\varphi_1\psi_2| \qquad (f < 0,\ \varphi = 0,\ \psi = 0),$$

показывающему, что характеристика есть дѣйствительно цѣлое число.

§ 37

Примѣнимъ теперь понятіе о характеристикѣ къ нахожденію мнимыхъ корней уравненія

$$(1) \qquad F(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = 0,$$

лежащихъ внутри сомкнутаго контура

$$f(x, y) = 0.$$

Дифференцируя тождество (1) по x и y, получимъ

$$F'(x + iy) = \varphi_1 + i\psi_1$$

$$iF'(x + iy) = \varphi_2 + i\psi_2,$$

откуда

$$i\varphi_1 - \psi_1 = \varphi_2 + i\psi_2,$$

такъ что

$$\psi_1 = -\varphi_2,\ \psi_2 = \varphi_1.$$

Въ этомъ случаѣ

$$|\varphi_1\psi_2| = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 > 0$$

формула (5) предыдущаго параграфа дастъ

$$k = \sum (+1) \qquad (f < 0,\ \varphi = 0,\ \psi = 0)$$

И мы приходимъ къ теоремѣ.

Число корней уравненія $F(z) = \varphi + i\psi = 0$, лежащихъ внутри сомкнутаго контура $f = 0$ равно характеристикѣ системы трехъ функцій $(f;\ \varphi,\ \psi)$.

§ 38.

Очевидно, что кривыя $\varphi = 0$, $\psi = 0$, представляющія вещественную и мнимую часть алгебраическаго уравненія $F(x + iy) = 0$ не могутъ быть сомкнутыми, ибо равенство

$$\sum зн. |\varphi_1\psi_2| = 0$$

не можетъ удовлетворяться по причинѣ $|\varphi_1\psi_2| > 0$.

Дѣйствительно, обѣ кривыя $\varphi=0$, $\psi=0$ имѣютъ безконечныя вѣтви съ прямолинейными асимптотами. Направленія асимптотъ найдутся изъ слѣдующихъ соображеній.

Пусть

$$F(z)=z^n+p_1z^{n-1}+p_2z^{n-2}+\ldots$$

и положимъ

$$z=r(Cos\,\theta+i\,Sin\,\theta),$$

тогда получимъ

$$\varphi=r^n Cos\,n\theta+p_1r^{n-1}Cos\,(n-1)\theta+\ldots,$$

$$\psi=r^n Sin\,n\theta+p_1r^{n-1}Sin\,(n-1)\theta+\ldots;$$

уравненія $\varphi=0$ и $\psi=0$ по раздѣленію на r^n примутъ видъ

$$Cos\,n\theta+p_1\frac{1}{r}Cos\,(n-1)\theta+p_2\frac{1}{r^2}Cos\,(n-2)\theta+\ldots=0$$

$$Sin\,n\theta+p_1\frac{1}{r}Sin\,(n-1)\theta+p_2\frac{1}{r^2}Sin\,(n-2)\theta+\ldots=0.$$

При $r=\infty$, получаемъ

(1) $$Cos\,n\theta=0,\ Sin\,n\theta=0.$$

Линія $\varphi=0$ имѣетъ асимптоты, проходящія черезъ начало координатъ и опредѣляемыя уравненіемъ $Cos\,n\theta=0$, что даетъ

$$n\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Получается *звѣзда* прямыхъ линій, дѣлящихъ окружность 2π на $2n$ равныхъ частей. Асимптоты для $\psi=0$ опредѣляются уравненіемъ $Sin\,n\theta=0$ и даютъ звѣзду, состоящую изъ бисекторовъ угловъ предыдущей звѣзды.

Нетрудно видѣть, что нашъ результатъ, полученный при вещественныхъ p_i, имѣетъ мѣсто и въ общемъ случаѣ комплексныхъ p_i, ибо уравненія (1) получаются изъ старшихъ членовъ предыдущихъ уравненій.

§ 39.

Соображенія предыдущаго параграфа въ связи съ теоріей характеристикъ даютъ простое доказательство теоремы, что всякое уравненіе n-ой степени имѣетъ n корней. Это доказательство по идеѣ своей близко къ первому доказательству Gauss'a, публикованному имъ въ 1799 въ его докторской диссертаціи: Demonstratio nova Theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii.

Первая попытка строго доказать основную теорему алгебры принадлежитъ D'Alembert'у [1]. Gauss въ своей диссертаціи указываетъ на недостатки доказательствъ его предшественниковъ: D'Alembert'a, Euler'a, de Foncenex и Langrange'a. Впослѣдствіи Gauss [2]) далъ три новыхъ доказательства той же теоремы. Мы дали въ § 1 Главы II доказательство принадлежащее Cauchy и основанное на приложеніи теоремы Weierstrass'a.

Докажемъ теперь туже теорему при помощи теоріи характеристикъ.

Возьмемъ за контуръ $f=0$ кругъ безконечно большого радіуса съ центромъ въ началѣ координатъ. На основаніи соображеній § 35 мы видимъ, что

$$k = -\frac{1}{2}\sum зн.\, d(\varphi\psi)$$

$$(f=0\,,\ \varphi=0)\,.$$

При безконечно большомъ радіусѣ круга безконечныя вѣтви кривыхъ $\varphi=0$, $\psi=0$ могутъ быть замѣнены звѣздами асимптотъ.

Не трудно сообразить, что, если мы будемъ двигаться по кругу въ такомъ направленіи, что внутренняя его часть будетъ находиться налѣво, то мы будемъ пересѣкать безконечныя вѣтви кривой $\varphi=0$ такимъ образомъ, что въ этихъ точкахъ пересѣченія произведеніе $\varphi\psi$ будетъ мѣнять свой знакъ въ смыслѣ перехода отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ

$$зн.\, d(\varphi\psi) = -1$$

$$(f=0\,,\ \varphi=0)$$

Принимая во вниманіе, что число асимптотъ есть n, что кругъ встрѣчаетъ каждую изъ нихъ два раза, получимъ

$$k = -\frac{1}{2}(-2n) = n$$

и теорема доказана.

§ 40.

Теорія Kronecker'a можетъ быть обобщена на случай n мѣрнаго пространства. Можно разсматривать n сверхповерхностей

$$\varphi=0\,,\ \psi=0\,,\ \ldots\,\omega=0$$

---

[1]) D'Alembert. Recherches sur le calcul intégrale. Histoire de l'acad. de Berlin. 1746.

[2]) Gauss. Ges. Werke. B. III, s. 31, 57, 71.

и искать, сколько ихъ точекъ пересѣченія заключаются внутри сомкнутой сверхповерхности $f=0$.

Изслѣдованія Hurwitz'a.

§ 41.

Разсмотримъ, какъ послѣднее примѣненіе характеристикъ интересныя изслѣдованія Hurwitz'a [1]) объ уравненіяхъ, всѣ корни которыхъ имѣютъ отрицательныя вещественныя части. Задача эта была Hurwitz'у предложена техникомъ Stodola по поводу одного вопроса, касающагося турбинъ.

Очевидно, что въ разсматриваемомъ случаѣ всѣ корни лежатъ внутри полукруга, ограниченнаго полуокружностью безконечно большого радіуса и осью y-овъ.

Какъ мы видѣли, на этой полуокружности окажется n точекъ встрѣчи съ линіей $\varphi=0$ такихъ, что

$$зн.\, d(\varphi\psi) = \quad 1,$$

а потому для полученія формулы

$$\sum зн.\, d(\varphi\psi) = \quad 2n$$

необходимо допустить, что существуетъ n точекъ встрѣчи оси y-овъ съ линіей $\varphi=0$ причемъ надо двигаться по оси y-овъ отъ $y=-\infty$ до $y=+\infty$.

Для того чтобы всѣ корни функціи $\varphi(0, y)$ были вещественные и чтобы при каждомъ корнѣ y_0 дифференціалъ $d(\varphi(0, y)\psi(0, y))$ имѣлъ знакъ —, необходимо, чтобы корни функцій $\varphi(0, y)$ и $\psi(0, y)$ перемежались. Раздѣляя функцію меньшей степени на функцію большей, получимъ

$$(1) \qquad \frac{\psi(0, y)}{\varphi(0, y)} = \frac{s_0}{y} + \frac{s_1}{y^2} + \frac{s_2}{y^3} + \ldots$$

Равенства (7) § 10 показываютъ, что, если перемежаются корни полиномовъ $\psi(0, y)$ и $\varphi(0, y)$, то будутъ перемежаться корни всѣхъ рядомъ стоящихъ полиномовъ ряда знаменателей подходящихъ дробей непрерывной дроби, въ которую разлагается дробь (1).

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ сказаннаго будетъ очевидно, положительность всѣхъ опредѣлителей Δ_k Маркова (см. § 10) Вы-

---

[1]) Mathématische Annalen B. 46

ражая въ этомъ случаѣ опредѣлители Δ_k черезъ коэффиціенты p_i полинома

$$F(z) = \varphi + i\psi = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

и предполагая всѣ p_i вещественными, придемъ къ теоремѣ Hurwitz'a.

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ для того, чтобы уравненіе $F(z) = 0$ имѣло только такіе корни, у которыхъ вещественная часть отрицательная, состоитъ въ томъ, чтобы были положительны: опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

и всѣ его главные миноры, образованные нѣкоторымъ числомъ верхнихъ горизонталей и тѣмъ же числомъ лѣвыхъ колоннъ.

ГЛАВА XII.

О вычисленіи корней.

§ 1

Въ предыдущихъ главахъ мы изучили много свойствъ корней алгебраическихъ уравненій, причемъ существованіе этихъ корней нами было доказано въ двухъ мѣстахъ. Теперь мы займемся разсмотрѣніемъ пріемовъ численнаго вычисленія корней уравненій, у которыхъ коэффиціенты заданы численно.

Существуютъ довольно много пріемовъ такого вычисленія, данныхъ въ разное время различными авторами. Всѣ существующіе пріемы вычисленія корней можно подраздѣлить на двѣ главныя категоріи: одни пріемы совершенно общаго характера и относятся одинаково какъ къ алгебраическимъ такъ и къ трансцендентнымъ уравненіямъ; другіе же основаны на спеціальныхъ свойствахъ уравненій алгебраическихъ.

Казалось бы, что въ курсѣ алгебры должны быть помѣщены главнымъ образомъ эти вторые пріемы Я былъ однако другого мнѣнія при выборѣ матерьяла этой главы. Считаю необходимымъ высказать сужденія, которыми я руководился.

Если главу о вычисленіи корней понимать въ томъ смыслѣ, что ея цѣль дать изучающему наиболѣе практичный способъ приближеннаго вычисленія корней, тогда надо изложить тотъ способъ, практическое значеніе котораго въ настоящее время, дѣйствительно, внѣ всякаго сомнѣнія, т. е., способъ Gräffe, усовершенствованный Enke

Не желая однако излагать его въ моей книгѣ во всей подробности, я руководствовался такими соображеніями Основанный на простой мысли, способъ Enke тогда лишь заслуживаетъ вниманія, когда при изложеніи показанъ подробно процессъ вычисленія корней на рядѣ численныхъ примѣровъ. Такое изложеніе этого способа находится въ книгѣ, извѣстнаго

знатока всевозможныхъ пріемовъ приближеннаго вычисленія и конструктора машинъ для рѣшенія труднѣйшихъ вопросовъ интегральнаго исчисленія, профессора морской Академіи А. Н. Крылова подъ заглавіемъ: „Лекціи о приближенныхъ вычисленіяхъ“ СПБ. 1911. Для меня не оставалось бы ничего другого, какъ переписать прекрасное и достаточно подробное изложеніе автора, занимающее въ его книгѣ 47 страницъ. Этого я не могу сдѣлать, во первыхъ, потому что моя книга имѣетъ и безъ того большой объемъ, во вторыхъ, потому что я предназначаю мою книгу для изучающихъ чистую математику, а не для техниковъ.

Изучающимъ чистую математику важнѣе познакомиться не съ техникой вычисленія, а съ идеями, на которыхъ основанъ самъ пріемъ вычисленія. Лицамъ, желающимъ быстро вычислять по семизначнымъ логариѳмамъ вещественные и мнимые корни заданнаго уравненія, можно порекомендовать книгу Крылова, тѣмъ болѣе, что эта книга заслуживаетъ вниманія не только по изложенію способа Graffe, но также и по богатству другихъ свѣдѣній, которыя она даетъ.

Предназначая далѣе мою книгу для учащихся въ русскихъ университетахъ, которымъ читается *исчисленіе конечныхъ разностей*, какъ особенный предметъ, я считаю возможнымъ не излагать пріемовъ вычисленія корней, основаннаго на примѣненіи разностнаго исчисленія.

Итакъ, я изложу лишь пріемы, имѣющіе значеніе по важнымъ слѣдствіямъ, а также сыгравшіе извѣстную роль въ исторіи науки, или же связанные съ именами первоклассныхъ ученыхъ.

Для болѣе подробнаго знакомства съ исторіей пріемовъ приближеннаго вычисленія корней можно посовѣтовать статью Runge „Separation und Approximation der Wurzeln“, помѣщенную въ Encyklopedie der Math. Wiss. Band I Teil I. Heft 4

Нахожденіе соизмѣримыхъ корней.

§ 2.

Разсматривая уравненія съ раціональными коэффиціентами, мы можемъ, освободившись отъ знаменателей, привести всегда такія уравненія къ такому виду, что всѣ ихъ коэффиціенты будутъ цѣлые.

Итакъ, будемъ разсматривать уравненія съ цѣлыми коэффиціентами, причемъ будемъ предполагать, конечно, что не существуетъ общихъ дѣлителей у коэффиціентовъ.

Покажемъ, что, *если коэффиціентъ у старшей степени равенъ единицѣ, а всѣ остальные коэффиціенты цѣлые, то, если уравненіе имѣетъ раціональные корни, то эти корни могутъ быть только цѣлые.*

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ уравненіе

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Допустимъ, что это уравненіе имѣетъ раціональный корень

$$x = \frac{b}{a},$$

гдѣ дробь $\frac{b}{a}$ несократимая, а число $a > 1$

Покажемъ, что тогда приходимъ къ противорѣчію. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя $\frac{b}{a}$ въ уравненіе и умножая на a^{n-1}, получимъ

$$\frac{b^n}{a} = -p_1b^{n-1} - p_2b^{n-2}a - \ldots - p_{n-1}ba^{n-2} - p_na^{n-1};$$

послѣднее равенство невозможно, ибо оно даетъ равенство несократимой дроби, стоящей въ лѣвой части, цѣлому числу, стоящему въ правой.

Мы видимъ, слѣдовательно, что знаменатель a долженъ равняться единицѣ, и раціональный корень долженъ быть цѣлымъ.

Если коэффиціентъ при старшей степени будетъ цѣлое число, отличное отъ единицы, тогда уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами не можетъ имѣть раціональныхъ цѣлыхъ корней, а только дробные.

Покажемъ, что всегда можно свести разысканіе раціональныхъ рѣшеній на разысканіе цѣлыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ задано уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0. \tag{1}$$

Умножая уравненіе (1) на α^n, гдѣ α нѣкоторое цѣлое число, и замѣняя

$$x\alpha = y,$$

получимъ

$$y^n + \frac{p_1\alpha}{p_0}y^{n-1} + \ldots + \frac{p_{n-1}\alpha^{n-1}}{p_0}y + \frac{p_n\alpha^n}{p_0} = 0, \tag{2}$$

Остается подобрать α такимъ образомъ, чтобы были числами цѣлыми такія выраженія

$$\frac{p_1\alpha}{p_0}, \frac{p_2\alpha^2}{p_0}, \ldots \frac{p_n\alpha^n}{p_0},$$

тогда, очевидно, уравненіе (2) можетъ имѣть только цѣлые раціональные корни. Что касается выбора числа α, то, очевидно, что за это число можно принять p_0, но иногда бываетъ возможнымъ указать число меньшее

Итакъ, займемся рѣшеніемъ задачи нахожденія цѣлыхъ корней уравненія съ цѣлыми коэффиціентами

$$(3)\qquad x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0,$$

гдѣ первый коэффиціентъ равенъ единицѣ.

Если уравненіе (3) имѣетъ цѣлый корень a, то первая его часть дѣлится на $x-a$; обозначимъ частное, происходящее отъ дѣленія такъ

$$\varphi(x) = x^{n-1} - q_1 x^{n-2} - q_2 x^{n-3} - \ldots - q_{n-1},$$

тогда, умножая частное на $x-a$ и сравнивая съ коэффиціентами уравненія (3), получимъ рядъ равенствъ

$$\begin{aligned} p_n &= aq_{n-1}, \\ p_{n-1} &= aq_{n-2} - q_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_2 &= aq_1 - q_2, \\ p_1 &= -a - q_1. \end{aligned}$$

Отсюда получаемъ, переписывая эти равенства въ такомъ видѣ

$$(4)\qquad \begin{aligned} q_{n-1} &= \frac{p_n}{a}, \\ q_{n-2} &= \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{a}, \\ q_{n-3} &= \frac{p_{n-2} + q_{n-2}}{a}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ q_1 &= \frac{p_2 + q_2}{a}, \\ -1 &= \frac{p_1 + q_1}{a}, \end{aligned}$$

слѣдующее правило для провѣрки, будетъ ли цѣлое число a корнемъ разсматриваемаго уравненія. Составляемъ слѣдующую таблицу, въ которой въ первомъ ряду пишемъ по порядку убыванія степени коэффиціенты разсматриваемаго уравненія

$$\begin{array}{llllll} 1 & p_1 & \ldots & p_{n-2} & p_{n-1} & p_n \quad a \\ +1 & \ldots & -q_{n-3} & -q_{n-2} & -q_{n-1} & \end{array}$$

Первое изъ равенствъ (4) показываетъ, что корень a долженъ быть дѣлителемъ послѣдняго коэффиціента p_n; частное q_{n-1} отъ дѣленія дастъ послѣ перемѣны знака послѣдній коэффиціентъ функціи $\varphi(x)$, который напишемъ на послѣднемъ мѣстѣ во второмъ рядѣ таблицы. Вычитая этотъ послѣдній членъ второго ряда таблицы изъ предпослѣдняго члена p_{n-1} перваго ряда, мы должны получить разность $p_{n-1} + q_{n-1}$, которая дѣлится нацѣло на a; если такое дѣленіе нацѣло не совершится, то число a не будетъ корнемъ разсматриваемаго уравненія. Обозначая черезъ q_{n-2} частное отъ дѣленія $p_{n-1} + q_{n-1}$ на a, получимъ второй съ конца коэффиціентъ—q_{n-2} функціи $\varphi(x)$, который помѣщаемъ на второмъ мѣстѣ справа во второмъ ряду таблицы. Вычитая этотъ коэффиціентъ изъ третьяго справа коэффиціента перваго ряда, дѣля на a полученную разность и перемѣняя знакъ, получимъ третій справа коэффиціентъ второго ряда. Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы убѣдимся, что цѣлое число a есть корень уравненія въ томъ случаѣ, когда всѣ послѣдовательныя дѣленія совершатся нацѣло и когда n-ый коэффиціентъ второго ряда будетъ равенъ $+1$.

Отсюда получается такой способъ находить цѣлые корни уравненія: выписываемъ всѣхъ дѣлителей послѣдняго коэффиціента p_n съ тѣмъ и другимъ знакомъ; изъ этихъ дѣлителей, очевидно, могутъ быть корнями только тѣ, которые лежатъ въ границахъ, указываемыхъ предѣлами вещественныхъ корней, только такіе дѣлители подлежатъ провѣркѣ указаннымъ выше путемъ.

Обозначая первую часть заданнаго уравненія черезъ $f(x)$, получимъ

$$\frac{f(x)}{x-a} = \varphi(x);$$

подставляя сюда, вмѣсто x значенія $+1$ или -1, получимъ

$$\frac{f(\pm 1)}{a \mp 1} = -\varphi(\pm 1),$$

но $\varphi(\pm 1)$ есть число цѣлое, поэтому прежде чѣмъ провѣрять, будетъ ли дѣлитель a корнемъ, по вышеприведенному пріему, слѣдуетъ разсмотрѣть, дѣлится ли нацѣло на $a-1$ цѣлое число $f(+1)$, а также на $a+1$ цѣлое число $f(-1)$; если которое-нибудь изъ двухъ послѣднихъ дѣленій не совершается нацѣло, то такой дѣлитель a не будетъ корнемъ. Итакъ, для провѣрки остаются лишь тѣ дѣлители коэффиціента p_n, которые не выходятъ изъ предѣловъ вещественныхъ корней и при которыхъ два послѣднихъ дѣленія совершаются нацѣло.

§ 3.

Пояснимъ теорію примѣромъ. Пусть дано уравненіе

$$f(x) = x^5 - 34x^3 + 29x^2 + 212x - 300 = 0;$$

имѣемъ

$$f(+1) = -92, \quad f(-1) = -450.$$

За предѣлы корней даннаго уравненія можно взять числа -6 и $+6$. Придется испробовать слѣдующихъ дѣлителей числа 300: ± 2, ± 3, ± 4, ± 5.

Число $+3$ не годится, ибо $f(-1)$ не дѣлится на $3+1=4$. Точно также не годятся числа: -2, ± 4, -5, ибо $f(+1)$ не дѣлится ни на одно изъ этихъ чиселъ, уменьшенныхъ единицей. Остаются для провѣрки дѣлители: 2, -3, 5.

Начинаемъ съ дѣлителя 2. Оказывается, число 2 есть корень. Второй

+1	0	−34	+29	+212	−300	2
	+1	+2	−30	−31	150	2
		1	+4	−22	−75	−3
			+1	+1	−25	5
					+5	

рядъ таблицъ даетъ коэффиціенты функціи $\frac{f(x)}{x-2}$. Провѣряемъ еще разъ дѣлитель 2, ибо 150 продолжаетъ еще дѣлиться на 2. Совершаемъ провѣрку надъ вторымъ рядомъ таблицы, получаемъ третій рядъ, дающій коэффиціенты функціи

$$\frac{f(x)}{(x-2)^2};$$

такъ какъ послѣдній коэффиціентъ -75 третьяго ряда не дѣлится на 2, то переходимъ къ провѣркѣ слѣдующаго дѣлителя -3. Этотъ дѣлитель оказывается корнемъ, и четвертый рядъ таблицы даетъ коэффиціенты функціи

$$\frac{f(x)}{(x-2)^2(x+3)}.$$

Слѣдующая провѣрка дѣлителя 5 приведетъ уже къ отрицательному результату.

Итакъ, наше уравненіе $f(x) = 0$ можетъ быть переписано такъ

$$(x-2)^2(x+3)(x^2+x-25) = 0.$$

Уравненіе

$$x^2+x-25=0$$

уже не имѣетъ раціональныхъ корней.

§ 4.

Мы видимъ, что при рѣшеніи уравненій съ какими-угодно коэффиціентами можно ограничиться разсмотрѣніемъ уравненій съ раціональными коэффиціентами, ибо при ирраціональныхъ коэффиціентахъ придется разсматривать приближенныя значенія такихъ коэффиціентовъ, которыя суть числа раціональныя.

Первая задача рѣшенія уравненія съ раціональными коэффиціентами будетъ состоять въ возможномъ упрощеніи уравненія; изъ такихъ упрощеній обязательны прежде всего два слѣдующихъ: необходимо освободиться отъ кратныхъ корней, а также найти всѣ соизмѣримые корни, тогда, откидывая множители, соотвѣтствующіе соизмѣримымъ корнямъ, мы приведемъ задачу къ рѣшенію одного или нѣсколькихъ уравненій съ раціональными коэффиціентами, не имѣющихъ уже раціональныхъ корней, такъ что придется вычислить лишь ирраціональные корни послѣднихъ уравненій.

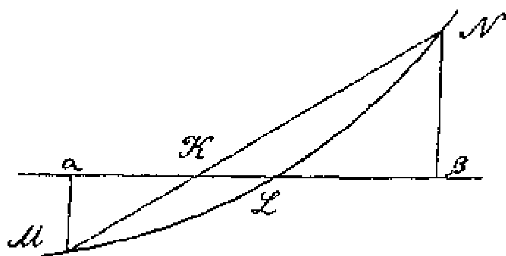
Regula falsi.

§ 5.

Если корень отдѣленъ, то найдены два числа α и β такихъ, что $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ разныхъ знаковъ. Для ясности будемъ разсматривать задачу геометрически Будемъ разсматривать линію, соотвѣтствующую уравненію

(1) $y = f(x)$

въ прямоугольныхъ координатахъ, тогда абсциссамъ α и β будутъ соотвѣтствовать ординаты разныхъ знаковъ. Корень, лежащій въ промежуткѣ (α, β) будетъ абсциссой точки L, въ которой кривая пересѣкаетъ ось x-овъ.



Черт. 14.

Если границы промежутка достаточно близки, то проводя хорду MN, соединяющую точки кривой

съ абсциссами α и β, можно принять за приближенное значеніе корня абсциссу точки K встрѣчи съ осью x-овъ хорды MN. Другими словами, мы принимаемъ за приближенное значеніе абсциссу точки, дѣлящей отрѣзокъ $\alpha\beta$ пропорціонально абсолютнымъ величинамъ $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.

Уравненіе хорды MN, очевидно, будетъ

$$\frac{y-f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Абсцисса точки встрѣчи ея съ осью x-овъ получится, полагая $y=0$, т. е. изъ уравненія

$$-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

или окончательно

$$x=\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}.$$

Взявъ это приближенное значеніе вмѣсто одного изъ предѣловъ промежутка (α, β), можемъ повторить для новаго промежутка ту же операцію и такимъ образомъ приблизиться къ искомому корню. Сказанное вычисленіе, повторенное достаточное число разъ, дастъ возможность вычислить корень съ любою точностью.

Способъ Newton'a.

§ 6

Newton'омъ былъ предложенъ способъ, носящій названіе *способъ подкасательныхъ*. Мы изложимъ этотъ классическій пріемъ, годящійся одинаково какъ для алгебраическихъ уравненій такъ и для трансцендентныхъ.

Если задано уравненіе $f(x)=0$, то будемъ разсматривать соотвѣтствующую ему линію

(1) $$y=f(x),$$

Рѣшеніе уравненія состоитъ въ нахожденіи точки встрѣчи кривой (1) съ осью x-овъ, имѣющей уравненіе $y=0$.

Пусть найдено нѣкоторое приближенное значеніе α корня уравненія. Если число α не корень, но очень близко къ нему, то соотвѣтствующее значеніе $y_\alpha=f(\alpha)$ будетъ близко къ нулю. Точка съ координатами α, $f(x)$ будетъ близка оси x-овъ. Примѣняя общій принципъ дифференціальнаго исчисленія, состоящій въ замѣнѣ кривой линіи вблизи нѣкоторой точки касательною къ этой кривой, мы приходимъ къ мысли искать точку встрѣчи

касательной, проведенной через точку α, $f(\alpha)$, съ осью x-овъ. Эта точка встрѣчи даетъ число болѣе близкое къ искомому корню чѣмъ α. Въ этомъ состоитъ идея способа Newton'а.

Для осуществленія способа напишемъ уравненіе касательной

(2) $$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha);$$

для нахожденія абсциссы точки встрѣчи съ осью x-овъ полагаемъ $y = 0$ и рѣшаемъ полученное уравненіе относительно x

(3) $$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Выраженіе (3) и есть искомое новое приближенное къ корню.

Изложимъ теперь найденный геометрически способъ аналитическимъ путемъ.

Пусть извѣстно приближенное значеніе α нѣкотораго корня, тогда самъ корень будетъ выражаться по формулѣ

$$x = \alpha + u,$$

гдѣ u малая поправка, которую нужно придать къ невѣрному значнію α корня, чтобы получить его настоящую величину.

Имѣемъ

$$f(\alpha + u) = 0$$

Раскладывая по формулѣ Taylor'а, мы получимъ

$$f(\alpha) + uf'(\alpha) + \frac{u^2}{2!}f''(\alpha) + \ldots = 0.$$

Рѣшая послѣднее уравненіе относительно первой степени u, получимъ

$$u = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{u^2 f''(\alpha)}{2!\, f'(\alpha)} - \ldots$$

Если приближенное значеніе α достаточно близко къ корню, то число u будетъ малымъ числомъ, высшими степенями котораго можно пренебречь въ первомъ приближеніи; тогда можно считать

$$u = -\frac{f(\alpha)}{f'(x)}$$

и мы приходимъ къ выраженію (3).

§ 7.

Итакъ, способъ Newton'а состоитъ въ слѣдующемъ: берется приближенное значеніе α корня, далѣе вычисляется новое приближенное значеніе α_1 по формулѣ

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)};$$

по этому значенію α_1 составляется новое приближеніе α_2 по такой же формулѣ

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

Продолжая далѣе вычисленіе послѣдовательныхъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ по указаннымъ формуламъ, мы будемъ приближаться къ искомому корню заданнаго уравненія.

Весьма важное обстоятельство состоитъ въ томъ; что способъ Newton'а былъ первымъ примѣромъ одного довольно широкаго метода современной математики—метода такъ называемой *итераціи* (повторенія операцій).

Методъ итераціи состоитъ въ слѣдующемъ. Берется нѣкоторое число α (безразлично вещественное или комплексное) и нѣкоторая функція $\varphi(x)$ и составляется рядъ чиселъ

$$\alpha_1 = \varphi(\alpha), \ \alpha_2 = \varphi(\alpha_1), \ \alpha_3 = \varphi(\alpha_2), \ \ldots$$

задача состоитъ въ изученіи вопроса, когда рядъ чиселъ

$$\alpha, \ \alpha_1, \ \alpha_2 \ldots$$

имѣетъ предѣлъ.

Я лично склоненъ методу итераціи придавать большое значеніе и считать, не смотря на существованіе извѣстной литературы, этотъ методъ недостаточно оцѣненнымъ и разработаннымъ.

§ 8.

Приведеніе въ порядокъ изложеннаго способа Newton'а требуетъ рѣшенія двухъ основныхъ вопросовъ: 1) дѣйствительно ли послѣдовательное приближеніе имѣетъ своимъ предѣломъ корни уравненія и 2) если предѣлъ существуетъ, то необходимо оцѣнить погрѣшность, которую мы дѣлаемъ, останавливаясь на какомъ нибудь приближеніи.

Полный отвѣтъ на эти два вопроса былъ данъ Fourier. Чтобы сдѣлать изложеніе вопроса наиболѣе яснымъ, обратимся къ геометрическимъ соображеніямъ. Допустимъ, что корень, подлежащій вычисленію, отдѣленъ. Если отдѣленіе сдѣлано по методѣ Fourier, то допустимъ, что первые

указатели суть, напримѣръ, 1, 0, 0; тогда въ разсматриваемомъ промежуткѣ (α, β) функція $f(x)$ имѣетъ одинъ простой корень, а $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняютъ въ промежуткѣ свой знакъ. Если $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ возрастаетъ, при $f'(x) < 0$ она убываетъ. Если $f''(x) > 0$, то вогнутость линіи $y = f(x)$ внутри промежутка (α, β) направлена кверху, при $f''(x) < 0$ она направлена книзу

Докажемъ теорему.

Если $f'(x)f''(x) < 0$, то вычисленіе по методу Newton'а, начатое съ нижняго предѣла α промежутка, будетъ давать числа

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} - \frac{f(\alpha_{i-1})}{f'(\alpha_{i-1})}$$

возрастающія причемъ $\alpha_i < x_1$, гдѣ x_1 корень функціи $f(x)$ въ промежуткѣ.

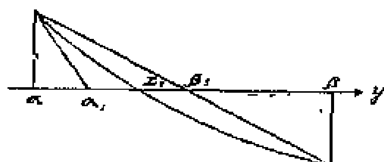
Если же $f'(x)f''(x) > 0$, то можно начать съ верхняго предѣла β и получится рядъ чиселъ убывающихъ

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \quad \beta_2 = \beta_1 - \frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)}$$

причемъ $\beta_i > x_1$.

Эта теорема, почти очевидная изъ геометрическихъ соображеній, можетъ быть также просто доказана аналитически. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцію

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)};$$



Черт. 15.

эта функція будетъ возрастающая въ промежуткѣ (α, x_1), если будетъ имѣть мѣсто неравенство $f'(x)f''(x) < 0$. На основаніи доказаннаго въ § 9 главы X видимъ, что въ разсматриваемомъ промежуткѣ дробь $\frac{f(x)}{f'(x)}$ отрицательная, слѣдовательно, $f(x)$ имѣетъ тотъ же знакъ что и $f''(x)$; значитъ, дѣйствительно, функція $\varphi(x)$ (см. § 24 главы X) возрастаетъ. Имѣемъ, слѣдовательно, $\varphi(\alpha) < \varphi(x_1)$ или, что одно и тоже, $\alpha_1 < x_1$; съ другой стороны $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < 0$, слѣдовательно, $\alpha_1 > \alpha$ и первая часть теоремы доказана. Подобнымъ же образомъ докажемъ и вторую часть теоремы, соотвѣтствующую случаю неравенства $f'(x)f''(x) > 0$.

Итакъ, изъ только что доказанной теоремы слѣдуетъ, что числа α_i возрастаютъ съ возрастаніемъ значка i, но остаются меньше числа x_1;

тогда на основаніи извѣстной теоремы [1]) теоріи предѣловъ перемѣнное число α_i стремится къ предѣлу. Этотъ предѣлъ будетъ не чѣмъ инымъ, какъ корнемъ x_1, ибо этотъ предѣлъ будетъ удовлетворять уравненію

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

§ 9.

Покажемъ теперь степень приближенія, получаемую при способѣ Newton'a. Я измѣню нѣсколько способъ разсужденія моихъ предшественниковъ, сопоставляя способъ подкасательныхъ съ правиломъ — regula falsi.

Ограничимся разсмотрѣніемъ случая $f'(x)f''(x) < 0$. Нетрудно показать, что если мы обозначимъ черезъ β_1 выраженіе

$$\frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)},$$

то искомый корень x_1 будетъ внутри промежутка (α_1, β_1). Въ самомъ дѣлѣ, достаточно доказать неравенство $\beta_1 > x_1$. Разсмотримъ функцію

$$\psi(x) = \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{f(x) - f(\alpha)};$$

первая производная отъ этой функціи будетъ

$$\psi'(x) = \frac{f(\alpha)}{[f(x) - f(\alpha)]^2}\{f(\alpha) - f(x) - (\alpha - x)f'(x)\} = \frac{f(\alpha)(\alpha - x)^2 f''(\xi)}{2[f(x) - f(\alpha)]^2}$$

гдѣ ξ заключается между α и x. Значеніе $f(\alpha)$, очевидно, обратно по знаку со значеніемъ производной $f'(x)$, — значитъ, $f(\alpha)$ одного знака съ $f''(\xi)$. Итакъ, функція $\psi(x)$ возрастающая; слѣдовательно,

$$\psi(x_1) < \psi(\beta)$$

$$x_1 < \beta_1.$$

Для нахожденія степени приближенія къ корню x_1 разсмотримъ разность $\beta_1 - \alpha_1$; получаемъ

$$\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} - \alpha + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{(\alpha - \beta)f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} =$$

$$= \frac{f(\alpha)[f(\beta) - f(\alpha) - (\beta - \alpha)f'(\alpha)]}{f'(\alpha)[f(\beta) - f(\alpha)]} = \frac{f(\alpha)(\beta - \alpha)^2 f''(\eta)}{2(\beta - \alpha)f'(\zeta)f'(\alpha)}$$

гдѣ числа ζ и η заключаются между α и β

[1]) Д. Граве. Введеніе въ анализъ 1910. стр. 50.

но

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \alpha_1 ,$$

слѣдовательно, получимъ

$$\beta_1 - \alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha)(\beta - \alpha)\left[-\frac{f''(\eta)}{2f'(\zeta)}\right].$$

Если мы обозначимъ черезъ m наибольшее значеніе абсолютной величины второй производной въ данномъ промежуткѣ, а черезъ p наименьшее значеніе абсолютной величины первой производной, то положительное число

$$-\frac{f''(\eta)}{2f'(\zeta)}$$

меньше $\frac{m}{2p} = M$. Кромѣ того $\alpha_1 - \alpha < \beta - \alpha$, слѣдовательно,

(1) $$\beta_1 - \alpha_1 < (\beta - \alpha)^2 M.$$

Повторивъ операцію методы Newton'а и правило regula falsi, т. е. взявъ числа

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)},\ \beta_2 = \frac{\alpha_1 f(\beta_1) - \beta_1 f(\alpha_1)}{f(\beta_1) - f(\alpha_1)},$$

получимъ

(2) $$\beta_2 - \alpha_2 < (\beta_1 - \alpha_1)^2 M.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы получимъ

(m) $$\beta_m - \alpha_m < (\beta_{m-1} - \alpha_{m-1})^2 M.$$

Возвышая неравенство (1) въ степень 2^{m-1}, неравенство (2) въ степень 2^{m-2} и т. д. наконецъ, неравенство (m) въ степень 2^0, получимъ

$$(\beta_1 - \alpha_1)^{2^{m-1}} < (\beta - \alpha)^{2^m} M^{2^{m-1}}$$

$$(\beta_2 - \alpha_2)^{2^{m-2}} < (\beta_1 - \alpha_1)^{2^{m-1}} M^{2^{m-2}}$$

. . . .

$$\beta_m - \alpha_m < (\beta_{m-1} - \alpha_{m-1})^2 M.$$

Перемножая эти неравенства, получимъ

$$\beta_m - \alpha_m < (\beta - \alpha)^{2^m} M^{1+2+2^2+\dots+2^{m-1}}$$

или

$$\beta_m - \alpha_m < (\beta - \alpha)[(\beta - \alpha)M]^{2^m - 1}.$$

Можно всегда выбрать первоначальный промежутокъ (α, β) столь малымъ, что будетъ сразу

$$\beta - \alpha < \varepsilon, \ (\beta - \alpha)M < \varepsilon,$$

гдѣ ε правильная дробь, а тогда получимъ

$$\beta_m - \alpha_m < \varepsilon^{2^m}.$$

Мы приходимъ къ весьма важному заключенію, что приближеніе величины α_m къ искомому корню x_1 меньше ε^{2^m}.

Способъ Lagrange'а.

§ 10

Способъ Lagrange'а состоитъ въ разложеніи вещественныхъ корней уравненія съ раціональными коэффиціентами въ непрерывныя дроби.

Возьмемъ уравненіе

(1) $$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

Будемъ разсматривать только положительные корни, ибо въ случаѣ отрицательныхъ корней можно замѣнить x на $-x$.

Положимъ, что между двумя натуральными числами a и $a+1$ существуетъ одинъ или нѣсколько послѣдовательныхъ корней уравненія (1); мы имѣемъ всегда возможность предполагать, что такихъ корней будетъ только одинъ, ибо умноженіемъ x на нѣкоторое достаточно большое число k можно достигнуть того, что новое уравненіе относительно kx будетъ имѣть такіе корни, что всѣ разности между двумя послѣдовательными корнями будутъ не менѣе единицы, а тогда между каждыми двумя натуральными числами, стоящими рядомъ, будетъ существовать не больше одного корня.

Итакъ, предположимъ, что въ промежуткѣ $(a, a+1)$ существуетъ одинъ корень уравненія (1). Этотъ корень можно будетъ написать въ такомъ видѣ

(2) $$x = a + \frac{1}{x_1},$$

гдѣ x_1 неправильная дробь. Подставимъ выраженіе (2) въ уравненіе (1), получимъ новое уравненіе относительно x_1 той же степени n. Пусть это уравненіе будетъ имѣть видъ

(3) $$f_1(x_1) = p_0^{(1)}x_1^n + p_1^{(1)}x_1^{n-1} + \ldots + p_n^{(1)} = 0.$$

Уравненіе (3) будетъ имѣть только одинъ корень бо́льшій единицы, ибо, если бы оно имѣло болѣе одного корня, большаго единицы, то уравненіе (1) имѣло бы болѣе одного корня, лежащаго въ промежуткѣ $(a, a+1)$.

Пусть корень уравненія (3) заключается между двумя цѣлыми положительными числами a_1 и a_1+1; тогда этотъ корень можно будетъ выразить формулой

(4) $$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}.$$

Подставляя послѣднее выраженіе въ уравненіе (3), получимъ новое уравненіе

(5) $$f_2(x_2) = p_0^{(2)}x_2^n + p_1^{(2)}x_2^{n-1} + \ldots + p_n^{(2)} = 0\,.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе получимъ разложеніе корня въ непрерывную дробь

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

Если корень раціональный, то непрерывная дробь оканчивается. Въ этомъ обстоятельствѣ заключается преимущество способа Lagrange'a, ибо при другихъ способахъ, какъ бы далеко ни продолжать приближеніе къ корню, нельзя будетъ замѣтить раціональность вычисляемаго корня, если таковая случайно имѣетъ мѣсто и мы предварительно не нашли по пріемамъ §§ 2—4 всѣхъ раціональныхъ корней. Если непрерывная дробь безконечная, то мы получаемъ способъ приближеннаго вычисленія корня, состоящій въ вычисленіи подходящихъ дробей $\frac{P_m}{Q_m}$.

Lagrange показалъ, какъ вычислять послѣдовательныя уравненія

$$f_1(x_1) = 0\,,\ f_2(x_2) = 0\,,\ \ldots f_m(x_m) = 0\,,\ \ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$f_i(x_i) = f_i\left(a_i + \frac{1}{x_{i+1}}\right) = f_i(a_i) + \frac{1}{x_{i+1}}f_i'(a_i) + \ldots + \frac{1}{x^n_{i+1}}\frac{f_i^{(n)}(a_i)}{1\,.\,2\ldots n},$$

слѣдовательно, преобразованное уравненіе $f_{i+1}(x) = 0$ имѣетъ видъ (здѣсь мы пропускаемъ у x_{i+1} значекъ $i+1$)

$$x^n f_i(a_i) + x^{n-1}f_i'(a_i) + \ldots + \frac{f_i^{(n)}(a_i)}{1\,.\,2\ldots n} = 0\,,$$

такъ что

$$p_0^{(i+1)} = f_i(a_i)\,,\ p_1^{(i+1)} = f_i'(a_i)\,,\ \ldots\ p_n^{(i+1)} = \frac{1}{n!} f_i^{(n)}(a_i)\,.$$

Понимая, что описанное разложеніе корня въ непрерывную дробь сопровождается довольно громоздкими выкладками, Lagrange усовершенствовалъ свой способъ, указавъ на очень хорошій пріемъ продолженія вычисленія ряда чиселъ

$$a\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots,$$

когда извѣстны нѣсколько первыхъ.

§ 11.

Пояснимъ теорію Lagrange'а примѣромъ.

Возьмемъ уравненіе

$$x^3 - 7x + 7 = 0\,;$$

примѣняя теорію Lagrange'а, получимъ три корня въ такомъ видѣ

$$x_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\omega}}}} \qquad x_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\omega}}}}$$

$$x_3 = 3 + \frac{1}{\omega}$$

гдѣ ω есть неполное частное общее для всѣхъ трехъ непрерывныхъ дробей. Число ω будетъ корнемъ уравненія

$$\omega^4 \quad 20\omega^2 \quad 9\omega - 1 = 0\,.$$

Начиная съ мѣста ω, во всѣхъ трехъ непрерывныхъ дробяхъ будутъ слѣдовать неполныя частныя въ одной и той же послѣдовательности.

Мы опять приходимъ къ новому преимуществу методы Lagrange'а, помогающему замѣтить свойство заданнаго уравненія, что всѣ три его корня выражаются раціонально черезъ ω

$$x_1 = \frac{19\omega + 4}{14\omega + 3}\,,\ x_2 = \frac{22\omega + 5}{13\omega + 3}\,,\ x_3 = \frac{-1 - 3\omega^2}{\omega}\,.$$

Исключая ω, получимъ

$$x_1 = \frac{7 - 4x_3}{5 - 3x_3}\,,\ \ x_2 = \frac{7 - 5x_3}{4 - 3x_3}\,;$$

итакъ, метода Lagrange'a даетъ возможность замѣтить свойство заданнаго уравненія, которое мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть свойствомъ *нормальности* и которое состоитъ въ томъ, что черезъ одинъ его корень выражаются раціонально остальные корни.

§ 12.

Поставимъ теперь задачу: *найти всѣ нормальныя уравненія третьей степени*

(1) $$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0\,,$$

гдѣ p_1, p_2, p_3 *цѣлыя числа.*

Обозначая черезъ Δ дискриминантъ, получимъ

$$\Delta = (x - x_1)^2(x - x_2)^2(x_1 - x_2)^2 =$$

$$= \quad (4p_2^3 + 27p_3^2) + 18p_1p_2p_3 + p_1^2p_2^2 - 4p_1^3p_3$$

Въ послѣдней формулѣ черезъ x, x_1, x_2 обозначены три корня уравненія (1).

Умножая тождество

$$\sqrt{\Delta} = (x - x_1)(x - x_2)(x_2 - x_1)$$

на $x_1 - x_2$, получимъ

$$(x_1 - x_2)\sqrt{\Delta} = [(x_1 - x_2)(x_1 - x)][(x_2 - x)(x_2 - x_1)].$$

Но $(x_1 - x)(x_1 - x_2)$ есть значеніе, которое принимаетъ производная первой части уравненія (1) при корнѣ x_1, слѣдовательно,

$$(x_1 - x)(x_1 - x_2) = 3x_1^2 + 2p_1x_1 + p_2\,;$$

подобнымъ же образомъ

$$(x_2 - x)(x_2 - x_1) = 3x_2^2 + 2p_1x_1 + p_2\,.$$

Отсюда

$$(x_1 - x_2)\sqrt{\Delta} = (3x_1^2 + 2p_1x_1 + p_2)(3x_2^2 + 2p_1x_2 + p_2) =$$

(2) $$= 9x_1^2x_2^2 + 6p_1x_1x_2(x_1 + x_2) + 3p_2(x_1 + x_2)^2 + (4p_1^2 - 6p_2)x_1x_2 +$$

$$+ 2p_1p_2(x_1 + x_2) + p_2^2\,.$$

Кромѣ того имѣемъ

(3) $$x_1 + x_2 = - x - p_1\,,\quad x_1x_2 = -(x_1 + x_2)x + p_2 = x^2 + p_1x + p_2\,.$$

Формулы (3) даютъ возможность выразить правую часть уравненія (2) черезъ корень x

$$(x_1 - x_2)\sqrt{\Delta} = 9x^4 + 12p_1x^3 + (15p_2 + p_1^2)x^2 +$$

$$+ (10p_1p_2 - 2p_1^3)x + 4p_2^2 - p_1^2p_2 .$$

Мы можемъ понизить при помощи уравненія (1) на двѣ единицы степень послѣдняго выраженія

$$(x_1 - x_2)\sqrt{\Delta} = (6p_2 - 2p_1^2)x^2 - (9p_3 - 7p_1p_2 + 2p_1^3)x +$$

$$+ 4p_2^2 - p_1^2p_2 - 3p_1p_3 .$$

Рѣшая относительно x_1 и x_2 послѣднее уравненіе и первое изъ (3), получимъ для этихъ корней выраженія по формулѣ

$$\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}[(6p_2 - 2p_1^2)x^2 - (9p_3 - 7p_1p_2 + 2p_1^3 + \sqrt{\Delta})x +$$

$$+ 4p_2^2 - p_1^2p_2 - 3p_1p_3 - p_1\sqrt{\Delta}] ,$$

полагая послѣдовательно въ ней $\sqrt{\Delta}$ равнымъ его обоимъ значеніямъ.

Итакъ, мы видимъ, что *раціональное выраженіе одного корня черезъ другой получится, если Δ — число положительное и полный квадратъ цѣлаго числа.*

Такъ въ примѣрѣ § 11 $p_1 = 0$, $p = -7$, $p_3 = 7$ и мы получаемъ

$$\Delta = 7^2.$$

§ 13.

Въ предыдущихъ параграфахъ мы подчеркнули характеръ методы Lagrange'a, дающій возможность судить объ ариѳметической природѣ подлежащаго вычисленію корня. Этотъ характеръ проявился съ особенной рельефностью при приложеніи методы къ уравненіямъ второй степени съ раціональными коэффиціентами. Оказался поразительный фактъ, что корни такихъ уравненій (и конечно только такихъ) разлагаются въ *періодическія* непрерывныя дроби

Эта теорема Lagrange'a заставила математиковъ въ продолженіи всего 19-го столѣтія искать новаго способа приближеннаго вычисленія корней алгебраическихъ уравненій, приводящаго къ періодическому алгориѳму, представляющему для кубическихъ уравненій обобщеніе алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Заслуга нахожденія этого алгориѳма принадлежитъ выдающемуся русскому математику г. Вороному, изложившему свой способъ въ трактатѣ „Объ одномъ обобщеніи алгориѳма непрерывныхъ дробей“ Варшава 1896.

Преждевременная смерть прекратила научную дѣятельность, носившую отпечатокъ геніальности. Долгъ русскихъ ученыхъ продолжить изслѣдованія Вороного, ибо все говоритъ въ пользу возможности дальнѣйшихъ обобщеній на уравненія высшихъ степеней.

§ 14.

Наконецъ, нельзя не упомянуть о томъ, что въ связи съ разложеніемъ корней алгебраическихъ уравненій въ непрерывныя дроби была замѣчена въ первый разъ Liouville'емъ [1]) возможность доказательства существованія чиселъ трансцендентныхъ.

На основаніи сказаннаго въ § 16 главы III *алгебраическимъ числомъ* называется корень всякаго уравненія

$$(1) \qquad f(x) = p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + \ldots + p_r = 0,$$

всѣ коэффиціенты котораго цѣлыя числа.

Будемъ раскладывать ирраціональный вещественный корень α уравненія (1) въ непрерывную дробь

$$\alpha = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

Разсмотримъ промежутокъ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, въ которомъ находится корень α. Пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ нѣкоторая подходящая дробь, настолько близкая къ корню α, что она также находится внутри промежутка $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ будетъ

$$|f'(x)| < M,$$

гдѣ M величина исключительно зависящая отъ промежутка.

Примѣняя теорему Lagrange'a [2]), получимъ

$$f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right) = \left(\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right) f'\left[\alpha + \theta\left(\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right)\right], \quad 0 < \theta < 1.$$

---

[1]) Journal de Liouville t. XVI.

[2]) Д. Граве. Энциклопедія математики 1912. стр. 189.

Такъ какъ величина $\alpha + \theta\left(\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right)$ находится также внутри интервала (a, b), то мы получимъ

$$\left|f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)\right| < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| M$$

отсюда

(2) $$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| > \frac{\left|f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)\right|}{M}.$$

Изъ теоріи непрерывныхъ дробей извѣстно [1])

$$\frac{P_n}{Q_n} - \alpha = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n\alpha_n + Q_{n-1})}, \quad \alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \ldots}$$

Отсюда, принимая во вниманіе $\alpha_n > a_n$, получимъ

(3) $$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{a_n Q_n^2}.$$

Сопоставляя (2) и (3), получимъ

$$a_n < \frac{M}{Q_n^2\left|f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)\right|}.$$

Далѣе мы имѣемъ

$$f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right) = \frac{A}{Q_n^r},$$

гдѣ A нѣкоторое цѣлое положительное или отрицательное число; значитъ

$$\left|f\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)\right| \geqslant \frac{1}{Q_n^r}$$

и мы приходимъ къ неравенству Liouville'a

(4) $$a_n < MQ_n^{r-2}.$$

Стоитъ только написать такую непрерывную дробь, у которой неравенство (4) не удовлетворяется, чтобы быть увѣреннымъ что такая дробь не можетъ быть алгебраическимъ числомъ. Эта дробь будетъ числомъ новой природы, которое называется *трансцендентнымъ*.

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ 1913 г. Стр. 187.

Метода Gauss'а для трехчленныхъ уравненій

§ 15.

Трехчленными называются уравненія вида

$$x^{q+p} + 2ax^q + \beta = 0,$$

которыя заключаютъ только три члена Такія уравненія часто встрѣчаются. Кромѣ случаевъ квадратнаго и кубическаго уравненія мы можемъ напомнить (§ 35 главы IX) преобразованіе Jerrard'а, которое приводитъ общее уравненіе 5-ой степени къ трехчленному виду.

Я говорю въ моей книгѣ о трехчленныхъ уравненіяхъ, потому что C. Fr. Gauss обратилъ вниманіе на эти уравненія и далъ [1]) прекрасный способъ ихъ рѣшенія. Въ 1896 году Gundelfingen [2]) публиковалъ таблицы, облегчающія выкладки этого рѣшенія. Я покажу здѣсь мое видоизмѣненіе способа Gauss'а, относящееся къ вычисленію вещественныхъ корней трехчленныхъ уравненій. Мой способъ основанъ на примѣненіи метода итерацій. Этотъ способъ еще въ бытность мою студентомъ Петербургскаго Университета 1883 г. я показывалъ товарищамъ. Я ничего не публиковалъ о немъ, ибо подробное теоретическое проведеніе не привело меня къ новымъ въ идейномъ отношеніи результатамъ. Способъ разсужденія не отличался по существу отъ тѣхъ соображеній, съ которыми связано приложеніе извѣстнаго ряда Lagrange'а [3]).

Здѣсь я привожу мой способъ, ибо при практическомъ вычисленіи онъ не хуже способа Gauss'а, но имѣетъ преимущество въ мнемоническомъ отношеніи и его буквально нельзя забыть, если онъ былъ одинъ разъ извѣстенъ.

Возвысимъ уравненіе

$$x^q(x^p + 2a) = -\beta$$

въ степень p

$$x^{pq}(x^p + 2a)^p = (-1)^p\beta^p$$

и положимъ

(1) $$x^p + a = z\,.$$

[1]) Gauss Werke. Bd. III, s. 85. Beiträge zur Théorie der algebraischen. Gleichungen. Zweite Abhandlung. (1849).

[2]) Gundelfingen. Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämmtlicher trinomischen Gleichungen (Leipzig 1896).

[3]) Э. Гурса. Курсъ математическаго анализа. Перев. Некрасова подъ ред. Млодзіевскаго. Москва (1911). Стр. 433.

тогда уравненіе принимаетъ видъ

(2) $$(z+a)^p(z-a)^q=b,$$

гдѣ

$$b=(-1)^p\beta^p.$$

Итакъ, мы пришли къ уравненію (2), которое мы уже изслѣдовали по теоремѣ Sturm'a (см. § 6 главы XI). На основаніи (1) всякому вещественному корню заданнаго трехчленнаго уравненія будетъ соотвѣтствовать вещественный же корень преобразованнаго уравненія (2). Примѣняя теорему Sturm'a, мы видѣли, что это уравненіе не можетъ имѣть болѣе четырехъ вещественныхъ корней.

Уравненіе (2) можно преобразовать такъ [1])

(3) $$z=a+\frac{\sqrt[q]{b}}{{}^{\frac{p}{q}}(a+z)}$$

Подставляя въ скобкахъ знаменателя вмѣсто z все выраженіе (3) придемъ къ безконечному періодическому алгориөму

(4) $$z=a+\cfrac{\sqrt[q]{b}}{{}^{\frac{p}{q}}\left(2a+\cfrac{\sqrt[q]{b}}{{}^{\frac{p}{q}}(2a+\dots}\right.}$$

Подобнымъ же образомъ, преобразуя уравненіе (2) такъ

(5) $$z=-a+\frac{\sqrt[p]{b}}{{}^{\frac{q}{p}}(-a+z)}$$

получимъ другой алгориөмъ.

(6) $$z=-a+\cfrac{\sqrt[p]{b}}{{}^{\frac{q}{p}}\left(-2a+\cfrac{\sqrt[p]{b}}{{}^{\frac{q}{p}}(-2a+\dots}\right.}$$

Этотъ алгориөмъ представляетъ обобщеніе непрерывныхъ дробей въ томъ смыслѣ, что при непрерывныхъ дробяхъ чередуются двѣ операціи:

---

[1]) Здѣсь показатель $\frac{p}{q}$ для удобства написанъ съ лѣвой стороны.

дѣленіе и сложеніе; здѣсь же чередуются три операціи· возвышеніе въ степень съ показателемъ $\frac{q}{p}$, дѣленіе и сложеніе.

При q четномъ въ алгориѳмѣ (4) можно брать радикалъ $\sqrt[q]{b}$ съ тѣмъ или другимъ знакомъ, подобнымъ же образомъ при p четномъ можно измѣнить знакъ при радикалѣ $\sqrt[p]{b}$ въ алгориѳмѣ (6).

Оказывается, что при помощи четырехъ, получаемыхъ такимъ образомъ алгориѳмовъ можно вычислить всѣ вещественные корни уравненія (2).

Покажемъ приложеніе этой методы къ численному уравненію.

Вычислимъ вещественные корни уравненія

$$x^5 - 4x - 2 = 0,$$

полагая

$$x^4 - 2 = z,$$

получимъ новое уравненіе въ томъ видѣ

(7) $$(z + 2)(z \quad 2)^4 = 16.$$

По соображеніямъ § 6 главы XI уравненіе (7) должно имѣть только три вещественныхъ корня.

Мы получаемъ дѣйствительно слѣдующихъ три алгориѳма для вычисленія этихъ трехъ корней z_1, z_2, z_3.

(8) $$\frac{z_1 + 2}{4} = 1 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{1 + \dots}}}}$$

(9) $$\frac{z_2 + 2}{4} - 1 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{1 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{1 \quad \dots}}}}$$

(10) $$\frac{-z_3 + 2}{4} = 1 - \frac{2^{-6}}{{}^4(1 - \frac{2^{-6}}{{}^4(1 - \dots}}$$

§ 16.

Теперь я покажу подробно, какъ вычислить по моему алгориѳму корни. Мы возьмемъ семизначныя логариѳмическія таблицы, а также таблицы Gauss'овыхъ логариѳмовъ, носящія заглавіе: „Tafeln der Additions und Substractions Logarithmen für sieben Stellen. Berechnet von I. Zech. Berlin. 1863.

Изобрѣтеніе Gauss'омъ логариѳмовъ суммъ и разностей показываетъ, что этотъ „princeps mathematicorum", провидѣвшій орлинымъ взоромъ глубочайшія современныя теоріи, не гнушался, когда дѣло шло о практическомъ вычисленіи, предлагать дѣйствительно удобные въ практическомъ отношеніи пріемы. Таковъ удѣлъ генія, который великъ какъ въ теоріи такъ и на практикѣ.

Начнемъ съ вычисленія алгориѳма (8) § 15

$$Lg\frac{1}{2\sqrt{2}}=9,5484550.$$

Логариѳмъ числа $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ вычисляемъ, примѣняя Zech'овскіе логариѳмы суммъ. По этимъ логариѳмамъ дѣйствіе производится такъ. Положимъ, что требуется вычислить $Lg(A+B)$, гдѣ $A>B$. Находимъ LgA и LgB; вычисляемъ разность $g=LgA-LgB$; по числу g ищемъ соотвѣтственное число G таблицы Zech'а, относящейся къ сложенію (въ указанномъ изданіи таблица № XII стр. 636). Искомый логариѳмъ будетъ

$$Lg(A+B)=LgA+G.$$

Итакъ, для нашего случая $g=Lg1-Lg\frac{1}{2\sqrt{2}}=0-9,5484550=$ $=0,4515450$ По таблицѣ получаемъ $G=0,1314754$, значитъ, $Lg\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=Lg1+G=0,1314754$. Извлекаемъ корень четвертой степени, тогда получимъ

$$k_1=Lg\sqrt[4]{1+\frac{1}{2\sqrt{2}}}=0,0328688.$$

Повторяемъ операцію моего алгориѳма т. е. вычисляемъ по Zech'овскимъ таблицамъ

$$Lg\left\{1+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{2\sqrt{2}}}}\right\}.$$

Не объясняя подробно всѣхъ дѣйствій я приведу полное вычисленіе логариѳма величины

$$\frac{z_1+2}{4}$$

до семи знаковъ

Вторая итерація.

$$Lg\frac{1}{2\sqrt{2}} = 9{,}5484550$$
$$k_1 = 0{,}0328688$$
$$9{,}5155862$$
$$\text{доп.} = 0{,}4844138$$
$$G_1 = 0{,}1231271$$
$$\text{дѣл. на } 4 = 0{,}0307818 = k_2$$

Третья итерація.

$$Lg\frac{1}{2\sqrt{2}} = 9{,}5484550$$
$$k_2 = 0{,}0307818$$
$$9{,}5176732$$
$$\text{доп.} = 0{,}4823268$$
$$G_2 = 0{,}1236432$$
$$\text{дѣл на } 4 = 0{,}0309108 = k_3$$

Четвертая итерація.

$$Lg\frac{1}{2\sqrt{2}} = 9{,}5484550$$
$$k_3 = 0{,}0309108$$
$$9{,}5175442$$
$$\text{доп.} = 0{,}4824558$$
$$G_3 = 0{,}1236113$$
$$\text{дѣл. на } 4 = 0{,}0309028 = k_4$$

Пятая итерація.

$$Lg\frac{1}{2\sqrt{2}} = 9{,}5484550$$
$$k_4 = 0{,}0309028$$
$$9{,}5175522$$
$$\text{доп.} = 0{,}4824478$$
$$G_4 = 0{,}1236133$$

Шестая итерація уменьшаетъ лишь на единицу послѣднюю цифру

$$lg\frac{z_1+2}{4} = 0{,}1236132\,.$$

Получаемъ

$$z_1+2 = x_1^4 = 5{,}31708\,.$$

Уравненіе

$$(x_1^4-4)x_1 = 2\,.$$

показываетъ, что корень x_1 долженъ быть числомъ положительнымъ; получаемъ

(1) $$x_1 = 1{,}518512$$

Подобнымъ же образомъ мы вычислимъ оба другихъ алгориѳма (9), (10) § 15, примѣняя таблицу логариѳмовъ разностей (таблицу Zech'а № XII стр. 681) По этой таблицѣ для вычисленія $Lg(A-B)$, вычисляется раз-

ность $g = LgA - LgB$, по g находится соотвѣтственное число G таблицы и окончательно $Lg(A - B) = LgA - G$.

Я привожу здѣсь полное вычисленіе обоихъ алгориѳмовъ

Алгориѳмъ (9) § 15

Первая итерація

$$9{,}5484550$$
$$g = 0{,}4515450$$
$$G = 0{,}1894672$$
$$\text{доп.} = 9{,}8105328$$
$$\frac{1}{4}\cdot = 9{,}9526332 = k_1$$

Вторая итерація.

$$9{,}5484550$$
$$k_1 = 9{,}9526332$$
$$9{,}5958218$$
$$g_1 = 0{,}4041782$$
$$G_1 = 0{,}2177392$$
$$\text{доп.} = 9{,}7822608$$
$$\frac{1}{4}\cdot = 9{,}9455652 = k_2$$

Третья итерація

$$9{,}5484550$$
$$k_2 = 9{,}9455652$$
$$9{,}6028898$$
$$g_2 = 0{,}3971102$$
$$G_2 = 0{,}2224029$$
$$\text{доп.} = 9{,}7775971$$
$$\frac{1}{4}\cdot = 9{,}9443993 = k_3$$

Четвертая итерація.

$$9{,}5484550$$
$$k_3 = 9{,}9443993$$
$$9{,}6040557$$
$$g_3 = 0{,}3959443$$
$$G_3 = 0{,}2232844$$
$$\text{доп.} = 9{,}7767156$$
$$\frac{1}{4}\cdot = 9{,}9441789 = k_4$$

Пятая итерація.

$$9{,}5484550$$
$$k_4 = 9{,}9441789$$
$$9{,}6042761$$
$$g_4 = 0{,}3957239$$
$$G_4 = 0{,}2233325$$
$$\text{доп.} = 9{,}7766675$$
$$\frac{1}{4}\cdot = 9{,}9441669 = k_2$$

Шестая итерація.

$$9{,}5484550$$
$$k_5 = 9{,}9441669$$
$$9{,}6042881$$
$$g_5 = 0{,}3957119$$
$$G_5 = 0{,}2233405$$
$$\text{доп.} = 9{,}7766595$$

Седьмая итерація дастъ окончательно

$$lg\frac{z_2 + 2}{4} = 9{,}7766592$$

Получаемъ

$$z_2 + 2 = x_2^4 = 2{,}391769\,,$$

откуда искомый корень x_2 будетъ

(2) $$x_2 = 1{,}243597$$

Алгориѳмъ (10) § 15.

$$Lg2^{-6} = 8{,}1938200\,.$$

Первая итерація.

$$\begin{aligned} & 8{,}1938200 \\ g &= 1{,}8061800 \\ G &= 0{,}0068405 \\ д. &= 9{,}9931595 \\ 4. &= 9{,}9726380 = k_1 \end{aligned}$$

Вторая итерація.

$$\begin{aligned} & 8{,}1938200 \\ k_1 &= 9{,}9726380 \\ & 8{,}2211820 \\ g_1 &= 1{,}7788180 \\ G_1 &= 0{,}0072880 \\ д. &= 9{,}9927120 \\ 4. &= 9{,}9708480 = k_2 \end{aligned}$$

Третья итерація

$$\begin{aligned} & 8{,}1938200 \\ k_1 &= 9{,}9708480 \\ & 8{,}2229720 \\ g_2 &= 1{,}7770280 \\ G_2 &= 0{,}0073197 \\ д. &= 9{,}9926803 \\ 4. &= 9{,}9707212 = k_3 \end{aligned}$$

Четвертая итерація.

$$\begin{aligned} & 8{,}1938200 \\ k_3 &= 9{,}9707212 \\ & 8{,}2230988 \\ g_3 &= 1{,}7769012 \\ G_3 &= 0{,}0073215 \\ д. &= 9{,}9926785 \end{aligned}$$

Пятая итерація дасть окончательно

$$lg\frac{-x_3+2}{4} = lg\frac{4-x_3^4}{4} = 9{,}9926786$$

откуда

(3) $$x_3 = -0{,}5087046\,.$$

Итакъ, всѣ три вещественныхъ корня заданнаго уравненія вычислены.

§ 17.

Обращаясь теперь къ вычисленію мнимыхъ корней трехчленнаго уравненія, мы возьмемъ способъ Gauss'a, ибо этотъ способъ едвали подлежитъ упрощенію въ общемъ случаѣ.

Итакъ, намъ надо найти мнимые корни уравненія

(1) $$x^{q+p} + 2\alpha x^q + \beta = 0\,,$$

гдѣ α и β числа вещественныя.

Полагая $x = r(Cos\,\varphi + i\,Sin\,\varphi)$, подставляя въ уравненіе (1) и приравнивая нулю коэффиціентъ при i, получимъ

(2) $$r^p = -\frac{2\alpha\,Sin\,q\varphi}{Sin\,(p+q)\varphi}\,.$$

Перепишемъ теперь уравненіе (1) такъ

(3) $$x^p + 2a + \beta x^{-q} = 0.$$

Если мы относительно (3) сдѣлаемъ туже операцію, то получимъ

(4) $$r^{p+q} = \beta \frac{Sin\, q\varphi}{Sin\, p\varphi}.$$

исключая r изъ уравненій (2) и (4), получимъ

(5) $$\Omega(\varphi) = \lambda,$$

гдѣ

$$\lambda = (-1)^{p+q} \frac{(2a)^{p+q}}{\beta^p}, \quad \Omega(x) = \frac{[Sin\,(p+q)x]^{p+q}}{[Sin\,px]^p [Sin\,qx]^q}.$$

Подчеркнемъ главнѣйшія свойства функціи $\Omega(x)$.

I. Ея производная опредѣляется изъ уравненія

$$\frac{\Omega'(x)}{\Omega(x)} \cdot \frac{Sin\,(p+q)x}{Sin\,px\, Sin\,qx} = -(p+q)^2 \quad (p\, cotg\, px - q\, cotg\, qx)^2,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что знакъ производной $\Omega'(x)$ совпадетъ со знакомъ выраженія

$$-\frac{Sin\,(p+q)x}{Sin\,px\, Sin\,qx}\Omega(x).$$

II.

$$\Omega(-x) = \Omega(x), \quad \Omega(\pi - x) = \Omega(x)$$

Эти равенства показываютъ, что достаточно разсмотрѣть значенія x, заключающіяся между 0 и π.

III.

(6) $$\Omega(0) = \frac{(p+q)^{p+q}}{p^p q^q}.$$

IV. Въ промежуткѣ $\left(0, \frac{\pi}{p+q}\right)$ функція $\Omega(x)$ убываетъ отъ значенія (6) до нуля.

Когда найдены всѣ значенія φ, удовлетворяющія уравненію (5) и лежащія въ промежуткѣ $(0, \pi)$, то изъ нихъ надо откинуть тѣ, по которымъ получается изъ уравненій (2) и (4) для величинъ r^p или r^{p+q} числа отрицательныя. Gauss обратилъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Если мы прологариѳмируемъ уравненіе (5), ограничиваясь случаемъ $\lambda > 0$, то получаемъ

$$Lg\Omega(\varphi) = Lg\lambda.$$

Выраженіе $Lg\Omega(\varphi)$ вычисляется просто безъ пропорціональнаго интерполированія для тѣхъ значеній угла φ, для которыхъ въ таблицѣ $Lg\,Sin\,x$ указаны соотвѣтствующія числа, ибо, если φ_0 есть нѣкоторое табличное число, то и $Lg\,Sin\,p\varphi_0$, $Lg\,Sin\,q\varphi_0$, $Lg\,Sin\,(p+q)\varphi_0$ находятся прямо въ таблицѣ (безъ интерполированія). Итакъ, для всякаго табличнаго угла φ_0 вычисленіе $Lg\Omega(\varphi_0)$ производится очень просто. Gauss предлагаетъ найти два рядомъ стоящія табличныя числа φ_0 и φ_1 такія, чтобы было

$$Lg\Omega(\varphi_0) \gtreqless Lg\lambda\,,\quad Lg\Omega(\varphi_1) \lesseqgtr Lg\lambda\,;$$

другими словами, чтобы корень φ уравненія (5) заключался между числами φ_0 и φ_1. Для семизначныхъ таблицъ разность $\varphi_1 - \varphi_0$, какъ извѣстно, равна $10''$. Обыкновенно небольшое число пробъ приводитъ къ нахожденію чиселъ φ_0 и φ_1; окончательное же вычисленіе корня φ совершается по правилу regula falsi, т. е пропорціональнымъ интерполированіемъ.

§ 18.

Покажемъ на численномъ примѣрѣ способъ вычисленія мнимыхъ корней. Возьмемъ тоже самое уравненіе

$$x^5 - 4x - 2 = 0$$

$$p = 4\,,\ q = 1\,,\ \alpha = -2\,,\ \beta = -2\,.$$

Уравненія (2) и (4) § 17 имѣютъ въ данномъ случаѣ видъ

$$r^4 \quad \frac{4\,Sin\,\varphi}{Sin\,5\varphi}\,;\quad r^5 = \quad 2\,\frac{Sin\,4\varphi}{Sin\,5\varphi}\,,$$

слѣдовательно, должно быть

$$Sin\,\varphi > 0\,,\ Sin\,5\varphi > 0\,,\ Sin\,4\varphi < 0\,.$$

По этимъ неравенствамъ получаются слѣдующихъ два возможныхъ промежутка для искомаго корня

$$(72^0,\ 90^0)\,,\ (144^0,\ 180^0)\,.$$

Но промежутокъ $(144^0,\ 180^0)$ откидывается ибо въ немъ функція $\Omega(\varphi)$ измѣняется отъ 0 до $\frac{5^5}{4^4} = 12{,}19$, тогда какъ по уравненію (5) должно быть

$$\Omega(\varphi) = 64$$

Итакъ, искомый аргументъ одного изъ двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней долженъ быть въ промежуткѣ (72°, 90°). Разсмотрѣніе производной показываетъ, что въ этомъ промежуткѣ функція $\Omega(x)$ возрастаетъ.

Приходится разсматривать функцію

$$(1) \qquad 5\, lg\, Sin\, \varphi - lg\, Sin\, \varphi - 4\, lg\, Sin\, 4\varphi - lg\, 64\,.$$

Когда я приготовлялъ для книги эти вычисленія, то я пробовалъ сначала $\varphi = 80^0$. Функція (1) оказалась числомъ отрицательнымъ. Тогда я попробовалъ $\varphi = 85^0$; число оказалось также отрицательное, но уже малое. Проба $\varphi = 86^0$ привела къ положительному числу; слѣдовательно, корень заключается между 85^0 и 86^0. Примѣненіе правилъ regula falsi дало около $85^0 20'$. Двѣ дальнѣйшія пробы показали, что корень заключается между $85^0\, 21'$ и $85^0\, 22'$. Интерполируя по правилу regula falsi и производя еще пару пробъ, мы получаемъ окончательно два, рядомъ стоящія въ таблицѣ, числа

$$85^0 21' 20'',\; 85^0 21' 30'',$$

которымъ соотвѣтствуютъ значенія функціи (1)

$$-\,0{,}0011532\,,\; +\,0{,}0000735\,.$$

Пропорціональное интерполированіе даетъ окончательно

$$\varphi = 85^0 21' 29''{,}\, 37$$

По уравненію (2) § 17 получимъ значеніе модуля мнимаго корня

$$r = 1{,}443181\,.$$

Откуда искомыхъ два мнимыхъ корня будутъ

$$0{,}116792\,\ldots \pm i\,.\,1{,}438448\,\ldots$$

§ 19.

Метода Gauss'а подверглась обобщенію на случай четырехчленныхъ уравненій въ работѣ A. Wiener'а [1]).

---

[1]) Zeitschrift f. Math. Phys. 31 (1886), s. 65, 192

Способъ Graeffe.

§ 20

Способъ Graeffe основанъ на довольно простой мысли, которая восходитъ еще къ Dan Bernoulli [1]).

Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ корни уравненія $f(x)=0$.

Полагая по обыкновенію $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$, будемъ имѣть

$$\frac{s_k}{s_{k-1}} = x_1 \frac{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^k}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{k-1} + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{k-1}}.$$

Если корень x_1 имѣетъ наибольшій модуль, то при безпредѣльномъ возрастаніи k мы будемъ имѣть

$$\lim \frac{s_k}{s_{k-1}} = x_1.$$

Такимъ образомъ наибольшій по модулю корень можетъ быть найденъ какъ предѣлъ $\frac{s_k}{s_{k-1}}$.

Euler въ своемъ знаменитомъ сочиненіи „Introductio in analysin infinitorum". (T. I, Kap. 17) стремился придать идеямъ Bernoulli практическое значеніе и развилъ способъ вычислять корни численныхъ уравненій при помощи возвратныхъ рядовъ. Идеи Euler'a были развиты позднѣй иными авторами [2]).

Идея возвышенія корней въ безконечно большія степени привела къ дѣйствительно удобному на практикѣ способу рѣшенія уравненій лишь послѣ изслѣдованій Graeffe, развитыхъ позднѣйшими авторами [3])

---

[1]) *D. Bernoulli.* Comm. Petrop. 3. 1728. p. 92.

[2]) *Fourier* Anal. des équ. dét. Ostwalds Klass. № 127. *Stern.* Journ. f. r. u. ang. Math. 11 (1834). *Jacobi* ibidem 13 (1835). *Cohn.* Math. Ann. 44 (1894).

[3]) *Graeffe.* Die Aufl. d. höh. num. Gleich. 1837. *Encke.* Journ. f. r. u. ang. Math 22 (1841). *Carvallo.* Ann. d. la fac. de Toulouse (1882). *A. Крыловъ.* Лекціи о приб. вычисл. С.-Петербургъ 1911.

ГЛАВА XIII.

Двучленныя уравненія.

Двучленныя уравненія.

§ 1.

Будемъ разсматривать уравненія вида

(1) $$x^n - 1 = 0,$$

гдѣ n натуральное число. Изъ элементовъ извѣстно, что корни этого уравненія имѣютъ видъ

(2) $$r_k = Cos\frac{2k\pi}{n} + i\,Sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i}.$$

Давая значку k значенія

$$0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

получимъ всѣ n корней уравненія (1)

(3) $$r_0 = 1, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}.$$

Изъ формулы (2) вытекаетъ, что

$$r_k = \left\{e^{\frac{2\pi i}{n}}\right\}^k = r_1^k;$$

такимъ образомъ мы видимъ, что всѣ корни (3) получаются, какъ степени одного корня r_1, и, слѣдовательно, ряду чиселъ (3) можно дать видъ

(4) $$r_1^0, r_1^1, r_1^2, \ldots r_1^{n-1}.$$

§ 2.

Только что мы видѣли, что, если возвышать корень r_1 въ послѣдовательныя степени $1, 2, 3, \ldots, n-1$, то будутъ получаться отличные отъ единицы различные корни двучленнаго уравненія, и n-ая степень будетъ наименьшая изъ степеней, удовлетворяющая равенству

$$r_1^n - 1 = 0 .$$

Будемъ корни (3) § 1 называть *корнями степени n изъ единицы*, назовемъ *первообразнымъ* корнемъ степени n изъ единицы такой корень, что наименьшая его степень, обращающаяся въ единицу, будетъ n.

Мы видѣли уже, что по крайней мѣрѣ одинъ такой корень существуетъ, потому что корень r_1 какъ разъ обладаетъ этимъ свойствомъ и есть, слѣдовательно, первообразный.

§ 3.

Поставимъ себѣ вопросъ, существуютъ-ли кромѣ корня r_1 еще первообразные корни [1]). Нетрудно убѣдиться, что первообразнымъ будетъ всякій корень

$$r_k ,$$

гдѣ число k взаимно простое съ n. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ какую-нибудь цѣлую степень x этого корня

$$r_k^x = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}i} \right\}^x = e^{\frac{2kx\pi}{n}i}$$

и будемъ искать наименьшее цѣлое число, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство

(1) $$r_k^x = 1 .$$

Для того, чтобы это равенство имѣло мѣсто, надо положить

(2) $$kx = nl ,$$

гдѣ l цѣлое число, ибо тогда

$$e^{\frac{2kx\pi}{n}i} = e^{2l\pi i} = 1 .$$

---

[1]) Я предлагаю читателю сравнить разсужденія этой главы съ изложеніемъ въ моей книгѣ „Элементарный курсъ теоріи чиселъ" (вт. изд. 1913).

Такимъ образомъ, мы видимъ, что произведеніе kx дѣлится на n, но k число взаимно простое съ n, слѣдовательно, x должно дѣлиться на n, и мы получаемъ

$$x = n\xi,$$

гдѣ ξ число цѣлое. Такъ какъ наименьшее значеніе цѣлаго числа есть 1, то получаемъ наименьшее значеніе x, удовлетворяющаго (1), равнымъ n, и, слѣдовательно, корень r_k при k взаимно простомъ съ n есть первообразный.

Покажемъ дальше, что, если k будетъ имѣть общаго наибольшаго съ n дѣлителя d, отличнаго отъ 1, то корень r_k не будетъ первообразный. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ можно положить

$$k = dk_1, \ n = dn_1;$$

гдѣ k_1 и n_1 цѣлыя взаимно простыя числа, и кромѣ того

$$r_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = e^{\frac{2k_1\pi}{n_1}i},$$

слѣдовательно, получаемъ

$$r_k^{n_1} = e^{2k_1\pi i} = 1;$$

такимъ образомъ, мы видимъ, что въ этомъ случаѣ существуетъ такой показатель n_1, при возвышеніи въ степень котораго получается 1, но этотъ показатель меньше n; значитъ, въ этомъ случаѣ корень r_k непервообразный.

Получается слѣдующая теорема:

Существуетъ столько первообразныхъ корней степени n изъ единицы, сколько существуетъ чиселъ меньшихъ n и взаимно простыхъ съ n.

Будемъ обозначать во всемъ дальнѣйшемъ число первообразныхъ корней символомъ

$$\varphi(n),$$

$\varphi(n)$ есть нѣкоторая числовая функція, имѣющая смыслъ только при цѣлыхъ значеніяхъ аргумента n и принимающая только цѣлыя значенія. Такъ какъ существуетъ только одинъ первообразный корень изъ единицы первой степени, а именно сама единица, то считаютъ

$$\varphi(1) = 1.$$

Функція $\varphi(n)$, на основаніи только что приведенной теоремы, имѣетъ еще другое значеніе: она представляетъ число чиселъ, меньшихъ n и взаимно простыхъ съ нимъ.

Это даетъ возможность вычислять значенія функціи $\varphi(n)$ для различныхъ численныхъ значеній n; такъ, напримѣръ, $\varphi(6) = 2$, ибо существуютъ только два числа 1 и 5 взаимно простыя съ числомъ 6.

Если число n простое, то оно взаимно простое со всѣми числами меньшими его, а такихъ чиселъ будетъ $n - 1$, поэтому при n простомъ

$$\varphi(n) = n - 1 .$$

§ 4.

Покажемъ теперь, что для всякаго первообразнаго корня r_k имѣетъ мѣсто то же самое свойство, которое мы видѣли для первообразнаго корня r_1, а именно n *степеней*

(1) $$r_k^0,\ r_k^1,\ r_k^2,\ \ldots\ r_k^{n-1}$$

будутъ всѣ корни (3) § 1 изъ единицы.

Въ самомъ дѣлѣ, будемъ разсматривать произведенія

(2) $$k.0\,,\ k.1\,,\ k.2\,,\ \ldots\ k.l\,,\ \ldots\ k.(n-1)\,;$$

будемъ дѣлить произведенія (2) на число n и составлять остатки отъ этого дѣленія; пусть эти остатки будутъ

(3) $$\rho_0\,,\ \rho_1\,,\ \rho_2\,,\ \ldots\ \rho_{n-1}\,,$$

такъ что ρ_l обозначаетъ остатокъ отъ дѣленія на n числа kl; очевидно, что

$$\rho_0 = 0\,,\ \rho_1 = k\,,$$

такъ какъ k меньше n. Замѣтивъ, что

$$kl = nm + \rho_l\,,$$

гдѣ m цѣлое число, получимъ, очевидно,

$$r_k^l = e^{\frac{2kl\pi}{n}i} = e^{\frac{2(nm+\rho_l)\pi}{n}i} = e^{2m\pi i}.e^{\frac{2\rho_l\pi}{n}i} = e^{\frac{2\rho_l\pi}{n}i} = r_{\rho_l}$$

Отсюда мы видимъ, что числа ряда (1) будутъ представлять собою слѣдующій рядъ чиселъ

(4) $$r_{\rho_0}\,,\ r_{\rho_1}\,,\ r_{\rho_2}\,,\ \ldots\ r_{\rho_{n-1}}\,.$$

Мы желаемъ доказать, что рядъ (4) даетъ всѣ корни степени n изъ единицы. Для этой цѣли достаточно убѣдиться, что среди остатковъ (3) не будетъ одинаковыхъ; итакъ, покажемъ, что невозможно равенство

$$\rho_i = \rho_j\,;$$

предположимъ, что это равенство имѣло бы мѣсто, тогда два числа

$$ki \text{ и } kj$$

при дѣленіи на n давали бы одинаковые остатки, а, значитъ, ихъ разность

$$k(i-j)$$

давала бы въ остаткѣ нуль, но число k взаимно простое съ n, слѣдовательно, должно дѣлиться на n число $i-j$, что невозможно.

Итакъ, всѣ остатки

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}$$

различны между собою. Значитъ, доказана теорема:

Всякій первообразный корень степени n изъ единицы обладаетъ свойствомъ давать всѣ корни степени n изъ единицы при возвышеніи въ степени $0, 1, 2, \ldots, n-1$

§ 5.

Разсмотримъ теперь какой нибудь непервообразный корень r_k степени n изъ единицы. Предположимъ опять, что число k имѣетъ общаго наибольшаго дѣлителя d съ n, такъ что

$$k = d \, . \, k_1 \, , \quad n = d \, . \, n_1 \, ;$$

мы видѣли уже, что наименьшая степень корня r_k, дающая единицу, уже меньше n и равна n_1; будемъ говорить, что нашъ корень *принадлежитъ къ показателю* n_1.

Получаемъ теорему:

Всякій первообразный корень степени n изъ единицы принадлежитъ къ нѣкоторому показателю n_1, который есть дѣлитель числа n.

Посмотримъ теперь, сколько существуетъ корней степени n; принадлежащихъ къ опредѣленному показателю n_1.

Такъ какъ

$$r_k = e^{\frac{2k_1\pi}{n_1} i} \, ,$$

гдѣ k_1 число взаимно простое съ n_1 и меньшее этого числа, ибо $k < n$, то мы заключаемъ, что всякій корень степени n, принадлежащій показателю n_1, есть первообразный корень изъ единицы степени n_1, и, значитъ, число корней степени n, принадлежащихъ показателю n_1, будетъ $\varphi(n_1)$.

§ 6.

Разсмотримъ всевозможные дѣлители числа n и разсмотримъ сумму

$$\sum \varphi(n_i),$$

распространенную на всѣхъ дѣлителей числа n.

Нетрудно убѣдиться, что *эта сумма есть* n.

Въ этомъ убѣждаемся простымъ счетомъ корней; всякій корень принадлежитъ непремѣнно къ какому-нибудь показателю n_i, слѣдовательно, при счетѣ онъ дастъ единицу въ составѣ соотвѣтственной функціи $\varphi(n_i)$. Значитъ, перебравъ всѣ корни, мы съ одной стороны получимъ число n, а съ другой сумму всѣхъ функцій $\varphi(n_i)$. Получаемъ; слѣдовательно, равенство

$$n = \sum \varphi(n_i).$$

Напримѣръ, если $n = 12$, то дѣлители будутъ

$$1, 2, 3, 4, 6, 12,$$

и, значитъ,

$$12 = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + (12),$$

что легко провѣрить, ибо

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2,$$

$$\varphi(4) = 2, \quad \varphi(6) = 2, \quad \varphi(12) = 4.$$

§ 7.

Возьмемъ какой-нибудь первообразный корень r_k, и пусть число n раскладывается на два взаимно простыя множителя a и b, такъ что

(1) $$n = a.b.$$

Изъ элементовъ извѣстно, что можно подобрать безчисленное множество паръ чиселъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію

(2) $$ax + by = 1.$$

При этомъ очевидно, что число x взаимно простое съ b, ибо, если бы эти два числа имѣли дѣлителя δ, то на этого дѣлителя должна бы дѣлиться единица, что невозможно; точно также y взаимно простое съ a. Получаемъ

$$r_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} = e^{\frac{2k(ax+by)\pi}{n}i} = e^{\frac{2kx\pi}{b}i} e^{\frac{2ky\pi}{a}i} = r'.r'',$$

гдѣ

$$r' = e^{\frac{2kx\pi}{b}i}, \quad r'' = e^{\frac{2ky\pi}{a}i}.$$

Итакъ, мы представили первообразный корень степени n въ видѣ произведенія двухъ корней r' и r'', изъ которыхъ первый степени b, а второй степени a, причемъ оба эти корня первообразные, потому что число k взаимно простое съ обоими множителями a и b, и, слѣдовательно, kx взаимно простое съ b, а ky взаимно простое съ a.

Отсюда получаемъ слѣдующее правило составленія всѣхъ первообразныхъ корней степени ab, если извѣстны всѣ первообразные корни степени a и степени b, въ случаѣ a и b взаимно простыхъ между собою:

Перемножимъ каждый изъ корней степени a на каждый изъ корней степени b и получимъ всѣ первообразные корни степени ab, и выходитъ, что

(3)
$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Равенство (3) даетъ возможность получить общую формулу для вычисленія функціи $\varphi(n)$ для любого цѣлаго значенія n.

§ 8.

Въ самомъ дѣлѣ, равенство (3) можно написать для какого угодно числа множителей. Такъ, если заданъ рядъ какихъ угодно взаимно простыхъ чиселъ

$$a, b, c, \ldots$$

то получимъ

$$\varphi(a \cdot b \cdot c \ldots) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(c) \ldots$$

Напишемъ разложеніе заданнаго числа n на простыхъ множителей

$$n = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot p_3^{\lambda_3} \ldots$$

гдѣ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ простыя числа, входящія въ составъ n, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ нѣкоторыя цѣлыя числа, тогда получаемъ

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\lambda_1}) \cdot \varphi(p_2^{\lambda_2}) \cdot \varphi(p_3^{\lambda_3}) \ldots$$

Остается, слѣдовательно, показать, какъ вычислять функцію

$$\varphi(p^\lambda),$$

гдѣ p простое число

Разсмотримъ p^λ послѣдовательныхъ натуральныхъ чиселъ

$$1, 2, 3, \ldots p^\lambda - 1, p^\lambda;$$

изъ этихъ чиселъ взаимно простыми съ p^λ будутъ тѣ числа, которыя не дѣлятся на простое число p. Значитъ, чтобы сосчитать число этихъ чиселъ, надо выкинуть изъ нашего ряда всѣ числа, дѣлящіяся на p, т. е. слѣдующія

$$p\,,\ 2p\,,\ 3p\,\ldots(p^{\lambda-1}-1)p\,,\ p^{\lambda-1}.p\,;$$

такимъ образомъ, надо выкинуть $p^{\lambda-1}$ чиселъ не взаимно простыхъ съ p, и мы получаемъ, что число взаимно простыхъ чиселъ, меньшихъ p^λ будетъ

$$\varphi(p^\lambda)=p^\lambda-p^{\lambda-1}=p^\lambda\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

откуда получаемъ

$$\varphi(n)=p_1^{\lambda_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)p_2^{\lambda_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots$$

или окончательно

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots$$

Это выраженіе для функціи φ показываетъ, что для вычисленія этой функціи не надо знать показателей λ_i, а надо знать лишь всѣ различныя простыя числа, входящія въ составъ числа n.

§ 9.

Пусть

(1) $$k_1\,,\ k_2\,,\ k_3\,,\ \ldots k_{\varphi(n)}$$

будутъ всѣ числа взаимно простыя съ n и меньшія n.

Возьмемъ какое-нибудь изъ этихъ чиселъ, напримѣръ, k, тогда рядъ чиселъ

(2) $$kk_1\,,\ kk_2\,,\ \ldots kk_{\varphi(n)}$$

при дѣленіи этихъ чиселъ на n дастъ рядъ остатковъ

(3) $$l_1\,,\ l_2\,,\ \ldots l_{\varphi(n)}\,.$$

Нетрудно показать, что рядъ (3) состоитъ изъ тѣхъ же чиселъ, что и рядъ (1), только расположенныхъ въ другомъ порядкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что всѣ числа ряда (3) взаимно простыя съ n, ибо эти числа происходятъ отъ дѣленія чиселъ (2) взаимно простыхъ съ n на n, а при такомъ дѣленіи, еслибы остатокъ имѣлъ общаго дѣлителя съ n, то такого общаго дѣлителя имѣло бы дѣлимое. Итакъ, числа (3) суть числа меньшія n и взаимно простыя съ n. Остается показать, что эти числа различны между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что

$$l_i = l_j,$$

тогда разность двухъ чиселъ

$$kk_i \quad \text{и} \quad kk_j$$

должна бы дѣлиться на n, а это невозможно, потому что эта разность имѣетъ видъ

$$k(k_i - k_j)$$

и есть произведенiе числа k взаимно простого съ n и разности двухъ чиселъ меньшихъ n. Итакъ, рядъ остатковъ (3) совпадаетъ съ рядомъ (1). Отсюда получаются двѣ слѣдующiя весьма важныя теоремы

Теорема I. *Если мы возведемъ всѣ первообразные корни*

$$r_{k_1}, \; r_{k_2}, \; \ldots \; r_{k_{\varphi(n)}}$$

степени n изъ единицы въ степень, показатель которой k есть число взаимно простое съ n, то получимъ тѣ же самые первообразные корни, только расположенные въ другомъ порядкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, эти корни будутъ

$$r_{l_1}, \; r_{l_2}, \; \ldots \; r_{l_{\varphi(n)}}.$$

Теорема II. *Если мы возвысимъ какой нибудь первообразный корень r_k степени n изъ единицы въ степени, показатели которыхъ будутъ числа*

$$k_1, \; k_2, \; \ldots \; k_{\varphi(n)}$$

взаимно простыя съ n и меньшiя n, то мы получимъ всѣ первообразные корни степени n изъ единицы.

§ 10.

Пусть

(1) $$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

будетъ произвольно взятая цѣлая функцiя отъ какого-нибудь числа корней степени n изъ единицы съ цѣлыми коэффицiентами.

Составимъ рядъ функцiй

$$f_1, \; f_2, \; f_3, \; \ldots \; f_{n-1}, \; f_n,$$

которыя получаются изъ функцiи (1) замѣною корней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ послѣдовательными ихъ степенями, такъ что

$$f_1 = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

$$f_2 = f(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \ldots).$$

$$\ldots \quad \ldots \ldots \ldots$$

$$f_n = f(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n, \ldots).$$

Можно показать, что сумма

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n.$$

будетъ всегда цѣлое число, дѣлящееся на n. Покажемъ это.

Возьмемъ какой-нибудь первообразный корень r изъ единицы, тогда всѣ корни $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, какое бы ихъ число ни было, будутъ степенями этого первообразнаго корня. Подставляя эти степени корня r вмѣсто $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ въ функцію f_1 и, уничтожая всѣ степени r выше $n-1$ на основаніи равенства

$$r^n = 1,$$

представимъ нашу функцію въ такомъ видѣ

(2) $$f_1 = A + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_{n-1} r^{n-1},$$

гдѣ всѣ коэффиціенты

$$A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$$

числа цѣлыя. Замѣнимъ корни $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ какими-нибудь ихъ степенями

$$\alpha^k, \beta^k, \gamma^k, \ldots;$$

это все равно, что замѣнить первообразный корень r его степенью r^k, и тогда мы получимъ еще $n-1$ равенствъ

$$f_2 = A + A_1 r^2 + A_2 (r^2)^2 + \ldots + A_{n-1} (r^2)^{n-1},$$

$$f_3 = A + A_1 r^3 + A_2 (r^3)^2 + \ldots + A_{n-1} (r^3)^{n-1},$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$f_n = A + A_1 r^n + A_2 (r^n)^2 + \ldots + A_{n-1} (r^n)^{n-1}.$$

Складывая эти равенства съ равенствомъ (2), получимъ слѣдующее равенство

(3) $$f_2 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = n \cdot A,$$

потому что числа

$$r, r^2, r^3, \ldots r^n$$

суть всѣ корни α, β, γ, ... изъ единицы, а суммы различныхъ степеней всѣхъ этихъ корней до $(n-1)$-ой на основаніи стр. 284 равны нулю. Теорема такимъ образомъ доказана, ибо A цѣлое число.

§ 11.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію многочленовъ, корни которыхъ суть только первообразные корни какой-нибудь степени n изъ единицы.

Для полученія такой функціи, нужно изъ функціи

$$f(x) = x^n - 1$$

удалить всѣ непервообразные корни. Мы видѣли, что всякій непервообразный корень есть непремѣнно корень другого уравненія

$$x^{n_1} - 1 = 0,$$

гдѣ n_1 есть дѣлитель числа n. Значитъ, въ функціи $f(x)$ останутся только одни первообразные корни, если мы удалимъ изъ нея всѣхъ общихъ множителей, которые эта функція можетъ имѣть съ функціями низшихъ степеней

$$x^{n_1} - 1, \ x^{n_2} - 1, \ldots,$$

гдѣ n_1, n_2, ... суть всѣ дѣлители числа n.

Такъ какъ нахожденіе общаго дѣлителя двухъ функцій совершается при помощи послѣдовательнаго дѣленія, то, очевидно, что коэффиціенты всѣхъ цѣлыхъ функцій, которыя будутъ входить при сказанномъ процессѣ удаленія общихъ множителей будутъ раціональны.

Будемъ во всемъ дальнѣйшемъ обозначать черезъ

$$X_n$$

такой многочленъ, который имѣетъ только первообразные корни степени n изъ единицы. Очевидно, что этотъ многочленъ будетъ степени $\varphi(n)$, и мы получимъ

$$X_n = x^{\varphi(n)} + ax^{\varphi(n)-1} + bx^{\varphi(n)-2} + \ldots$$

гдѣ a, b, ... раціональные коэффиціенты.

§ 12.

Покажемъ на примѣрѣ первыхъ 12-ти чиселъ, какъ находить функцію X_n.

1^0. $n=1$, $\varphi(1)=1$;

такъ какъ можно считать, что существуетъ только одинъ первообразный корень первой степени изъ единицы, а именно сама единица, то

$$X_1 = x - 1$$

2^0. $n=2$ $\varphi(2)=1$;

въ этомъ случаѣ изъ функціи x^2-1 надо удалить корень первой степени, т. е раздѣлить эту функцію на $x-1$, и мы получимъ

$$X_2 = x + 1 .$$

3. $n=3$, $\varphi(3)=2$;

такъ какъ 3 число простое, то всѣ корни функціи x^3-1 кромѣ 1 суть первообразные, и, значитъ, раздѣляя на $x-1$, получимъ

$$X_3 = x^2 + x + 1 .$$

4^0. $n=4$, $\varphi(4)=4\cdot\frac{1}{2}=2$;

въ этомъ случаѣ изъ функціи x^4-1 надо удалить корни второй степени, т. е раздѣлить эту функцію на x^2-1, и мы получимъ

$$X_4 = x^2 + 1 .$$

5^0. $n=5$, $\varphi(5)=4$;

получаемъ

$$X_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 .$$

6^0. $n=6$, $\varphi(6)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=2$;

изъ функціи x^6-1 надо удалить всѣ корни третьей степени, значитъ, надо раздѣлить ее на x^3-1 и получимъ x^3+1; но еще надо раздѣлить на $x+1$ и мы получимъ

$$X_6 = x^2 - x + 1 .$$

7^0. $n=7$, $\varphi(7)=6$;

получаемъ

$$X_7 = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 .$$

8^0. $n=8$, $\varphi(8)=8\cdot\frac{1}{2}=4$;

удаляя изъ функціи x^8-1 всѣ корни 4-ой степени, т. е. раздѣляя на x^4-1, получимъ

$$X_8 = x^4 + 1 .$$

9^0. $n = 9$, $\varphi(9) = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$;

раздѣляя $x^9 - 1$ на функцію $x^3 - 1$, получимъ

$$X_9 = x^6 + x^3 + 1 .$$

10^0. $n = 10$, $\varphi(10) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4$;

раздѣляя $x^{10} - 1$ на $x^5 - 1$, получимъ $x^5 + 1$, а раздѣляя еще на $x + 1$, получимъ

$$X_{10} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

11^0 $n = 11$, $\varphi(11) = 10$;

получимъ

$$X_{11} = x^{10} + x^9 + x^8 + \ldots + x^3 + x^2 + x + 1 .$$

12^0. $n = 12$, $\varphi(12) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$;

раздѣляя $x^{12} - 1$ на $x^6 - 1$, получимъ $x^6 + 1$, а раздѣляя еще на $x^2 + 1$, получимъ

$$X_{12} = x^4 - x^2 + 1 .$$

§ 13.

На предыдущихъ примѣрахъ мы видѣли, что коэффиціенты функцій X_n оказываются не только раціональными, но и цѣлыми; это свойство, какъ нетрудно показать, принадлежитъ функціи X_n при всякомъ значеніи n.

Въ этомъ очень просто убѣдиться, если принять въ соображеніе слѣдующія леммы относительно цѣлыхъ функцій, указанныя Gauss'омъ и имѣющія большое примѣненіе въ разныхъ частяхъ Алгебры.

§ 14.

Будемъ разсматривать полиномы съ цѣлыми коэффиціентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n .$$

Если общій наибольшій дѣлитель всѣхъ коэффиціентовъ этой функціи есть 1, то будемъ называть эту функцію *первоначальною*. Нетрудно показать справедливость слѣдующей теоремы:

Если двѣ цѣлыя функціи

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

первоначальны, то ихъ произведеніе

$$c_0x^{m+n} + c_1x^{m+n-1} + \ldots + c_{m+n}$$

будетъ первоначально.

Допустимъ обратное: допустимъ, что произведеніе непервоначально; тогда всѣ коэффиціенты $c_0, c_1, \ldots c_{m+n}$ имѣютъ нѣкотораго дѣлителя $\delta > 1$. Этотъ дѣлитель должень заключать въ себѣ по крайней мѣрѣ одного простого множителя p; допустимъ, слѣдовательно, что всѣ коэффиціенты $c_0, c_1, c_2, \ldots$ дѣлятся на нѣкоторое простое число p, отличное отъ единицы. Невозможность этого допущенія обнаруживается сразу Въ самомъ дѣлѣ, пусть первый по счету слѣва коэффиціентъ, не дѣлящійся на p въ первомъ множителѣ будетъ a_r, а во второмъ b_s, тогда получаемъ

$$c_{r+s} = a_rb_s + a_{r+1}b_{s-1} + a_{r+2}b_{s-2} + \ldots + a_{r-1}b_{s+1} + a_{r-2}b_{s+2} + \ldots,$$

а такъ какъ всѣ коэффиціенты

$$b_{s-1}, b_{s-2}, \ldots a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots$$

дѣлятся на p, то во второй части послѣдняго равенства всѣ члены кромѣ перваго a_rb_s дѣлятся на p. Итакъ, оказывается, что c_{r+s} не можетъ дѣлиться на p_1.

§ 15

Изъ теоремы предыдущаго §-а можно вывести, какъ слѣдствіе, слѣдующую новую теорему:

Если двѣ цѣлыя функціи

$$\varphi(x) = x^n + \alpha_1x^{n-1} + \alpha_2x^{n-2} + \ldots$$

$$\psi(x) = x^m + \beta_1x^{m-1} + \beta_2x^{m-2} + \ldots$$

съ раціональными коэффиціентами даютъ въ произведеніи функцію

$$x^{m+n} + \gamma_1x^{m+n-1} + \gamma_2x^{m+n-2} + \ldots,$$

у которой коэффиціенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ цѣлыя числа, то цѣлыми должны быть также коэффиціенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ функцій φ и ψ.

Допустимъ обратное, а именно, что коэффиціенты у функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дробные. Обозначимъ черезъ α_0 наименьшій общій знаменатель всѣхъ коэффиціентовъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, а черезъ β_0 наименьшій общій знаменатель коэффиціентовъ $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Тогда двѣ функціи $\alpha_0\varphi(x)$ и $\beta_0\psi(x)$ будутъ съ цѣлыми коэффиціентами. Очевидно, что эти функціи будутъ первоначальными, потому что, если бы послѣ умноженія на α_0 функціи $\varphi(x)$ оказался у всѣхъ коэффиціентовъ этой функціи какой-нибудь общій множитель, то въ этомъ случаѣ число α_0 не могло бы быть общимъ наименьшимъ знаменателемъ. Итакъ, обѣ функціи

$$\alpha_0\varphi(x)\,,\ \beta_0\psi(x)$$

первоначальны, а, значитъ, первоначальной функціей должно было бы быть ихъ произведеніе

$$\alpha_0\beta_0(x^{n+m}+\gamma_1 x^{n+m-1}+\ldots)\,;$$

но такъ какъ всѣ коэффиціенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ числа цѣлыя, то для того, чтобы послѣдняя функція была первоначальною, необходимо, чтобы равнялся единицѣ общій множитель $\alpha_0\beta_0$ всѣхъ коэффиціентовъ, итакъ, выходитъ

$$\alpha_0\beta_0=1\,,$$

откуда

$$\alpha_0=1\,,\ \beta_0=1\,,$$

слѣдовательно, всѣ α_i и β_i числа цѣлыя, что и требовалось доказать.

§ 16.

Обращаемся теперь къ болѣе близкому разсмотрѣнію функцій X_n. Возьмемъ функцію

$$x^n-1\,.$$

Такъ какъ каждый изъ корней этой функціи принадлежитъ всегда къ нѣкоторому показателю n_1, который есть дѣлитель числа n, то нетрудно убѣдиться въ существованіе тождества

$$x^n-1=\Pi X_{n_1}\,, \tag{1}$$

гдѣ произведеніе распространяется на всѣхъ дѣлителей числа n. Въ справедливости формулы (1) убѣждаемся слѣдующимъ образомъ:

Такъ какъ во второй части мы разсматриваемъ всѣхъ дѣлителей n_1 числа n, то для каждаго дѣлителя n_1 мы можемъ взять только первообразные корни степени n_1.

Сравнивая высшія степени въ лѣвой и правой частяхъ, мы получаемъ соотношеніе

$$n \quad \sum\varphi(n) .$$

Изъ формулы (1) мы получаемъ слѣдующее важное заключеніе: такъ какъ произведеніе функцій X_n есть цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами, а мы знаемъ, что коэффиціенты функціи X_n раціональны, то мы приходимъ къ заключенію, что коэффиціенты функціи X_n должны быть числами цѣлыми.

Если мы примѣнимъ формулу (1) къ случаю $n=12$, то получимъ дѣлителей

$$1, 2, 3, 4, 6, 12,$$

слѣдовательно,

$$x^{12}-1=(x \quad 1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1) .$$

Неприводимость функцій X_n при n простомъ.

§ 17.

Цѣлыя функціи X_n обладаютъ свойствомъ неприводимости въ области раціональныхъ чиселъ. Далѣе мы докажемъ это свойство въ общемъ случаѣ, а теперь пока можно ограничиться доказательствомъ его лишь для n простого Мы приведемъ доказательство Gauss'а (Disquisitiones arithmeticae).

§ 18.

Докажемъ, что функція

$$X_n=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n \quad 1}+x^{n-2}+\ldots+x^2+x+1$$

неприводима, причемъ будемъ предполагать n простымъ.

Предположимъ обратное. Предположимъ, что функція X_n имѣетъ множителя $\varphi_1(x)$ съ раціональными, а, значитъ, цѣлыми коэффиціентами. Пусть степень этого множителя будетъ

$$m<n-1 .$$

Разлагая функцію $\varphi_1(x)$ на линейные множители, получимъ

$$\varphi_1(x)=(x \quad r)(x-s)(x-t)\ldots=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m .$$

гдѣ $r, s, t, \ldots$ суть нѣкоторые изъ m корней функціи φ_1, а коэффиціенты

$$a_1, a_2, \ldots a_m$$

суть цѣлыя числа. Составимъ теперь рядъ функцій

$$\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{n-1},$$

корни которыхъ будутъ квадраты, кубы, .. $n-1$-ыя степени корней функціи $\varphi_1(x)$, т. е.

$$\varphi_2 = (x - r^2)(x - s^2)(x - t^2) \ldots$$

$$\varphi_3 = (x - r^3)(x - s^3)(x - t^3) \ldots$$

. . . .

$$\varphi_{n-1} = (x - r^{n-1})(x - s^{n-1})(x - t^{n-1}) \ldots$$

Нетрудно видѣть, что всѣ коэффиціенты функцій

$$\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{n-1}$$

суть числа цѣлыя; въ самомъ дѣлѣ, эти коэффиціенты суть цѣлыя симметрическія функціи отъ корней $r, s, t \ldots$ съ цѣлыми коэффиціентами, значитъ, выражаются цѣлыми раціональными функціями отъ $a_1, a_2, \ldots a_m$ съ цѣлыми коэффиціентами.

Подставляя во всѣ эти выраженія 1 вмѣсто x, мы получимъ цѣлыя числа, которыя обозначимъ буквами

$$\varphi_1(1) = p_1, \ \varphi_2(1) = p_2, \ \ldots \varphi_{n-1}(1) = p_{n-1}.$$

Нетрудно, видѣть, что всѣ эти числа положительны. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ корни каждой изъ функцій $\varphi_i(x)$ мнимые, а, слѣдовательно, функція φ_i сохраняетъ свой знакъ при всевозможныхъ вещественныхъ значеніяхъ x; но, такъ какъ старшій коэффиціентъ этой функціи есть $+1$, то для достаточно большихъ вещественныхъ значеній x функція φ_i имѣетъ знакъ $+$; значитъ, она положительна и для всѣхъ остальныхъ вещественныхъ значеній, и, слѣдовательно, всѣ числа

$$p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$$

числа цѣлыя и положительныя.

Изъ выраженія

$$\varphi_1(1) = (1 - r)(1 - s)(1 - t) \ldots$$

мы видимъ, что $\varphi_1(1)$ есть цѣлая раціональная функція съ цѣлыми коэффиціентами отъ m величинъ $r, s, t, \ldots$ Обозначимъ эту функцію черезъ $\omega(r, s, t, \ldots)$, тогда мы имѣемъ равенства

$$\varphi_1(1) = \omega(r\ \ , s\ \ , t\ \ , \ldots) = p_1\ ,$$

(1) $$\varphi_2(1) = \omega(r^2\ , s^2\ , t^2\ , \ldots) = p_2\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n-1}(1) = \omega(r^{n-1}, s^{n-1}, t^{n-1}, \ldots) = p_{n-1}\ ,$$

и, наконецъ,

(2) $$\omega(r^n, s^n, t^n, \ldots) = p_n = 0\ .$$

Перемноживъ равенства (1), получимъ

$$\{(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{n-1})\}\{(1-s)(1-s^2)\ldots$$
$$(1-s^{n-1})\}\{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^{n-1})\}\ldots = p_1 p_2 \ldots p_{n-1}\ ;$$

каждый изъ множителей въ фигурныхъ скобкахъ представляетъ изъ себя не что иное, какъ результатъ подстановки единицы въ функцію X_{n-1} и мы получаемъ
$$\{X_n(1)\}^m = p_1 \cdot p_2 \ldots p_{n-1}\ .$$

Такъ какъ число n простое, то получаемъ

(3) $$n^m = p_1 \cdot p_2 \ldots p_{n-1}\ ;$$

такимъ образомъ каждое изъ цѣлыхъ чиселъ p_i можетъ быть только или самымъ числомъ n, или единицею, причемъ навѣрно будетъ нѣсколько чиселъ p_i равныхъ единицѣ, ибо въ правой части (3) множителей больше чѣмъ m и притомъ число равныхъ единицѣ чиселъ не меньше $n-1-m$; а если мы предположимъ, что которыя-нибудь изъ чиселъ p_i суть болѣе высокія степени числа n, то число равныхъ единицѣ чиселъ p_i должно быть еще больше. Итакъ, навѣрно существуетъ ρ чиселъ p_i равныхъ единицѣ; причемъ число ρ удовлетворяетъ неравенствамъ

$$n-1-m \leqq \rho \leqq n-2\ .$$

Остальные коэффиціенты p_i должны дѣлиться на n, и мы получаемъ слѣдующую формулу

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = \rho + nA\ ,$$

гдѣ A цѣлое число. Но на основаніи теоремы § 10 сумма

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n$$

должна быть цѣлымъ числомъ, дѣлящимся на n, слѣдовательно, мы получаемъ

$$nB = \rho + nA .$$

Мы приходимъ къ противорѣчію, что цѣлое число ρ, меньшее n, должно дѣлиться на n, что невозможно, ибо ρ не нуль. Стало быть, предположеніе, что функція X_n имѣетъ множителя $\varphi_1(x)$, ошибочно; значитъ, функція X_n при n простомъ неприводима

Вычисленіе функціи X_n при n составномъ.

§ 19.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію случая, когда n есть степень нѣкотораго простого числа p, т. е. пусть

$$n = p^\lambda$$

Можно написать

$$n = p \cdot p_1 ,$$

гдѣ $p_1 = p^{\lambda-1}$. Нетрудно видѣть, что мы получимъ всѣ первообразные корни степени n, если изъ всѣхъ корней степени n выкинемъ всѣ корни степени p_1; отсюда получаемъ

(1) $$X_n = \frac{x^{pp_1} - 1}{x^{p_1} - 1} = x^{p_1(p-1)} + \ldots + x^{2p_1} + x^{p_1} + 1 .$$

Если $p_1 > 1$, то между первымъ и вторымъ членами функціи (1) заключается пропускъ по крайней мѣрѣ одного члена. Отсюда получается такое свойство

Сумма всѣхъ первообразныхъ корней степени n, гдѣ n есть степень простого числа выше первой, равняется нулю.

Обращаясь къ общему случаю, употребимъ способъ разсужденія, который прилагался при выводѣ функціи $\varphi(n)$; предположимъ, что мы умѣемъ вычислить функцію X_n, если въ нее входитъ нѣкоторое число $m-1$ различныхъ простыхъ множителей, и покажемъ, какъ вычислить эту функцію, если число различныхъ простыхъ множителей будетъ на единицу больше, т. е. будетъ m.

Итакъ, пусть вычислена функція X_n при нѣкоторомъ значеніи n.

Пусть p простое число, не входящее въ составъ числа n; разсмотримъ, какъ вычислить функцію $X_{n'}$, гдѣ

$$n' = np^\lambda .$$

Пусть r будетъ корень функціи $X_n(x)$; тогда мы замѣчаемъ, что получимъ корни $X_{n'}(x)$, если умножимъ всѣ корни r на первообразные корни степени p^λ (см. § 7). Значитъ, если мы обозначимъ

$$p^\lambda = p \cdot p_1 ,$$

то мы получимъ всѣ первообразные корни степени p^λ, если отбросимъ изъ всѣхъ корней α степени p^λ всѣ корни β степени p_1; значитъ, мы получимъ всѣ корни $X_{n'}(x)$, если изъ всѣхъ корней $r\alpha$ отбросимъ всѣ корни $r\beta$. Нетрудно видѣть, что $r\alpha$ будутъ корнями функціи

$$X_n(x^{p^\lambda});$$

въ самомъ дѣлѣ,

$$(r\alpha)^{p^\lambda} = r^{p^\lambda} . \alpha^{p^\lambda} = r^{p^\lambda},$$

но такъ какъ p^λ число взаимно простое съ n, а возвышеніе первообразнаго корня r степени n въ степень простую съ n даетъ опять первообразный корень степени n, то r^{p^λ} будетъ также первообразный корень степени n, и мы получаемъ

$$X_n(r^{p^\lambda}) = 0 .$$

Это тождество можно переписать такъ

$$X_n\{(r\alpha)^{p^\lambda}\} = 0 .$$

значитъ, дѣйствительно, $r\alpha$ есть корень уравненія

$$X_n(x^{p^\lambda}) = 0 \tag{2}$$

Такъ какъ различныхъ значеній первообразнаго корня r степени n есть $\varphi(n)$, а различныхъ значеній всѣхъ корней α степени p^λ есть p^λ, то, значитъ, различныхъ $r\alpha$ будетъ

$$p^\lambda \varphi(n);$$

а такъ какъ этому же числу равна степень уравненія (2), то $r\alpha$ и будутъ всѣ корни уравненія (2). Подобнымъ же образомъ $r\beta$ будутъ всѣ корни уравненія

$$X_n(x^{p^{\lambda-1}}) = 0 . \tag{3}$$

Слѣдовательно, раздѣляя первую часть уравненія (2) на первую часть уравненія (3), мы должны получить какъ разъ функцію X_n и, значитъ, получаемъ тождество

$$X_{npp_1}(x) = \frac{X_n(x^{pp_1})}{X_n(x^{p_1})} . \tag{4}$$

§ 20.

Формула (4) предыдущаго параграфа даетъ возможность получать функцію X_n въ самомъ общемъ случаѣ.

Примѣнимъ ее къ случаю двухъ простыхъ множителей p и q, такъ что

$$n = q^{\mu} = q \cdot q_1 ,$$

гдѣ $q_1 = q^{\mu-1}$, а

$$n_1 = p^{\lambda} q^{\mu} = p^{\lambda} . n = n . p . p_1 ,$$

гдѣ $p_1 = p^{\lambda-1}$.

Получаемъ

(1) $$X_{n_1} = \frac{X_n(x^{pp_1})}{X_n(x^{p_1})} ;$$

но на основаніи соображеній предыдущаго параграфа мы видимъ, что

$$X_n(x) = \frac{x^{qq_1} - 1}{x^{q_1} - 1} ,$$

значитъ, по формулѣ (1) будемъ имѣть

$$X_{n_1} = \frac{x^{pp_1qq_1} - 1}{x^{pp_1q_1} - 1} : \frac{x^{qp_1q_1} - 1}{x^{p_1q_1} - 1} = \frac{(x^{pp_1qq_1} - 1)(x^{p_1q_1} - 1)}{(x^{pp_1q_1} - 1)(x^{qp_1q_1} - 1)} ,$$

или иначе

(2) $$X_{n_1} = \frac{(x^{n_1} - 1)(x^{\frac{n_1}{pq}} - 1)}{(x^{\frac{n_1}{p}} - 1)(x^{\frac{n_1}{q}} - 1)} .$$

Эта формула можетъ быть обобщена. Обозначая черезъ μ_1 всевозможныя частныя отъ дѣленія заданнаго n на всевозможныя произведенія, состоящія изъ четнаго числа различныхъ простыхъ множителей, входящихъ въ составъ числа n, а черезъ μ_2 всевозможныя частныя отъ дѣленія числа n на нечетное число различныхъ простыхъ множителей, входящихъ въ составъ числа n, получимъ

(3) $$X_n = \frac{\Pi(x^{\mu_1} - 1)}{\Pi(x^{\mu_2} - 1)} = \frac{(x^n - 1)\Pi(x^{\frac{n}{pq}} - 1) \ldots}{\Pi(x^{\frac{n}{p}} - 1)\Pi(x^{\frac{n}{pqr}} - 1) \ldots} .$$

Доказательство будетъ состоять въ томъ, что мы предположимъ формулу (3) справедливою для такого числа n, въ которое входитъ $m-1$ различныхъ простыхъ множителей, и покажемъ справедливость этой формулы для числа

$$n' = n . pp_1 ,$$

гдѣ p новое простое число, не входящее въ составъ числа n. Въ моей книгѣ элементарный курсъ теоріи чиселъ (втор. изд. 1913 г.) помѣщено болѣе простое доказательство формулы (3) основанное на ариѳметическихъ соображеніяхъ.

§ 21.

Укажемъ еще нѣсколько весьма важныхъ свойствъ функцій X_n.

Разсмотримъ функцію $X_n(x)$, гдѣ n число нечетное. Такъ какъ числа 2 и n взаимно простыя, то мы получимъ всѣ первообразные корни степени $2n$, если умножимъ всѣ первообразные корни степени n на первообразные корни 2-ой степени; но такъ какъ существуетъ только одинъ первообразный корень второй степени, именно -1, то, если черезъ r обозначимъ всѣ первообразные корни степени n, то $-r$ будутъ первообразными корнями степени $2n$, и получается тождество

(1) $$X_{2n}(x) = X_n(-x).$$

Такъ, напримѣръ,

$$X_3 = x^2 + x + 1,$$

поэтому

$$X_6 = x^2 - x + 1;$$

напримѣръ,

$$X_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,$$

поэтому

$$X_{10} = x^4 \quad x^3 + x^3 - x + 1.$$

Если n есть степень числа 2, т. е. $n = 2^\lambda$, то получаемъ

$$X_n = \frac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{2}} - 1} = x^{\frac{n}{2}} + 1.$$

Напримѣръ,

$$X_4 = x^2 + 1,$$

$$X_8 = x^4 + 1, \text{ и т. д.}$$

§ 22.

Если мы поставимъ 1 змѣсто x въ функцію $X_n(x)$, то мы видимъ, что для первыхъ значеній числа n получимъ значенія

$$X_2(1) = 2, \ X_3(1) = 3, \ X_4(1) = 2, \ X_5(1) = 5, \ \ldots$$

Можно доказать теорему:

При $n > 1$ значеніе $X_n(1)$ равняется простому числу p, если $n = p^\lambda$, равняется единицѣ, если въ составъ числа n входитъ больше одного простого множителя.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы (4) § 19

$$X_{npp_1}(x) = \frac{X_n(x^{pp_1})}{X_n(x^{p_1})}$$

мы замѣчаемъ, что, если значекъ npp_1 содержитъ больше одного простого множителя, то мы имѣемъ

$$X_{npp_1}(1) = \frac{X_n(1)}{X_n(1)} = 1$$

Если же n есть степень

$$p^\lambda = p \cdot p_1 ,$$

то по формулѣ (1) § 19, получаемъ

$$X_{p^\lambda}(1) = p .$$

Теорема Eisenstein'a и ея приложенія.

§ 23.

Выведемъ теперь весьма важную теорему, указанную Eisenstein'омъ [1]) На этой теоремѣ Eisenstein основалъ доказательство, интересующей теперь насъ, задачи о неприводимости X_n.

Теорема. Если въ цѣлой функціи

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

цѣлые коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots a_n$ таковы, что a_0 не дѣлится на нѣкоторое простое число p, всѣ остальные коэффиціенты $a_1, a_2, \ldots a_n$ дѣлятся на p, причемъ послѣдній коэффиціентъ a_n не дѣлится на p^2, то функція $f(x)$ неприводимая.

Допустимъ обратное, а именно, что функція $f(x)$ приводима, т. е

$$f(x) = (\alpha_0x^h + \alpha_1x^{h-1} + \ldots + \alpha_h)(\beta_0x^k + \beta_1x^{k-1} + \ldots + \beta_k);$$

числа h и k оба больше нуля и даютъ въ суммѣ n.

Такъ какъ $\alpha_h\beta_k = a_n$, то изъ двухъ множителей α_k и β_k долженъ только одинъ дѣлиться на p, а другой не долженъ дѣлиться. Пусть дѣлится

[1]) Crelle's Journal, Bd. 39, (1850)

на p коэффиціентъ β_k, а α_h не дѣлится. Всѣ β не могутъ дѣлиться на p, ибо иначе дѣлился бы коэффиціентъ a_0, что противорѣчитъ предположенію. Итакъ, пусть β_λ не дѣлится на p, а всѣ слѣдующія $\beta_{\lambda+1}$, $\beta_{\lambda+2}$, $\ldots \beta_k$ дѣлятся. Составляя коэффиціентъ при $x^{k-\lambda}$ въ произведеніи обоихъ полиномовъ, получаемъ

$$\alpha_h\beta_\lambda + \alpha_{h-1}\beta_{\lambda+1} + \cdot \cdot$$

Этотъ коэффиціентъ, очевидно, на p не дѣлится.

Приходится предположить, что $k - \lambda = n$, а это невозможно, ибо $k < n$

§ 24.

Примѣнимъ теорему Eisenstein'а къ доказательству неприводимости функціи

$$X_p = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

при p простомъ. Положимъ $x = z + 1$, тогда получимъ

$$X_p(z+1) = \frac{1}{z}\left[(z+1)^p - 1\right] = z^{p-1} + pz^{p-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} z^{p-3} + \ldots + p.$$

Въ правой части всѣ коэффиціенты кромѣ перваго дѣлятся на p, причемъ послѣдній дѣлится только на первую степень p. Значитъ, $X_p(z+1)$ есть функція неприводимая, а, слѣдовательно, тоже самое будетъ имѣть мѣсто также для функціи $X_p(x)$, что и требовалось доказать.

§ 25.

Подобнымъ образомъ можно доказать справедливость теоремы о неприводимости X_n при $n = p^k$, гдѣ p простое число.

Мы имѣемъ

$$X_n(x) = \frac{x^{p^k} - 1}{x^{p^{k-1}} - 1}.$$

Полагая $x = z + 1$, мы видимъ, что $X_n(z+1)$ получаемъ отъ дѣленія $x^{p^k} - 1 = z^{p^k} + p\varphi(z)$, на $x^{p^{k-1}} - 1 = z^{p^{k-1}} + p\psi(z)$, гдѣ функціи $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имѣютъ цѣлые коэффиціенты. Обдумывая механизмъ выкладки дѣленія, мы придемъ къ заключенію, что

$$(1) \qquad X_n(z+1) = z^{p^{k-1}(p-1)} + p\omega(z),$$

гдѣ $\omega(z)$ также цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами. Для приложе-

нія теоремы Eisenstein'а необходимо убѣдиться, что независимый отъ z членъ въ функціи (1) не дѣлится на p^2. Это, дѣйствительно, имѣетъ мѣсто, ибо подставляя $z=0$, мы должны припомнить формулу $X_n(1)=p$ § 22.

О неприводимости X_n въ общемъ случаѣ.

§ 26

Доказательство неприводимости X_n при произвольномъ n вначалѣ представило математикамъ значительной трудности; эти трудности были однако превзойдены и мы въ настоящее время имѣемъ рядъ доказательствъ, предложенныхъ различными авторами. Мы приведемъ здѣсь доказательства: Dedekind'а, Ardt'а и Petersen'а.

Предварительно мы дадимъ нѣсколько основныхъ теоремъ, относящихся къ теоріи функціональныхъ сравненій по простому модулю p.

Мы будемъ писать сравненіе

$$F(x) \equiv 0 \ (mod\, p),$$

если всѣ цѣлые коэффиціенты цѣлой функціи $F(x)$ дѣлятся на p, т. е., иначе говоря, сравнимы съ нуломъ по модулю p [1]).

Сравненіе

$$f(x) \equiv \varphi(x) \ (mod\, p)$$

должно обозначать, что коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ $f(x)$ и въ $\varphi(x)$ сравнимы между собой по модулю p. Напримѣръ,

$$2x^2 - x + 3 \equiv 7x^2 + 4x - 2 \ (mod\, 5).$$

Теорема. *Schönemann'а. При произвольныхъ перемѣнныхъ независимыхъ* $u, v, w, \ldots$ *имѣетъ мѣсто сравненіе*

$$(u + v + w + \ldots)^p \equiv u^p + v^p + w^p + \ldots \ (mod\, p).$$

Доказательство этой теоремы основано на свойствѣ полиноміальнаго коэффиціента (см. § 6; Глава I)

$$\frac{p\,.(p-1)(p-2)\ldots 2\,.\,1}{1\,.\,2\ldots a\,.\,1\,.\,2\ldots b\ldots 1\,.\,2\ldots d},$$

гдѣ $a + b + \ldots + d = p$, дѣлиться на простое число p, ибо простого числа p нѣтъ среди множителей знаменателя.

---

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ втор. изд 1913 г, глава III.

Изъ этой теоремы вытекаетъ рядъ важныхъ слѣдствій.

Разсмотримъ уравненіе

(1) $$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

съ *цѣлыми* коэффиціентами $a_1 a_2 \ldots a_n$

Мы имѣемъ

(2) $$a_1 = \sum\alpha,\ a_2 = \sum\alpha\beta,\ -a_3 = \sum\alpha\beta\gamma,\ \ldots$$

гдѣ черезъ α, β, γ, ... обозначены корни (1).

Пусть p обозначаетъ произвольное простое число. Составимъ уравненіе

(3) $$F(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

корни котораго суть p-ыя степени корней заданнаго (1), т. е.

$$F(x) = (x - \alpha^p)(x - \beta^p)(x - \gamma^p)\ .$$

Значитъ,

(4) $$-A_1 = \sum\alpha^p,\ A_2 = \sum\alpha^p\beta^p,\ -A_3 = \sum\alpha^p\beta^p\gamma^p,\ \ldots$$

Сравнивая (4) и (2) и принимая во вниманіе теорему Schönemann'a, получимъ

(5) $$A_1 \equiv a_1^p,\ A_2 \equiv a_2^p,\ A_3 \equiv a_3^p,\ \ldots\ (mod\, p),$$

гдѣ, очевидно, числа A_1, A_2, A_3 ... суть цѣлыя, ибо на основаніи (4) эти числа какъ симметрическія функціи отъ корней α, β, γ, ... выражается въ видѣ цѣлыхъ функцій отъ a_1, a_2, ... a_n съ цѣлыми коэффиціентами.

На основаніи теоремы Fermat'a[1]) можно будетъ сравненія (5) переписать такъ

$$A_1 \equiv a_1,\ A_2 \equiv a_2,\ \ldots (mod\, p)\ .$$

Сопоставляя же эти сравненія съ (1) и (3) получимъ сравненіе

(6) $$F(x) \equiv f(x)\,(mod\, p),$$

выражающее весьма важную теорему.

[1]) Д. Граве Элементарный курсъ теоріи чиселъ, вт. изд. 1913, Глава III § 9.

§ 27.

Начнемъ съ доказательства Petersen'a [1]).

Если X_n приводимая функція, т. е. если

$$(1) \qquad X_n(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)\ldots.$$

гдѣ $\psi_i(x)$ суть неприводимыя цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами со старшимъ коэффиціентомъ равнымъ единицѣ, то, 1), *всѣ функціи* $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)\ldots$ *имѣютъ одну и туже степень*, 2) *корни всякой функціи* $\psi_i(x)$ *будутъ получаться отъ возвышенія въ нѣкоторую степень корней* $\psi_1(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α будетъ корень функціи $\psi_1(x)$; по опредѣленію функціи X_n корень α будетъ первообразнымъ степени n корнемъ изъ единицы.

Пусть β будетъ какой нибудь корень функціи $\psi_2(x)$; такъ какъ β будетъ другимъ первообразнымъ корнемъ степени n изъ единицы, то мы будемъ имѣть $\beta = \alpha^k$, гдѣ k число взаимно простое съ n.

Составимъ уравненіе $\psi(x)$, корни котораго получаются отъ возвышенія въ степени k корней уравненія $\psi_1(x) = 0$. Два уравненія $\psi(x) = 0$, $\psi_2(x) = 0$ имѣютъ одинъ общій корень α^k, слѣдовательно, на основаніи неприводимости $\psi_2(x)$ функція $\psi(x)$ должна дѣлиться на $\psi_2(x)$. Значитъ, степень $\psi(x)$ не ниже $\psi_2(x)$, то есть, степень $\psi_1(x)$ не ниже степени $\psi_2(x)$. Мѣняя ролями функціи ψ_1 и ψ_2, приходимъ къ убѣжденію, что обѣ эти функціи имѣютъ одну и туже степень

§ 28.

Приложимъ теорему § 27 къ доказательству неприводимости X_n при $n = p^k$

Подставляя $x = 1$ въ равенство (1) § 27, получимъ

$$p = \psi_1(1)\psi_2(1)\ldots$$

Откуда одинъ изъ множителей $\psi_i(1)$ долженъ равняться $\pm p$, а остальные ± 1. Пусть $\psi_1(1) = \pm p$, $\psi_2(1) = \pm 1$. Если мы положимъ

$$\psi_1(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots.$$

то будетъ

$$\psi_2(x) = (x-\alpha^k)(x-\beta^k)(x-\gamma^k).$$

---

[1]) Petersen Théorie des équations algébriques, 1897, p 349.

Получаемъ далѣе

$$\frac{1}{p} + \frac{\psi_2(1)}{\psi_1(1)} = \pm \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\beta^k}{1-\beta} \cdot \frac{1-\gamma^k}{1-\gamma} \cdots =$$

$$= \pm (1 + \alpha + \ldots + \alpha^{k-1})(1 + \beta + \ldots \beta^{k-1}) \ldots$$

Послѣднее равенство *невозможно*, ибо лѣвая часть $\frac{1}{p}$ есть правильная дробь, тогда какъ правая часть будетъ цѣлымъ числомъ, ибо эта правая часть, есть цѣлая симметрическая функція отъ корней ψ_1 съ цѣлыми коэффиціентами.

§ 29.

Приступимъ теперь къ доказательству неприводимости X_n въ общемъ случаѣ. Допустимъ приводимость

$$X_n = \psi_1(x)\psi_2(x) \ldots$$

И разсмотримъ всѣ возможныя разности

(1) $$\psi_i(x) - \psi_k(x).$$

Пусть m будетъ цѣлое число, выбранное подъ двумя условіями: 1) чтобы было $m > n$, 2) чтобы было m больше всякаго дѣлителя всѣхъ цѣлыхъ коэффиціентовъ всѣхъ разностей (1).

Пусть корни $\psi_2(x)$ происходятъ отъ корней $\psi_1(x)$ черезъ возвышеніе въ степень k, гдѣ k число взаимно простое съ n. Возьмемъ цѣлое число

(2) $$t = An + k$$

гдѣ A есть произведеніе простыхъ чиселъ, не превосходящихъ m и не входящихъ въ k. Если мы разложимъ число t на простые множители

$$t = q_1 q_2 q_3 \ldots,$$

то всѣ эти простые множители $q_1, q_2, \ldots$, должны быть больше m.

Черезъ возвышеніе корней ψ_1 въ степень t получается, очевидно. на основаніи (2) функція ψ_2. Будемъ теперь возвышать корни функціи ψ_1 послѣдовательно въ степени $q_1, q_2, \ldots$ Такъ какъ произведеніе t переводитъ ψ_1 въ ψ_2, то не можетъ ψ_1 остаться безъ измѣненій при возвышеніи ея корней въ степень всякого одного изъ множителей q. Пусть при воз-

вышеніи въ степень q_1 функція ψ_1 переходитъ въ другую ψ_i, тогда, примѣняя теорему § 26, получимъ

$$\psi_1 \equiv \psi_i \pmod{q_1},$$

что невозможно, ибо $q_1 > m$.

§ 30.

Приведемъ теперь доказательство Dedekind'a [1]).

Для доказательства неприводимости X_n поступимъ такъ. Пусть $f(x)$ будетъ одинъ изъ неприводимыхъ множителей полинома X_n, если мы допустимъ приводимость функціи X_n. Пусть α одинъ изъ корней $f(x)$.

Корень α есть въ тоже время корень X_n, т. е. первообразный корень степени n изъ единицы. Если мы докажемъ, что α^μ будетъ корнемъ функціи $f(x)$ при всякомъ числѣ μ взаимно простомъ съ n, то отсюдв вытечетъ $f(x) = X_n$ и неприводимость X_n будетъ доказана.

Достаточно показать справедливость сказаннаго для случая $\mu = p$, гдѣ p простое число, не входящее въ составъ числа n; ибо въ случаѣ μ составного мы можемъ повторить разсужденіе относительно всѣхъ его простыхъ дѣлителей взятыхъ въ извѣстномъ порядкѣ

Возвысимъ всѣ корни

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots$$

функціи $f(x)$ въ степень p

(1) $$\alpha^p,\ \beta^p,\ \gamma^p,\ \ldots$$

Очевидно, что числа (1) всѣ различныя между собой, ибо обозначая черезъ p' число удовлетворяющее сравненію $p'p \equiv 1 \pmod{n}$, можемъ возвысить равенство $\alpha^p = \beta^p$ въ степень p' и получимъ $\alpha = \beta$, что противорѣчило бы предположенію неприводимоств $f(x)$.

Пусть $F(x)$ будетъ та функція, которой корнями являются числа (1).

Нетрудно убѣдиться, что функція $F(x)$ неприводимая.

Допустимъ обратное и пусть будетъ $F_1(x)$ тотъ изъ неприводимыхъ множителей функціи $F(x)$, который имѣетъ корень α^p, такъ что $F_1(\alpha^p) = 0$. Мы видимъ, слѣдовательно, что уравненіе $F_1(x^p) = 0$ удовлетворяется однимъ изъ корней α неприводимой функціи $f(x)$; значитъ, это уравненіе должно удовлетворяться всѣми остальными корнями

$$F_1(\alpha^p) = 0,\ F_1(\beta^p) = 0,\ F_1(\gamma^p) = 0,\ \ldots$$

то есть функція $F_1(x)$ совпадаетъ съ $F(x)$, что и требовалось показать.

---

[1]) *Dedekind.* Beweis für die Irreducibilität der Kreisteilungsgleichungen. Crelle J. Bd. 54.

Если функція $f(x)$ первоначальная, то такова же будетъ и функція $F(x)$. Двѣ неприводимыя функціи $f(x)$ и $F(x)$ одной степени должны или совпадать или быть взаимно простыми. Допустимъ второе предположеніе. Если функціи $f(x)$ и $F(x)$ не имѣютъ общихъ множителей, то онѣ представляютъ изъ себя двухъ различныхъ дѣлителей функціи x^n-1 и мы приходимъ къ тождеству

$$x^n-1=f(x)F(x)\varphi(x)\,, \tag{1}$$

гдѣ $\varphi(x)$ функція съ цѣлыми коэффиціентами.

На основаніи теоремы Schönemann'а (6) § 26 получаемъ

$$F(x)\equiv f(x)\ (mod\, p)\,,$$

слѣдовательно, равенство (1) можетъ быть переписано такъ

$$x^n-1=[f(x)]^2\varphi(x)+p\omega(x)\,; \tag{2}$$

отсюда, дифференцируя, получимъ

$$nx^{n-1}=f(x)X(x)+p\lambda(x)\,, \tag{3}$$

гдѣ $\omega(x)$, $X(x)$, $\lambda(x)$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами. Умножая (2) на $-n$, а (3) на x и складывая, получимъ *невозможное* сравненіе

$$n\equiv f(x)\Phi(x)\ \ (mod\, p) \tag{4}$$

гдѣ $\Phi(x)$ функція съ цѣлыми коэффиціентами. Такъ какъ число n не дѣлится на p, то нельзя предполагать всѣ коэффиціенты $\Phi(x)$ дѣлящимися на p, а значитъ въ правой части сравненія (4) долженъ существовать по крайней мѣрѣ одинъ членъ, содержащій x съ недѣлящимся на p коэффиціентомъ и сравненія (4) невозможно.

Итакъ $F(x)=f(x)$, мы получаемъ, слѣдовательно, $f(\alpha^p)=0$ и теорема доказана

§ 31.

Приведемъ, наконецъ, доказательство Arndt'а [1]).

Будемъ доказывать справедливость теоремы для уравненія

$$X_n=0\,,$$

[1]) *Arndt*. Einfacher Beweis für die Irreducibilität einer Gleichung in der Kreistheilung. Crelle Journ. Bd. 56. *Lebesgue*. Demostration de l'irréducibilité de l'équation aux racines primitives de l'unité. Journ. de Liouville T. 4. Serie II.

гдѣ $n = p^\alpha . n'$, предполагая доказанною неприводимость X_n' для числа n' заключающаго меньшее число различныхъ между собой простыхъ множителей. Мы предполагаемъ, что простое число p не входитъ въ составъ числа n'.

Допустимъ обратное, а именно, что функція X_n разлагается на два цѣлочисленныхъ множителя

$$X_n = \varphi(x)\psi(x)$$

Пусть

$$\Phi(x) = 0\,,\ \Psi(x) = 0$$

будутъ уравненія, которымъ удовлетворяютъ p^α степени корней соотвѣтственныхъ уравненій

$$\varphi(x) = 0\,,\ \psi(x) = 0\,.$$

На основаніи теоремы Schönemann'a получаемъ

(1) $$\varphi(x) \equiv \Phi(x)\,;\ \psi(x) = \Psi(x) (mod\, p)\,.$$

Всякій первообразный корень r изъ единицы степени n можетъ быть представленъ въ видѣ

$$r = \rho r',$$

гдѣ ρ есть первообразный корень степени p^α, а r' первообразный корень степени n'.

Очевидно, что

$$r^{p^\alpha} = r'^{p^\alpha}$$

будетъ первообразнымъ корнемъ степени n'.

Возьмемъ произвольный изъ корней r' неприводимаго на основаніи нашего допущенія уравненія $X_n' = 0$.

Итакъ, мы видимъ, что каждое изъ уравненій $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x) = 0$ имѣетъ корень $r^{p^\alpha} = r'^{p^\alpha}$ общій съ уравненіемъ $X_n' = 0$. На основаніи допущенной неприводимости послѣдняго уравненія получимъ

$$\varphi(r') \equiv 0\,,\ \psi(r') \equiv 0 \,(mod\, p)$$

или, что одно и тоже,

(2) $$X_n(r') = p^2 f(r')\,,$$

гдѣ r' произвольный корень уравненія $X_n' = 0$.

Мы видѣли уже, что

$$x^n - 1 = \Pi X_d(x)\,,\ x^{\frac{n}{p}} - 1 = \Pi X_\delta(x)\,,$$

гдѣ значекъ d распространяется на всѣхъ дѣлителей числа n, а значекъ

δ на всѣхъ дѣлителей числа $\frac{n}{p}$. Отсюда мы видимъ, что δ не можетъ равняться n, тогда какъ среди d существуетъ значекъ равный n. Итакъ. цѣлая функція

$$\frac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{p}} - 1}$$

должна дѣлиться на X_n и мы получаемъ

$$\frac{x^n - 1}{x^{\frac{n}{p}} - 1} = X_n(x) \cdot \omega(x),$$

полагая $x = r'$ получаемъ

$$p = X_n(r')\omega(r').$$

Сопоставляя же съ (2), получимъ

$$1 = pf(r')\omega(r').$$

Удаляя изъ произведенія $f(r')\omega(r')$ всѣ степени r' выше $\varphi(n')$ при помощи уравненія $X_n' = 0$ придемъ къ равенству

$$1 = p(a_0 + a_1 r' + a_2 r'^2 + \ldots),$$

дающему невозможное равенство

$$1 = pa_0,$$

ибо всѣ числа a_0, a_1, a_2, ... цѣлыя. И теорема, подлежавшая доказательству, оказывается справедливою.

Относительная приводимость цѣлыхъ функцій.

§ 32.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ объ одномъ очень важномъ понятіи, о такъ называемой, *относительной приводимости* функцій. Можно доказать такую теорему.

Теорема. *Заданы двѣ неприводимыя цѣлыя функціи $f(x)$, $\varphi(x)$. Если одна изъ нихъ $f(x)$ дѣлается приводимою отъ присоединенія корня η другой $\varphi(x)$, то и вторая $\varphi(x)$ сдѣлается приводимою при присоединеніи корня ξ первой функціи $f(x)$.*

Итакъ, по предположенію функція $f(x)$ дѣлается приводимою отъ присоединенія корня η второй, слѣдовательно, имѣемъ

$$f(x) = f_1(x, \eta) f_2(x, \eta).$$

Цѣлыя функціи f_1, f_2 отъ двухъ аргументовъ x, η можно предполагать относительно η степени меньшей степени функціи $\varphi(x)$, ибо всѣ высшія степени можно уничтожить при помощи уравненія $\varphi(\eta) = 0$.

Если ξ есть корень функціи $F(x)$, то мы имѣемъ

$$f_1(\xi, \eta) f_2(\xi, \eta) = 0.$$

Итакъ, уравненіе

$$f_1(\xi, y) f_2(\xi, y) = 0$$

имѣетъ одинъ общій корень η съ уравненіемъ $\varphi(y) = 0$.

Очевидно, что предположеніе о томъ, что функція $\varphi(x)$ остается неприводимой при присоединеніи ξ, падаетъ, ибо функція

$$f_1(\xi, y) f_2(\xi, y)$$

должна дѣлиться на неприводимую функцію $\varphi(y)$ между тѣмъ какъ ни одинъ изъ множителей f_1, f_2 будучи функціей низшей степени не можетъ дѣлиться.

§ 33

Итакъ, мы видимъ, что каждыя двѣ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ либо остаются неприводимыми при присоединеніи къ одной корня другой, или же онѣ суть взаимно приводимыя.

Покажемъ на примѣрѣ случай взаимной неприводимости.

Функціи X_n, X_m взаимно неприводимы, если числа n и m суть числа взаимно простыя [1]).

Обозначимъ черезъ ν одинъ изъ корней X_n, а черезъ μ одинъ изъ корней X_m.

Выраженіе $\rho = \nu\mu$ будетъ первообразнымъ корнемъ степени mn изъ единицы.

Подберемъ два цѣлыхъ раціональныхъ числа x и y, удовлетворяющихъ равенству

$$nx + my = 1.$$

Получимъ

$$\nu = \rho^{my}, \quad \mu = \rho^{nx}.$$

[1]) *Kronecker*. Mém. sur les facteurs irréductibles de l'expression $x^n - 1$. Journ. de Liouville. T. 19. (1854).

Допустимъ взаимную приводимость X_n и X_m. Пусть

$$\varphi(x, \mu)$$

будетъ множитель X_n, предполагая, что последняя функція сдѣлалась приводимою отъ присоединенія корня μ функціи X_m. Очевидно, что по крайней мѣрѣ для одного изъ корней ν функціи X_n будетъ удовлетворяться уравненіе

$$\varphi(\nu, \mu) = 0,$$

которое можно переписать еще такъ

(1) $$\varphi(\rho^{my}, \rho^{nx}) = 0 .$$

Вслѣдствіе доказанной неприводимости X_{mn} въ области раціональныхъ чиселъ, можно подставить въ уравненіе (1) вмѣсто ρ другой корень ρ^h, гдѣ h число взаимно простое съ mn.

(2) $$\varphi(\rho^{hmy}, \rho^{hnx}) = 0 .$$

Возьмемъ совершенно произвольное число s, взаимно простое съ n и подберемъ h такъ, чтобы было [1])

$$h \equiv s \; (mod\, n), \quad h \equiv 1 \; (mod\, m),$$

тогда равенство (2) приметъ видъ

$$\varphi(\nu^s, \mu) = 0$$

и, слѣдовательно, $\varphi(x, \mu)$ дѣлится на X_n. Отсюда получается неприводимость X_n, которая остается послѣ присоединенія μ, т. е другими словами получается взаимная неприводимость функцій X_n, X_m.

§ 34.

Относительно функцій взаимно приводимыхъ можно доказать рядъ дальнѣйшихъ свойствъ. Обѣ функціи раскладываются на одинаковое число множителей при чемъ степени этихъ множителей въ одной функціи пропорціональны степенямъ ихъ въ другой.

Landsberg показываетъ въ 132 томѣ журнала Crelle'a связь этого вопроса съ разложеніемъ группъ по двойному модулю

---

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Втор. изд. 1913 г. Стр. 54.

Вычисленіе дискриминанта X_n.

§ 35.

Въ книгѣ Weber'a Lehrbuch der Algebra дается вычисленіе дискриминанта уравненія $X_n=0$ только для случая $n=p^k$, гдѣ p простое число; между тѣмъ какъ вычисленіе дискриминанта также для общаго случая производится совершенно элементарно [1]) на основаніи тѣхъ же самыхъ соображеній.

Мы имѣемъ

$$X_n(x)=\frac{(x^n-1)\Pi(x^{\frac{n}{pq}}-1)\ldots}{\Pi(x^{\frac{n}{p}}-1)\Pi(x^{\frac{n}{pqr}}-1)\ldots}$$

Для полученія дискриминанта составляемъ произведеніе

$$(1)\qquad \varepsilon\Pi X_n'(r),$$

гдѣ $\varepsilon=(-1)^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}}$, $n_1=\varphi(n)$, а произведеніе Π распространяется на всѣ $\varphi(n)$ корней r уравненія $X_n=0$.

Очевидно, что при вычисленіи произведенія (1) достаточно замѣнить производную $X_n'(x)$ выраженіемъ

$$(2)\qquad \frac{nx^{n-1}\Pi(x^{\frac{n}{pq}}-1)\ldots}{\Pi(x^{\frac{n}{p}}-1)\Pi(x^{\frac{n}{pqr}}-1)\ldots}$$

происходящимъ отъ дифференцированія только одного перваго множителя x^n-1 выраженія X_n.

Подставимъ вмѣсто x въ выраженіе (2) послѣдовательно всѣ корни $r_1 r_2, \ldots r_{n_1}$ уравненія $X_n=0$ и перемножимъ полученные результаты. Получаемъ прежде всего въ числителѣ

$$n^{\varphi(n)}.$$

Кромѣ того будетъ имѣть мѣсто равенство

$$(r_1 r_2 \ldots r_{n_1})^{n-1}=1,$$

---

[1]) Rados. Crelle's Journ. 131, 49 (1906)

ибо равно единицѣ произведеніе всѣхъ первообразныхъ корней изъ единицы [1]).

Точно также дадутъ единицу въ произведеніи части $\Pi(r_i^{\frac{n}{pq}}-1)$, $\Pi(r_i^{\frac{n}{pqr}}-1)$, ..., а потому остается лишь разсмотрѣть часть знаменателя

$$\Pi(x^{\frac{n}{p}}-1).$$

Разсмотримъ выраженіе

$$(3) \qquad (r_1^{\frac{n}{p}}-1)(r_2^{\frac{n}{p}}-1)\ldots(r_{n_1}^{\frac{n}{p}}-1)=(-1)^{n_1}\Pi(1-r_i^{\frac{n}{p}}).$$

Но $r_i^{\frac{n}{p}}$ есть первообразный корень степени p изъ единицы, слѣдовательно, выраженіе (3) имѣетъ видъ

$$(-1)^{n_1}.[X_p(1)]^\nu=(-1)^{n_1}.p^\nu$$

гдѣ ν обозначаетъ число одинаковыхъ изъ чиселъ

$$r_i^{\frac{n}{p}}.$$

Обозначая $r_i=r^l$, гдѣ r одинъ опредѣленный изъ первообразныхъ корней мы получаемъ $r_k^{\frac{n}{p}}=r_l^{\frac{n}{p}}$, если $\frac{n}{p}k\equiv\frac{n}{p}l\ (mod\, n)$ или $k\equiv l\ (mod\, p)$. Итакъ, надо посмотрѣть, сколько изъ чиселъ

$$k=l+px$$

взаимно простыя съ n или, что одно и тоже, съ $\frac{n}{p}$, если x пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю $\frac{n}{p}$.

На основаніи классической [2]) теоремы теоріи чиселъ мы имѣемъ

$$\nu=\frac{\varphi\left(p\frac{n}{p}\right)}{\varphi(p)}=\frac{\varphi(n)}{\varphi(p)}.$$

---

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Вт. изд. 1913 г., стр. 177.

[2]) Ibidem, стр. 50.

Итакъ, получаемъ окончательное выраженіе для дискриминанта

$$\frac{(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} n^{\varphi(n)}}{p_1^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_1)}} p_2^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_2)}} \dots p_l^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_l)}}},$$

гдѣ p_1, p_2, $\dots p_l$ суть простыя числа, входящія въ составъ числа n.

Въ заключеніе мы намекнемъ читателю, почему обратятся въ единицу части $\Pi(x^{\frac{n}{pq}} - 1)$, $\Pi(x^{\frac{n}{pqr}} - 1)$, ...

Это произойдетъ вслѣдствіе существованія равенства $X_{pq}(1) = 1$, $X_{pqr}(1) = 1$, ...

ГЛАВА XIV.

Теорія полей.

§ 1.

Совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ обладаетъ, какъ извѣстно изъ элементарной алгебры, слѣдующими свойствами.

Всѣ раціональныя числа образуютъ абелеву группу (см. стр. 140) относительно *сложенія*, ибо существуютъ свойства

$$a+b=b+a\,,\ (a+b)+c=a+(b+c)\,.$$

Существуетъ одна единица этой группы, а именно число 0 (нуль).

Всякому элементу a группы соотвѣтствуетъ ему обратный $-a$, ибо

$$a+(-a)=0\,.$$

На основаніи сказаннаго въ главѣ V, въ группѣ всегда возможно рѣшеніе уравненія первой степени

$$a+x=b\,,$$

то есть всегда выполняется дѣйствіе вычитанія, какъ операція обратная сложенію.

§ 2

На основаніи сказаннаго мы можемъ назвать совокупность раціональныхъ чиселъ *аддитивной группой*. Единицей этой группы является число нуль. Если мы это число *отбросимъ*, то получимъ совокупность чиселъ, представляющихъ абелеву группу относительно *дѣйствія умноженія*, ибо существуютъ свойства

$$ab=ba\,,\ (ab)c=a(bc)\,.$$

Единицей этой группы является число 1; всякому элементу a соотвѣтствуетъ обратный $\frac{1}{a}$, ибо

$$a\frac{1}{a}=1\,.$$

Въ этой группѣ (безъ числа 0), которую мы назовемъ *мультипликативною*, всегда возможно рѣшеніе уравненія первой степени

$$ax=b\,,$$

то есть всегда возможно дѣйствіе дѣленія.

Нельзя дѣлить только на 0, то есть на *единицу* аддитивной группы

§ 3.

Число 0, умноженное на любое число разсматриваемой совокупности даетъ 0

$$0\,.\,a'=0$$

Дѣйствія сложенія и умноженія удовлетворяютъ *распредѣлительному* (дистрибутивному) закону

$$(a+b)c=ac+bc\,.$$

§ 4.

Совокупность чиселъ, обладающихъ свойствами указанными въ §§ 1 2, 3, мы будемъ называть *числовымъ полемъ.*

Раціональныя числа образуютъ поле.

Элементарная алгебра даетъ еще два примѣра подобныхъ полей: 1) поле чиселъ вещественныхъ (раціональныхъ и ирраціональныхъ), 2) поле чиселъ комплексныхъ.

Общее понятіе поля.

§ 5.

Современная математика требуетъ введенія въ разсмотрѣніе болѣе общаго понятія о *полѣ* (Körper) совершенно абстрактнаго характера. Поле могутъ образовать не только числа, но и предметы какой угодно природы, которые мы будемъ называть *элементами* поля.

Поле должно представлять изъ себя группу относительно двухъ операцій, которыя мы назовемъ *сложеніемъ* и *умноженіемъ*, совершенно не-

зависимо отъ ихъ природы. Мы эти операціи будемъ обозначать тѣми же знаками, что и въ элементарной алгебрѣ. Вся суть будетъ состоять въ томъ, что операціи производимыя надъ элементами поля должны удовлетворять всѣмъ вышеприведеннымъ (§ 1, 2, 3) основнымъ законамъ раціональныхъ дѣйствій элементарной алгебры.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ такому общему опредѣленію поля.

Полемъ мы будемъ называть всякую совокупность такихъ предметовъ a, b, c, ..., *названныхъ его элементами, которые можно подчинить двумъ различнымъ пріемамъ групповой композиціи, изъ которыхъ одинъ назовемъ сложеніемъ* $(a+b)$, *а другой умноженіемъ* ab, *причемъ имѣютъ мѣсто слѣдующіе постулаты:*

I. *Всѣ элементы поля образуютъ группу относительно сложенія, единицу которой обозначимъ черезъ* 0.

II. *Всѣ элементы поля за исключеніемъ* 0 *образуютъ группу относительно умноженія.*

III. *Имѣетъ мѣсто распредѣлительный законъ*

$$(a+b)c = ac + bc.$$

IV. *Для всякаго элемента* a *имѣетъ мѣсто*

$$0 . a = 0 .$$

V. *Обѣ группы аддитивная и мультипликативная суть абелевы*

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

§ 6.

Сдѣлаемъ нѣсколько весьма важныхъ замѣчаній по поводу только что даннаго опредѣленія поля.

Вслѣдствіе групповаго характера поля дѣйствіе вычитанія въ немъ всегда возможно. Что касается до дѣйствія дѣленія, то оно возможно для всѣхъ элементовъ за исключеніемъ случая дѣленія на единицу аддитивной группы. Эта единица обладаетъ въ полѣ всѣми свойствами числа 0 элементарной алгебры.

Произведеніе нѣсколькихъ множителей въ полѣ можетъ тогда и только тогда равняться аддитивной единицѣ, если одинъ изъ множителей равенъ этой единицѣ

§ 7.

Разсматривая внимательно указанные въ § 5 пять постулатовъ, мы можемъ замѣтить, что въ постулатѣ V достаточно требовать *только*,

чтобы мультипликативная группа была перестановочною, тогда можно доказать, что при существовании четырехъ первыхъ постулатовъ и аддитивная группа будетъ перестановочна.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ единицу мультипликативной группы [1] и два произвольныхъ элемента a и b. Будемъ имѣть на основании первыхъ постулатовъ

$$a+b+a+b=(a+b)+(a+b)=[1](a+b)+[1](a+b)=$$

$$=\{[1]+[1]\}(a+b)=(a+b)\{[1]+[1]\}=a\{[1]+[1]\}+b\{[1]+[1]\}=$$

$$=\{[1]+[1]\}a+\{[1]+[1]\}b=a+a+b+b,$$

итакъ,

$$a+b+a+b=a+a+b+b$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ слѣва a и справа b, получимъ

$$b+a=a+b,$$

т. е. получаемъ коммутативность аддитивной группы.

§ 8.

Разсматривая три поля, извѣстныхъ изъ элементарной алгебры, мы замѣчаемъ, что первое поле *раціональныхъ чиселъ* заключается какъ часть въ двухъ остальныхъ: полѣ *вещественныхъ чиселъ* и послѣ *комплексныхъ чиселъ.*

Если элементы поля Ω входятъ въ составъ другого поля Ω_1, то поле Ω носитъ названіе *дѣлителя* поля Ω_1. Такъ, напримѣръ, поле вещественныхъ чиселъ есть дѣлитель поля комплексныхъ чиселъ.

Не трудно показать, что поле раціональныхъ чиселъ есть дѣлитель всякаго поля. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какой нибудь элементъ ω поля Ω, тогда поле Ω должно заключать элементъ $\frac{\omega}{\omega}$, т. е. число единицу; изъ единицы же можно получить всѣ цѣлыя числа при помощи сложенія, вычитанія и умноженія, изъ цѣлыхъ же чиселъ происходятъ дробныя черезъ дѣленіе.

Болѣе строгая формулировка только что указаннаго свойства получится, если мы введемъ весьма важное понятіе о такъ называемомъ *изоморфизмѣ* полей

Такъ какъ элементами поля могутъ быть предметы какой угодно природы, не обязательно числа, то мы считаемъ за одно поле два такъ называемыхъ изоморфныхъ поля, т. е. такихъ, что всякому раціональному соотношенію

$$f(a,\ b,\ c,\ \ldots)=0$$

элементовъ $a, b, c, \ldots$ одного поля соотвѣтствуетъ тождественное соотношеніе

$$f(a', b', c', \ldots) = 0$$

соотвѣтственныхъ элементовъ $a', b', c', \ldots$ другого

Такой *изоморфизмъ* двухъ полей устанавливаетъ однозначное *соотвѣтствіе* каждому элементу a перваго поля нѣкотораго опредѣленнаго элемента a' другого.

Если поле таково, что его элементы не числа, а предметы другой природы, то мультипликативная единица [1] поля можетъ не быть числомъ 1, тогда получаемъ теорему, что всякое поле Ω имѣетъ дѣлителемъ нѣкоторое другое поле R, изоморфное съ полемъ раціональныхъ чиселъ; это поле R назовемъ *ариѳметическою частью* поля Ω.

§ 9.

Пусть задано числовое поле Ω и нѣкоторое число α, не входящее въ составъ поля Ω. Разсмотримъ теперь поле, образованное числами поля Ω, а также всевозможными новыми, получаемыми отъ комбинированія числа α съ числами поля Ω при помощи основныхъ дѣйствій.

Очевидно, что всякое число новаго поля будетъ вида

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$$

гдѣ $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ суть цѣлыя функціи отъ α съ коэффиціентами, принадлежащими полю Ω.

Будемъ обозначать новое поле такъ

$$\Omega(\alpha)$$

и говорить, что оно происходитъ отъ *присоединенія* къ полю Ω числа α.

Если къ полю $\Omega(\alpha)$ присоединимъ новое число β, то получимъ поле

$$\Omega(\alpha\,\beta)\,,$$

которое происходитъ изъ поля Ω черезъ присоединеніе двухъ чиселъ α и β.

Подобнымъ же образомъ можно присоединить любое число чиселъ.

§ 10.

Разсмотримъ цѣлую раціональную функцію

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\,.$$

съ коэффиціентами

$$a_0, a_1, \dots a_{n-1}, a_n$$

принадлежащими къ нѣкоторому полю Ω.

Будемъ называть такую функцію *принадлежащей полю* Ω, или просто *функціей поля* Ω.

Если функція $f(x)$ разлагается на два множителя

$$\varphi(x) \text{ и } \psi(x),$$

такъ что

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

причемъ цѣлыя функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежатъ тому же полю Ω, то будемъ говорить, что функція $f(x)$ *приводимая въ полѣ* Ω, т. е. нахожденіе ея корней приводится къ нахожденію корней функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ меньшихъ степеней.

Если разложеніе функціи $f(x)$ на множители, принадлежащіе тому же полю, невозможно, то говорятъ, что функція *неприводима* въ полѣ Ω.

Одна и та же функція можетъ быть неприводимою въ одномъ полѣ и приводимою въ другомъ. Такъ напримѣръ, функція

$$x^4 + 1$$

неприводима въ полѣ раціональныхъ чиселъ и приводима въ такомъ полѣ, которое получается отъ присоединенія къ раціональнымъ числамъ числа

$$\sqrt{2},$$

ибо

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Въ полѣ всѣхъ чиселъ какъ вещественныхъ такъ и комплексныхъ, всякая функція выше первой степени приводима и раскладывается на линейные множители что составляетъ основную теорему алгебры.

§ 11

Необходимо обратить вниманіе, что формула Taylor'а для цѣлыхъ функцій остается справедливою и для цѣлыхъ функцій нѣкотораго поля, ибо эта формула

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2.3\dots n}f^{(n)}(x)$$

происходитъ отъ разложенія $f(x+h)$ по степенямъ h; для цѣлыхъ же функцій такое разложеніе совершается при помощи раціональныхъ дѣйствій.

Разъ формула Taylor'а сохраняется въ полѣ, то отсюда вытекаетъ для поля всѣ тѣ же слѣдствія относительно кратныхъ корней, которыя излагаются въ алгебрѣ.

§ 12.

При общихъ изслѣдованіяхъ о поляхъ имѣетъ большое значеніе, введенное Steinitz'омъ [1]) понятіе о такъ называемой *характеристикѣ* поля.

Это понятіе можно ввести такимъ образомъ.

Возьмемъ мультипликативную единицу ε поля. Можно положить

$$\varepsilon = 1\varepsilon\,,\ \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,\ 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\,,\ \ldots$$

Числа ε, 2ε, 3ε, ... называются *натуральныя кратныя* элемента ε; здѣсь 1, 2, 3, ... не суть элементы поля, а лишь знаки. Для отрицательнаго цѣлаго числа $-n$ можно будетъ положить

$$-(n\varepsilon) = (-n)\varepsilon\,.$$

Итакъ элементъ $m\varepsilon$ опредѣленъ для всякаго цѣлаго значенія m какъ положительнаго такъ и отрицательнаго. Возможны два случая полей.

Равенство

(1) $$m\varepsilon = m'\varepsilon$$

можетъ или имѣть мѣсто исключительно при существованіи другого равенства

(2) $$m = m',$$

или же можетъ случиться, что для справедливости (1) нѣтъ надобности удовлетворять равенству (2).

Мы подчеркнемъ тотъ фактъ, что равенство (1) есть равенство символическое, имѣющее мѣсто на основаніи свойствъ конструкціи поля, равенство же (2) есть обыкновенное ариѳметическое.

Если поле таково, что всякое равенство вида (1) влечетъ за собою равенство (2), то мы будемъ говорить, что поле имѣетъ *характеристику нуль*.

Поле имѣетъ характеристику нуль, если всѣ кратныя $m\varepsilon$ мультипликативной единицы различны между собой.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію полей другого рода, когда равенство (1) имѣетъ мѣсто безъ равенства (2). Равенство (1) можно будетъ переписать такъ

$$(m - m')\varepsilon = 0\,.$$

[1]) E. Steinitz. Algebraische Theorie der Körper. Crelles Journ. B. 137. Heft I

Итакъ, въ этомъ случаѣ среди кратныхъ $m\varepsilon$ должны быть равные нулю. Пусть будетъ *первое* изъ ряда кратныхъ ε, 2ε, 3ε, ... равное нулю соотвѣтствовать цѣлому числу p

$$p\varepsilon = 0 .$$

Покажемъ, 1) что элементы

$$\varepsilon\,,\ 2\varepsilon\,,\ 3\varepsilon\,,\ \ldots\ (p-1)\varepsilon$$

различны между собой и 2) что p число простое.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы число p было не простымъ

$$p = qr\,,$$

то мы имѣли бы

$$p\varepsilon = (q\varepsilon)(r\varepsilon) = 0$$

и по § 6 выходило бы, или $q\varepsilon = 0$, или $r\varepsilon = 0$. Оба эти предположенія противорѣчать допущенію, что p есть наименьшее число, при которомъ уничтожается $p\varepsilon$.

Простое число p называется *характеристикой* поля.

Въ теоріи чиселъ [1]) мы познакомились съ замѣчательнымъ представителемъ поля характеристики p, которое мы назвали *конечнымъ*.

Поля съ характеристикой отличной отъ нуля обладаютъ особенными свойствами, а потому во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать равною нулю характеристику поля.

§ 13.

Теорема. *Неприводимая въ полѣ* Ω *функція* $f(x)$ *не имѣетъ общаго дѣлителя съ другою* $F(x)$ *того же поля, если* $F(x)$ *не дѣлится на* $f(x)$.

Эта теорема, имѣющая большое значеніе, почти очевидна. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ искать общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ

$$F(x) \text{ и } f(x)$$

послѣдовательнымъ дѣленіемъ. Очевидно, что коэффиціенты этого общаго дѣлителя происходятъ при помощи раціональныхъ операцій изъ коэффиціентовъ функцій $F(x)$ и $f(x)$, слѣдовательно, общій дѣлитель долженъ принадлежать тому же полю Ω. Но заданная функція $f(x)$ не имѣетъ въ полѣ Ω другихъ дѣлителей кромѣ самое себя и постояннаго числа. Отсюда, общій наибольшій дѣлитель долженъ быть равнымъ самой функціи $f(x)$ или быть постояннымъ.

---

[1]) Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Вт. изд. 1913. Главы VIII.

Слѣдствіе I. Неприводимая функція не можетъ имѣть кратныхъ корней [1]).

Въ самомъ дѣлѣ, если бы существовалъ кратный корень, то производная $f'(x)$, имѣя общаго дѣлителя съ неприводимой функціей $f(x)$, должна была бы дѣлиться на $f(x)$, что невозможно, ибо степень производной ниже степени самой функціи.

Слѣдствіе II. Если функція $F(x)$ обращается въ нуль при одномъ изъ корней неприводимой функціи $f(x)$, то она уничтожается и при всѣхъ остальныхъ корняхъ функціи $f(x)$.

Слѣдствіе III. Если степень цѣлой функціи $F(x)$ ниже степени неприводимой функціи $f(x)$ и если $F(x)$ обращается въ нуль при одномъ корнѣ функціи $f(x)$, то функція $F(x)$ должна тождественно обращаться въ нуль, т. е. всѣ ея коэффиціенты должны равняться нулю.

Слѣдствіе IV. Приводимая функція разлагается однимъ только способомъ на неприводимыхъ множителей. При этомъ двѣ цѣлыхъ функціи, отличающіяся постояннымъ множителемъ, не считаются различными.

§ 14.

Присоединенія новыхъ величинъ раздѣляются на двѣ категоріи: присоединенія *алгебраическія* и присоединенія *трансцендентныя.*

Присоединеніе называется трансцендентнымъ, если между различными степенями присоединяемой буквы x не устанавливается никакихъ соотношеній. Поле, получаемое отъ присоединенія къ полю Ω трансцендентной величины x, является совокупностью всѣхъ раціональныхъ функцій отъ x съ коэффиціентами изъ поля Ω.

Гораздо болѣе простой видъ имѣетъ поле, когда между различными степенями присоединяемой буквы α имѣетъ мѣсто линейное соотношеніе, т. е., другими словами, когда присоединяемая величина α есть корень алгебраическаго уравненія

(1) $$F(x) = 0,$$

гдѣ $F(x)$ неприводимая въ основномъ полѣ Ω функція.

Мы будемъ называть также и уравненіе (1) *неприводимымъ* въ полѣ Ω. Черезъ присоединеніе къ полю Ω корня α уравненія (1) получается поле $\Omega(\alpha)$, которое называется *алгебраическимъ полемъ.*

---

[1]) Это свойство можетъ оказаться несправедливымъ при поляхъ съ отличной отъ нуля характеристикой. Steinitz. Crelles Journ. B. 137, H. I, S. 219.

§ 15.

Пусть уравненіе $F(x)=0$ имѣетъ видъ

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ суть числа поля Ω.

Степень n послѣдняго уравненія носитъ названіе *степени* алгебраическаго поля $\Omega(\alpha)$.

Самый общій видъ числа Θ поля $\Omega(\alpha)$ есть

$$\Theta = \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)},$$

гдѣ φ и ψ цѣлыя функціи съ коэффиціентами изъ поля Ω.

Изъ § 24 главы IX извѣстно, что всякая раціональная функція отъ корня неприводимаго уравненія n-ой степени можетъ быть представлена при помощи раціональныхъ выкладокъ въ видѣ цѣлой функціи степени не выше $n-1$, т. е.

$$\Theta = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}, \tag{1}$$

гдѣ коэффиціенты

$$c_0, \ c_1, \ c_2, \ \ldots c_{n-1}$$

принадлежатъ также къ полю Ω

Такое представленіе (1) элемента Θ возможно однимъ способомъ, ибо, если бы существовало другое представленіе

$$\Theta = c_0' + c_1'\alpha + c_2'\alpha^2 + \ldots + c'_{n-1}\alpha^{n-1}, \tag{2}$$

то корень α неприводимаго уравненія степени n поля Ω удовлетворялъ бы уравненію

$$c - c_0' + (c_1 - c_1')\alpha + (c_2 - c_2')\alpha^2 + \ldots + (c_{n-1} - c'_{n-1})\alpha^{n-1} = 0$$

того же поля, откуда на основаніи слѣдствія III § 13 получаемъ

$$c_0' = c_0, \ c_1' = c_1, \ \ldots c_{n-1}' = c_{n-1}.$$

Итакъ, поле $\Omega(\alpha)$ есть совокупность чиселъ Θ, опредѣляемыхъ формулой (1), гдѣ коэффиціенты

$$c_0, \ c_1, \ c_2, \ \ldots c_{n-1}$$

суть всевозможные элементы поля

§ 16

Мы будемъ разсматривать алгебраическія поля болѣе общаго вида

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

получаемыя отъ присоединенія къ полю Ω корней

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

одного или нѣсколькихъ уравненій поля Ω

Докажемъ теперь весьма важное предложеніе, состоящее въ томъ, что одновременное присоединеніе нѣсколькихъ корней одного или нѣсколькихъ уравненій равносильно присоединенію *одного* корня *одного* уравненія. Такимъ путемъ мы приходимъ къ заключенію, что самый общій видъ алгебраическаго поля даетъ поле, происходящее отъ присоединенія къ основному одного только алгебраическаго числа.

§ 17.

Докажемъ предварительно лемму.

Лемма. Пусть

$$\Phi_1(x, y, z, \ldots), \Phi_2(x, y, z, \ldots), \Phi_3(x, y, z, \ldots), \ldots$$

суть цѣлыя раціональныя функціи перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$ съ произвольными коэффиціентами. Если ни у одной изъ этихъ функцій всѣ коэффиціенты не обращаются сразу въ нуль, то можно на безчисленное число способовъ дать перемѣннымъ такія раціональныя значенія, что ни одна изъ функцій не обратится въ нуль.

Предложеніе очевидно для случая, когда функціи зависятъ отъ одной независимой перемѣнной. Очевидно, что въ этомъ случаѣ функціи будутъ обращаться въ нуль только при своихъ корняхъ, число же такихъ корней конечное, а потому, если независимому перемѣнному дадимъ значеніе, отличное отъ этихъ корней, то ни одна изъ функцій

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$$

не обратится въ нуль.

Что касается большаго числа независимыхъ перемѣнныхъ, то нетрудно убѣдиться въ справедливости леммы въ случаѣ m перемѣнныхъ, если лемма доказана для $m - 1$ перемѣнныхъ.

Каждую изъ функцій можно представить въ видѣ полинома отъ одной изъ перемѣнныхъ, напр. x, съ коэффиціентами, которые будутъ цѣлыми функціями отъ $m-1$ остальныхъ перемѣнныхъ

$$y, z, \ldots$$

По предположенію справедливости леммы въ случаѣ $m-1$ перемѣнныхъ, можно будетъ буквамъ

$$y, z, \ldots$$

на безчисленное число способовъ придать такія раціональныя значенія, что не уничтожатся сразу коэффиціенты каждой изъ этихъ функцій, а тогда остальной перемѣнной можно дать такое значеніе, что всѣ функціи будутъ отличны отъ нуля.

§ 18

Разсмотримъ поле

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

Возьмемъ линейную функцію

$$\xi = x\alpha + y\beta + z\gamma + \ldots,$$

гдѣ α корень нѣкотораго уравненія

$$A(x) = 0 \tag{1}$$

изъ поля Ω, β корень уравненія

$$B(x) = 0, \tag{2}$$

γ — корень уравненія

$$C(x) = 0 \text{ и т. д.} \tag{3}$$

Обозначая черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ другую комбинацію корней соотвѣтственныхъ уравненій, положимъ

$$\xi_1 = x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1 + \ldots$$

Составимъ подобнымъ образомъ новыя выраженія $\xi_2, \xi_3, \ldots$ Число такихъ выраженій будетъ равно произведенію степеней функцій $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ... Замѣтимъ кстати, что нѣтъ надобности предполагать всѣ уравненія (1), (2), (3), ... различными.

Разности

$$\xi - \xi_1, \ \xi - \xi_2, \ \xi - \xi_3, \ldots$$

суть линейныя функціи отъ x, y, z, ..., причемъ ни одна изъ нихъ не равна тождественно нулю, ибо мы, очевидно, предполагаемъ уравненія (1), (2), (3), ... неприводимыми и, слѣдовательно, не имѣющими кратныхъ корней.

По леммѣ § 15 можно дать $x, y, z, \ldots$ такія раціональныя численныя значенія, что всевозможныя разности, составленныя изъ функцій ξ, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ будутъ отличны отъ нуля, а, слѣдовательно, и всѣ значенія $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ будутъ различны между собой.

Обратимъ теперь вниманіе, что всякая функція, симметричная относительно корней каждаго изъ уравненій (1), (2), (3), ..., по извѣстной теоремѣ алгебры будетъ выражаться раціонально черезъ коэффиціенты этихъ уравненій. Слѣдовательно, такая величина есть число поля Ω.

Къ подобнымъ функціямъ принадлежатъ, очевидно, коэффиціенты полинома

$$F(t)=(t-\xi)(t-\xi_1)(t-\xi_2)\ldots$$

Уравненіе $F(t)=0$ есть, слѣдовательно, уравненіе поля Ω, не имѣющее кратныхъ корней. Одинъ изъ корней этого уравненія есть ξ.

Пусть Θ будетъ какой нибудь элементъ поля

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

и, слѣдовательно, цѣлая функція отъ корней

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

Обозначимъ черезъ

$$\Theta_1, \Theta_2, \ldots$$

величины, которыя происходятъ изъ величины Θ черезъ замѣну корней

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

новыми комбинаціями корней

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Разсмотримъ функцію

$$f(t)\left[\frac{\Theta}{t-\xi}+\frac{\Theta_1}{t-\xi_1}+\frac{\Theta_2}{t-\xi_2}+\ldots\right].$$

Очевидно, что эта функція есть цѣлая относительно t. Коэффиціенты ея суть симметрическія функціи корней уравненій (1), (2), (3), ... а потому эта цѣлая функція, которую мы обозначимъ черезъ $\psi(t)$, принадлежитъ къ полю Ω.

Отсюда мы получаемъ

$$\frac{\psi(t)}{F(t)} = \frac{\Theta}{t-\xi} + \frac{\Theta_1}{t-\xi_1} + \frac{\Theta_2}{t-\xi_2} + \cdots$$

По теоремѣ Lagrange'а мы знаемъ, что

$$\Theta = \frac{\psi(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Итакъ, Θ выражается раціональною функціею отъ ξ съ коэффиціентами, принадлежащими къ полю Ω. Слѣдовательно, всякая величина поля $\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ принадлежитъ полю $\Omega(\xi)$. Съ другой стороны очевидно, что всякая величина поля $\Omega(\xi)$ есть въ тоже время элементъ поля $\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, ибо ξ выражается раціонально черезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Итакъ, мы заключаемъ о полной тождественности двухъ полей, что можно выразить равенствомъ

$$\Omega(\xi) = \Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

§ 19.

Kronecker'у мы обязаны геніальными соображеніями, относящимися къ трансцендентнымъ присоединеніямъ и находящимися въ извѣстной аналогіи съ теоремой, доказаной въ предыдущемъ параграфѣ. Въ знаменитомъ мемуарѣ „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" Kronecker вводитъ въ разсмотрѣніе раціональныя функціи отъ любого числа перемѣнныхъ независимыхъ съ коэффиціентами, принадлежащими къ данному полю. У Kronecker'а получается теорія, которая также не зависитъ отъ числа присоединенныхъ перемѣнныхъ. Коренное различіе состоитъ въ томъ, что Kronecker пользуется трансцендентнымъ присоединеніемъ для изученія свойствъ основного поля, которое онъ предполагаетъ алгебраическимъ. Weber во второмъ томѣ своей алгебры даетъ хорошее изложеніе теоріи Kronecker'а, причемъ называетъ эту теорію „*теоріей функціоналовъ*".

§ 20.

Поставимъ вопросъ, когда два алгебраическихъ поля изоморфны. Мы будемъ предполагать у обоихъ полей основнымъ полемъ *раціональное поле* Ω.

Пусть одно поле будетъ $\Omega(\alpha)$; если это поле изоморфно другому Ω_1, то элементу α перваго поля долженъ соотвѣтствовать элементъ α_1 другого

Разсмотримъ неприводимое уравненіе

$$(1) \qquad a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0\,;$$

очевидно, что на основаніи принципа изоморфности этому уравненію въ другомъ полѣ должно соотвѣтствовать такое

$$a_0\alpha_1^n + a_1\alpha_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha_1 + a_n = 0\,,$$

ибо раціональнымъ числамъ одного поля должны соотвѣтствовать тѣ же самыя числа въ другомъ.

Итакъ, мы получаемъ

$$\Omega_1 = \Omega(\alpha_1)\,,$$

т. е. алгебраическому полю $\Omega(\alpha)$ соотвѣтствуетъ какъ изоморфное поле $\Omega(\alpha_1)$, гдѣ α_1 другой корень того же самаго уравненія (1).

§ 21.

Присоединяя послѣдовательно корни

$$\alpha\,,\ \alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \ldots$$

одного и того же неприводимаго уравненія, получимъ рядъ полей

$$\Omega(\alpha)\,,\ \Omega(\alpha_1)\,,\ \Omega(\alpha_2)\,,\ \ldots$$

изоморфныхъ между собой, которыя называются *сопряженными* съ полемъ

$$\Omega(\alpha)\,.$$

Если всѣ сопряженныя поля тождественны между собой, то поле $\Omega(\alpha)$ носитъ названіе *нормальнаго* поля.

§ 22.

Итакъ, мы видѣли рядъ примѣровъ на безконечныя поля. Основными являются три главныхъ поля элементарной алгебры. Затѣмъ имѣютъ важное значеніе поля, получаемыя отъ присоединенія новыхъ элементовъ. Исчерпываются ли этими примѣрами всѣ мыслимыя поля? Отвѣтъ на этотъ вопросъ оказывается отрицательнымъ. Въ послѣднее время данъ примѣръ новаго вида поля. Такое поле образуютъ символы новой природы, введенные въ науку K. Hensel'емъ подъ названіемъ *p-адическихъ чиселъ*. Я считаю необходимымъ сказать нѣсколько словъ объ этихъ числахъ.

§ 23.

Возьмемъ нѣкоторое простое число p и будемъ разсматривать системныя (десятичныя) дроби при системѣ счисленія, имѣющей основаніемъ число p Такъ, напримѣръ, системная дробь

(1) $$b_4 b_3 b_2 b_1 b_0,\ a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots.$$

гдѣ цифры b_4, b_3, b_2, b_1, b_0, a_1, . суть цѣлыя числа меньшія p или нули, обозначаетъ какъ извѣстно сумму

$$b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \ldots$$

Hensel предлагаетъ употреблять подъ названіемъ p-адическихъ чиселъ, тѣ же самые символы (1), но только производить надъ этими числами дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія по другимъ правиламъ.

Измѣненіе правилъ простѣйшихъ дѣйствій, указанное Hensel'емъ, состоитъ въ томъ, что разряды, которымъ соотвѣтствуютъ цифры въ обычной ариѳметикѣ возрастаютъ справа налѣво, Hensel же предполагаетъ разряды возрастающими слѣва направо, т. е. какъ будто бы символъ (1) обозначалъ сумму

(2) $$\frac{b_4}{p^4} + \frac{b_3}{p^3} + \frac{b_2}{p^2} + \frac{b_1}{p} + b_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \ldots$$

Такимъ образомъ въ правилѣ сложенія, если при сложеніи соотвѣтствующихъ цифръ накопляется единица высшаго разряда, то ее надо прибавлять къ ближайшей цифрѣ *направо*, а не къ лѣвой цифрѣ какъ въ ариѳметикѣ. Подобнымъ же образомъ при вычитаніи, если необходимо занять единицу высшаго разряда, то ее надо занимать изъ ближайшей направо стоящей цифры.

Могутъ возразить, что при безконечномъ числѣ цифръ p-адическаго числа сумма (2) представляетъ рядъ расходящійся и потому не допустима къ употребленію. Но дѣло въ томъ, что мы можемъ вовсе не отождествлять p-адическаго числа съ суммой (2), а лишь пользоваться видомъ этой суммы для установленія дѣйствій надъ p-адическими числами.

Вообще говоря p-адическія числа суть символы, съ которыми *не совмѣщается никакого понятія о величинѣ*, и для которыхъ понятія больше и меньше отпадаютъ

ГЛАВА XV.

Теорія Lagrange'a.

§ 1.

Съ этой главы мы начнемъ заниматься одною изъ самыхъ важныхъ задачъ алгебры, рѣшеніемъ уравненій въ радикалахъ.

Умѣніе рѣшать уравненія первой степени относится къ временамъ самой глубокой древности; такъ напримѣръ, мы ихъ находимъ въ старой египетской книгѣ Ahmes (1700 г. до Р. Х.). Уравненія второй степени рѣшались уже греческими математиками. Рѣшеніе этихъ уравненій въ геометрической формѣ можно видѣть въ Эвклидовыхъ элементахъ (300 л. до Р. Х.).

Въ алгебраической формѣ уравненія второй степени встрѣчаются въ старѣйшемъ памятникѣ греческой алгебры—Діофантовой „Ариѳметикѣ" (300 л. по Р. Х.). Уравненія третьей и четвертой степени были рѣшены итальянскими математиками XVI столѣтія: Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano и Ferrari.

Всѣ попытки рѣшить общее уравненіе пятой степени остались тщетными. Знаменитый математикъ Langrange въ своемъ безсмертномъ мемуарѣ: „Réflexions sur la résolution algébrique des équations". (1770) излагаетъ результаты своихъ попытокъ въ этомъ направленіи. Онъ поставилъ себѣ цѣлью изучить и внимательно разсмотрѣть всѣ существовавшіе до него способы рѣшенія уравненій 3-ей и 4-ой степени, для того чтобы сдѣлать догадки относительно рѣшенія уравненій высшихъ степеній.

Несмотря на массу новыхъ и важныхъ идей, результатъ работъ Lagrange'a явился неутѣшительнымъ.

Lagrange обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что во всѣхъ разобранныхъ имъ пріемахъ рѣшенія уравненій 3-ей и 4-ой степени дѣло сводилось къ рѣшенію уравненій низшихъ степеній. Lagrange далъ пріемъ

приведенія рѣшенія заданнаго уравненія къ рѣшенію нѣкотораго новаго, вспомогательнаго уравненія, которое онъ назвалъ „équation résolvente“.

Это вспомогательное уравненіе оказывается 2-ой степени для уравненій 3-ей степени и 3-ей степени для уравненій 4-ой; *для уравненій 5-ой степени оно оказалось 6-ой степени.* Поэтому способъ, дававшій результатъ для уравненій 3-ей и 4-ой степеней, переставалъ быть полезнымъ для уравненій 5-ой степени.

Такъ какъ это обстоятельство, повышенія степени вспомогательнаго уравненія, продолжаетъ сохраняться для уравненій всякой степени выше 5-ой, то въ одномъ мѣстѣ мемуара Lagrange пишетъ знаменательную фразу, въ которой онъ говоритъ, что обобщеніе соображеній, касающихся рѣшенія уравненій первыхъ 4-хъ степеней на уравненія высшихъ степеней ему кажется „почти невозможнымъ“.

Руководствуясь идеями Lagrange'a, Ruffini[1]) и Abel[2]) доказали, что *общее уравненіе выше четвертой степени не рѣшается алгебраически, т. е. корни его не могутъ быть выведены изъ коэффиціентовъ при помощи слѣдующихъ алгебраическихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и извлеченія радикаловъ.*

Различіе между уравненіями буквенными и численными.

§ 2.

Обратимъ вниманіе на главнѣйшія идеи, введенныя въ науку Lagrange'омъ. Прежде всего является существеннымъ, что Lagrange подчеркнулъ разницу между, такъ называемыми, *буквенными* уравненіями и *численными*[3]).

Уравненіе

$$(1) \qquad x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

называется *буквеннымъ*, если всѣ его коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$ представляютъ изъ себя буквы, которымъ не придано никакихъ особенныхъ численныхъ значеній; другими словами, если эти коэффиціенты суть независимыя перемѣнныя. Корни $x_1, x_2, \ldots x_n$ буквеннаго уравненія можно

---

[1]) *Ruffini.* Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Bologna. (1799).

[2]) Abel. Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen. Creles Journ B. I. (1826).

[3]) Д. Граве. Объ основныхъ положеніяхъ теоріи Galois. Матем. Сборн. 1914.

также разсматривать, какъ независимыя перемѣнныя величины, ибо на основаніи существованія равенствъ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum x_1 = -p_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum x_1x_2 = p_2$$

(2) $$x_1x_2x_3 + \ldots = \sum x_1x_2x_3 = -p_3$$

. . . .

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n p_n$$

всякой системѣ численныхъ значеній [1]) корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая опредѣленная система численныхъ значеній коэффиціентовъ $p_1, p_2, \ldots p_n$. Изъ соображеній главы II мы знаемъ, что и обратно всякой системѣ численныхъ значеній коэффиціентовъ p_1, $p_2, \ldots p_n$ соотвѣтствуетъ опредѣленная система численныхъ значеній корней.

§ 3.

Если корни уравненія суть независимыя перемѣнныя, то между этими корнями могутъ существовать только такія соотношенія.

(1) $$\Omega(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

въ которыхъ функція Ω тождественно равняется нулю, т. е. при всякихъ значеніяхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, ибо иначе уравненіе (1) опредѣляло бы одинъ изъ корней какъ функцію отъ другихъ. Тождества вида (1) мы будемъ называть *буквенными* въ отличіе отъ тождествъ *численныхъ*. Такъ напримѣръ, тождество $(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 0$ есть буквенное, а тождество $1 + 2 - 3$ есть численное.

Буквенныя тождества между корнями не нарушаютъ свойства корней оставаться независимыми перемѣнными.

Если мы напишемъ между корнями соотношеніе

(2) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,$$

то, чтобы удовлетворить этому соотношенію нельзя считать всѣ корни независимыми перемѣнными, ибо равенство (2) налагаетъ на численныя значенія корней нѣкоторое ограниченіе.

---

[1]) Численныя значенія во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать самаго общаго вида т. е. и комплексныя: $a + bi$.

Итакъ, *буквенныя* уравненія можно опредѣлять какъ такія, которыя не допускаютъ соотношеній вида (1) буквенно не тождественныхъ. Если же между корнями существуютъ не тождественныя буквенно соотношенія, то уравненіе мы будемъ называть *численнымъ*. Крайнимъ случаемъ численной опредѣленности численныхъ уравненій являются уравненія, въ которыхъ между корнями существуетъ равное степени уравненія число не тождественныхъ буквенно соотношеній. Тогда всѣ корни численно опредѣлены, а, значитъ, и коэффиціенты уравненія имѣютъ опредѣленныя числовыя значенія.

§ 4.

Для приданія нашей теоріи большей опредѣленности возьмемъ въ основу нашихъ разсужденій нѣкоторое поле Ω и будемъ разсматривать *лишь такія соотношенія между корнями*

(1) $$\Pi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum a x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} = 0,$$

гдѣ Π *есть цѣлая функція отъ корней, коэффиціенты которой* a *принадлежатъ полю* Ω.

На основаніи соображеній главы VIII соотношенія (1) будутъ буквенно тождественны лишь въ случаѣ равенства нулю всѣхъ коэффиціентовъ a.

Раціональныя функціи отъ корней.

§ 5.

Мы займемся въ настоящей главѣ, слѣдуя Lagrange'у, исключительно буквенными уравненіями.

Присоединимъ къ основному полю Ω коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots p_n$ буквеннаго заданнаго уравненія, получимъ поле, которое обозначимъ черезъ $\Omega(p)$ и которое получается, очевидно, отъ трансцендентнаго расширенія поля Ω, ибо коэффиціенты p_i независимыя перемѣнныя.

Разсмотримъ въ полѣ $\Omega(p)$ нѣкоторую *раціональную* функцію

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

отъ корней, коэффиціенты числителя и знаменателя которой, слѣдовательно, суть или элементы поля Ω или раціональныя функціи отъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ съ коэффиціентами изъ поля Ω.

§ 6.

Будемъ въ заданной раціональной функціи $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ производить *подстановки* (см. глава V) корней $x_1 x_2 \ldots x_n$ и обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда функція *не мѣняется* отъ такой подстановки.

Выраженіе, что функція не мѣняется надо понимать здѣсь въ такомъ смыслѣ; значеніе функціи послѣ подстановки должно быть буквенно тождественнымъ съ первоначальнымъ значеніемъ. Напримѣръ, функція $x_1x_2 + x_3x_4$ не мѣняется отъ круговой подстановки корней $(x_1x_3x_2x_4)$.

Мы приходимъ къ очевидной теоремѣ.

Подстановки, не мѣняющія раціональной функціи, образуютъ группу.

Въ самомъ дѣлѣ, если каждая изъ двухъ подстановокъ приводитъ функцію къ ея первоначальному виду, то и обѣ подстановки, произведенныя одна за другой, приведутъ функцію къ ея первоначальному виду.

Такъ напримѣръ, подстановки, не мѣняющія функцію $x_1x_2 + x_3x_4$ образуютъ группу восьмого порядка

(I) $$1,\ (x_1x_2),\ (x_3x_4),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3);$$
$$(x_1x_3x_2x_4),\ (x_1x_4x_2x_3).$$

Не трудно убѣдиться, что всякая подстановка, не входящая въ эту группу, мѣняетъ функцію, такъ напримѣръ, подстановка $(x_1x_2x_3)$ обращаетъ функцію $x_1x_2 + x_3x_4$ въ $x_1x_4 + x_2x_3$

§ 7.

Если функція φ *не мѣняется* отъ подстановокъ группы G, *а мѣняется* отъ всякой подстановки, *не* входящей въ группу G, то мы будемъ говорить, что функція *принадлежитъ группѣ* G.

При подстановкахъ, не принадлежащихъ группѣ G, функція φ можетъ принимать другой видъ. Пусть разныя значенія, принимаемыя функціей при всевозможныхъ подстановкахъ, будутъ

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots \varphi_{k-1}.$$

Эти значенія мы будемъ называть *сопряженными значеніями функціи* φ.

Если группа G, къ которой принадлежитъ функція, будетъ состоять изъ всѣхъ $n!$ подстановокъ, то функція носитъ названіе *симметрической*. Въ главѣ V мы назвали *симметрическою* также группу всѣхъ подстановокъ. Система сопряженныхъ значеній симметрической функціи состоитъ только изъ одной функціи.

Другой крайній случай представляетъ функція, принадлежащая къ *единичной* группѣ, т. е. къ группѣ, состоящей изъ единственной тождественной подстановки. Такая функція мѣняется при всѣхъ подстановкахъ и мы ее во всемъ дальнѣйшемъ будемъ называть *функціей Galois*.

Функція Galois имѣетъ очевидно $n!$ сопряженныхъ значеній.

Примѣромъ функціи Galois можетъ служить линейное выраженіе

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

въ которомъ коэффиціенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ различныя между собой числа.

§ 8.

На всякомъ частномъ примѣрѣ нетрудно составить сопряженныя значенія функціи. Такъ, напримѣръ, функція $x_1x_2 + x_3x_4$ даетъ мѣсто тремъ значеніямъ

$$x_1x_2 + x_3x_4, \quad x_1x_3 + x_2x_4, \quad x_1x_4 + x_2x_3$$

§ 9

Мы теперь прослѣдимъ внимательно связь свойствъ раціональныхъ функцій по отношенію къ подстановкамъ независимыхъ перемѣнныхъ съ теоріей группъ подстановокъ. Такимъ образомъ мы придемъ къ новому выводу предложеній, съ которыми мы познакомились еще въ главѣ V.

Итакъ, возьмемъ функцію φ, принадлежащую къ группѣ

(1) $$G \quad \{S_1 = 1, S_2, S_3, \ldots S_m\}$$

порядка m. Пусть эта функція при помощи нѣкоторой подстановки T_1, не входящей въ группу G, переходитъ въ другое значеніе φ_1. Посмотримъ, не существуетъ ли другихъ подстановокъ, кромѣ подстановки T_1, переводящихъ функцію φ въ функцію φ_1.

Нетрудно убѣдиться, что таковыми будутъ всѣ слѣдующія подстановки

(2) $$S_1T_1 = T_1, \; S_2T_1, \; S_3T_1, \ldots S_mT_1.$$

Эти подстановки, очевидно, различны между собой, ибо равенство $S_kT_1 = S_lT$ влекло бы за собой $S_k = S_l$, что невозможно, ибо мы предполагаемъ, что подстановки (1) всѣ различны.

Нетрудно убѣдиться, что кромѣ подстановокъ (2) не существуетъ подстановокъ, переводящихъ φ въ φ_1

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ Σ какая нибудь подстановка, переводящая φ въ φ_1; тогда, очевидно, произведеніе подстановокъ ΣT_1^{-1} оставляетъ безъ перемѣны функцію φ, ибо Σ переводитъ φ въ φ_1, а T_1^{-1} переводитъ обратно φ_1 въ φ. Такъ какъ, съ другой стороны, не существуетъ по предположенію другихъ подстановокъ, не мѣняющихъ функціи φ, кромѣ подстановокъ группы G, то будемъ имѣть

$$\Sigma T_1^{-1} = S_i, \text{ или } \Sigma = S_i T_1,$$

т. е. подстановка Σ входитъ въ составъ системы (2).

Будемъ систему (2) обозначать символомъ

$$GT_1$$

и называть *системой сопряженною съ группой G и относящейся къ значенію φ_1*.

Если системами подстановокъ $G(1)$ и $GT_1(2)$ не исчерпываются всѣ $N = n!$ подстановокъ, то должно существовать по крайней мѣрѣ еще одно значеніе функціи φ_2, которое функція принимаетъ при подстановкахъ сопряженной системы GT_2

$$(3) \qquad S_1T_2 = T_2, \; S_2T_2, \; S_3T_2, \; \ldots \; S_mT_2,$$

очевидно, что подстановки (3) всѣ различны между собой и различны отъ подстановокъ (1) и (2).

Продолжая наше разсужденіе далѣе, мы замѣчаемъ, что, если черезъ k обозначить число различныхъ значеній

$$\varphi, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \; \ldots \; \varphi_{k-1},$$

принимаемыхъ функціей φ, то всѣ N подстановокъ симметрической группы должны разбиться на k сопряженныхъ системъ

$$(4) \qquad G, \; GT_1, \; GT_2, \; \ldots \; GT_{k-1}.$$

Изъ этихъ системъ образуетъ группу только первая G; остальныя системы, очевидно, не группы, ибо въ нихъ нѣтъ единичной подстановки, которая входитъ только въ группу G.

Присоединяясь къ терминологіи § 31 главы V, получаемъ теорему.

Число сопряженныхъ значеній функціи φ, принадлежащей группѣ G равно индексу этой группы G по отношенію ко всей симметрической группѣ. . . . .

§ 10.

Соображенія предыдущаго параграфа важны въ томъ отношеніи, что они привели къ болѣе общей теоремѣ § 28 главы V и распространяются на теорію какихъ угодно группъ.

Возьмемъ произвольную группу H какихъ угодно предметовъ (не обязательно подстановокъ). Если нѣкоторые изъ этихъ элементовъ образуютъ новую группу G, то, какъ намъ уже извѣстно, эта группа G называется *дѣлителемъ* группы H, или *подгруппой* H.

Приходимъ къ теоремѣ.

Порядокъ k подгруппы G конечной группы H есть дѣлитель (въ ариеметическомъ смыслѣ слова) порядка K группы H.

Доказательство можетъ быть проведено совершенно аналогично съ тѣмъ, что мы видѣли въ § 28 главы V.

Мы можемъ группу H разложить на сопряженныя системы

$$(1)\qquad \begin{array}{l} 1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots A_k \\ B_1,\ A_2B_1,\ A_3B_1,\ \ldots A_kB_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{q-1},\ A_2B_{q-1},\ A_3B_{q-1},\ \ldots A_kB_{q-1}, \end{array}$$

изъ которыхъ первая есть подгруппа G. Разложеніе (1) мы будемъ называть *разложеніемъ группы H на сопряженныя системы по подгруппѣ G* и обозначать символически

$$H = G + GB_1 + GB_2 + \ldots + GB_{q-1}$$

получаемъ, очевидно,

$$K = kq,$$

откуда и слѣдуетъ справедливость вышеприведенной теоремы.

§ 11.

Подобнымъ же образомъ можно было бы найти элементы $1, C_1, C_2, \ldots C_{q-1}$, умноженіемъ на которыя слѣва получимъ разложеніе группы H на сопряженныя системы

$$\begin{array}{l} 1,\ A_1,\ A_2,\ \ldots A_k \\ C_1,\ C_1A_1,\ C_1A_2,\ \ldots C_1A_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{q-1},\ C_{q-1}A_1,\ C_{q-1}A_2,\ \ldots C_{q-1}A_k, \end{array}$$

что можно указать символическою формулой

$$H = G + C_1G + C_2G + \ldots + C_{q-1}G.$$

Если найдены элементы $1, B_1, B_2, \ldots B_{q-1}$, дающіе разложеніе

$$H = G + GB_1 + GB_2 + \ldots + GB_{q-1},$$

то, очевидно, что за элементы $1, C_1, C_2, \ldots C_{q-1}$ можно будетъ принять элементы $1, B_1^{-1}, B_2^{-1}, \ldots B_{q-1}^{-1}$ и получить

$$H = G + B_1^{-1}G + B_2^{-1}G + \ldots + B_{q-1}^{-1}G.$$

Справедливость послѣдняго соображенія слѣдуетъ изъ того, что замѣна элементовъ группы ихъ обратными даетъ ту же группу.

§ 12.

Возвращаемся теперь къ сопряженнымъ значеніямъ $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{k-1}$ функціи φ, принадлежащей къ группѣ подстановокъ G.

Очевидно, что, если мы во всѣхъ функціяхъ ряда

(1) $$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{k-1}$$

произведемъ нѣкоторую подстановку S корней, то въ этихъ функціяхъ ряда (1) произойдетъ нѣкоторая перестановка этихъ функцій; потому что функціями ряда (1) исчерпываются, съ одной стороны, всѣ возможныя значенія функціи φ, принимаемыя ею при различныхъ подстановкахъ корней, съ другой стороны, двѣ различныя изъ числа функцій φ, не могутъ обратиться въ одну и ту же функцію, ибо тогда обратная подстановка изъ одной функціи дѣлала бы двѣ различныя, что невозможно. Итакъ, всякая подстановка S, перемѣщающая n корней $x_1, x_2, \ldots x_n$, сопровождается въ тоже самое время нѣкоторой подстановкой сопряженныхъ значеній (1) функціи φ.

§ 13.

То обстоятельство, что подстановка корней производитъ подстановку сопряженныхъ значеній функціи наводитъ насъ на мысль о существованіи такой теоремы, относящейся къ теоріи какихъ угодно конечныхъ формъ.

Умноженіемъ справа на произвольный элементъ B группы H сопряженныхъ системъ

(1) $$G, GB_1, GB_2, \ldots GB_{q-1}$$

осуществляется нѣкоторая подстановка этихъ системъ, т. е. системы

$$GB, GB_1B, GB_2B, \ldots GB_{q-1}B$$

представляютъ изъ себя тѣ же системы, что и (1), только, быть можетъ, въ другомъ порядкѣ.

Совершенно подобнымъ образомъ умноженіемъ слѣва на произвольный элементъ C группы H ряда сопряженныхъ системъ

$$G\,,\ C_1G\,,\ C_2G\,,\ \ldots\ C_{q-1}G$$

достигается нѣкоторая подстановка въ этихъ системахъ.

§ 14.

Покажемъ, что сопряженныя значенія φ, φ_1, ... φ_{k-1} суть корни уравненія степени k съ коэффиціентами изъ поля $\Omega(p)$.

Въ самомъ дѣлѣ, составимъ уравненіе

(1) $$(y-\varphi)(y-\varphi_1)\ldots(y-\varphi_{k-1})=0\,,$$

которое можно будетъ переписать въ такомъ видѣ

(2) $$y^k+P_1y^{k-1}+P_2y^{k-2}+\ldots+P_k=0\,.$$

Коэффиціенты P_1, P_2, ... P_k, будучи симметрическими функціями отъ φ, φ_1, ... φ_{k-1}, будутъ въ тоже время симметрическими функціями отъ x_1, x_2, ... x_n, ибо всякая подстановка корней x_1, x_2, ... x_n сопровождается подстановкой величинъ φ, φ_1 ... φ_k, слѣдовательно, коэффиціенты P_1, P_2, ... P_k не мѣняются; итакъ, на основаніи теоремы § 8 главы IX, коэффиціенты P_i уравненія (2) выражаются раціонально черезъ коэффиціенты p_i первоначальнаго уравненія и коэффиціенты функціи φ. Другими словами, коэффиціенты P_i принадлежатъ полю $\Omega(p)$.

§ 15.

Покажемъ на примѣрѣ функціи $\varphi=x_1x_2+x_3x_4$, какъ составить уравненіе (2) § 14.

Пусть задано основное уравненіе 4-ой степени

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0\,,$$

корни котораго будутъ x_1, x_2, x_3, x_4. Коэффиціенты нашего уравненія p_1, p_2, p_3, p_4 будемъ считать величинами извѣстными, ибо эти величины будутъ элементами поля $\Omega(p)$.

Мы имѣемъ

$$p_1=-x_1-x_2-x_3-x_4$$

$$p_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$$

$$p_3=-x_1x_2x_3-x_1x_2x_4-x_1x_3x_4-x_2x_3x_4$$

$$p_4=x_1x_2x_3x_4\,.$$

Въ данномъ случаѣ $k = 3$, ибо

(1) $$\varphi = x_1x_2 + x_3x_4,\ \varphi_1 = x_1x_3 + x_2x_4,\ \varphi_2 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Требуемое уравненіе (2) § 14 будетъ имѣть видъ

$$y^3 + P_1y^2 + P_2y + P_3 = 0,$$

гдѣ

$$P_1 = -\varphi - \varphi_1 - \varphi_2,\ P_2 = \varphi\varphi_1 + \varphi\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2,\ P_3 = -\varphi\varphi_1\varphi_2.$$

Покажемъ теперь, что, какъ и слѣдуетъ изъ общей теоріи, можно будетъ выразить коэффиціенты P_1, P_2, P_3 черезъ величины извѣстныя p_1, p_2, p_3, p_4.

Въ самомъ дѣлѣ, послѣ простыхъ выкладокъ

$$P_1 = -\varphi - \varphi_1 - \varphi_2 = -x_1x_2 - x_3x_4 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_1x_4 - x_2x_3 = -p_2$$

$$P_2 = \varphi\varphi_1 + \varphi\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4) +$$

$$+ (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) + (x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) = p_1p_3 - 4p_4$$

$$P_3 = -\varphi\varphi_1\varphi_2 = -p_4p_1^2 - 4p_4p_2 + p_3^2.$$

Итакъ, мы получаемъ окончательно уравненіе

(2) $$y^3 - p_2y^2 + (p_1p_3 - 4p_4)y + 4p_2p_4 - p_1^2p_4 - p_3^2 = 0,$$

которому удовлетворяетъ функція $y = x_1x_2 + x_3x_4$.

§ 16.

Теорема. *Если функція ψ не мѣняется отъ всѣхъ подстановокъ группы G, которой принадлежитъ функція φ, то функція ψ выражается раціонально черезъ функцію φ.*

Пусть сопряженныя значенія функціи φ будутъ

(1) $$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{k-1}$$

и положимъ, что этимъ значеніямъ соотвѣтствуютъ подстановки сопряженныхъ системъ

(2) $$G,\ GT_1,\ GT_2,\ \ldots\ GT_{q-1}.$$

Всѣ подстановки системы GT_i обращаютъ, очевидно, функцію ψ въ одну и туже ψ_i, ибо подстановка изъ группы G не мѣняетъ по предположенію функціи ψ и остается подстановка T_i, которая даетъ значеніе ψ_i.

Примѣняя къ функціи ψ подстановки ряда системъ (2), получимъ рядъ функцій

(3) $$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots\ \psi_{k-1}$$

Всѣ функціи ряда (3) будутъ различны между собой, если функція ψ принадлежитъ къ той же группѣ G, что и φ. Если функціи ряда (3) не всѣ различны, то функція ψ будетъ принадлежать къ болѣе обширной группѣ, въ которую группа G входитъ какъ подгруппа.

Для доказательства нашей теоремы совершенно безразлично, одинаковы или различны значенія (3)

Для насъ существенно важно только, что различны функціи φ_i (1), ибо функція φ принадлежитъ какъ разъ группѣ G.

Умноженіемъ системъ (2) справа на подстановку Σ достигается нѣкоторая подстановка этихъ системъ, то, слѣдовательно, примѣненіе подстановки Σ къ корнямъ $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$, отъ которыхъ зависятъ раціональныя функціи (1) и (3), производитъ одну и туже подстановку, какъ въ рядѣ функціи (1), такъ и въ рядѣ функцій (3).

Разсмотримъ теперь такую сумму дробей

(4) $$\frac{\psi}{t-\varphi}+\frac{\psi_1}{t-\varphi_1}+\ldots+\frac{\psi_{k-1}}{t-\varphi_{k-1}},$$

гдѣ t новая независимая перемѣнная. Эта сумма дробей есть нѣкоторая функція отъ независимой перемѣнной t и отъ корней $x_1,\ x_2,\ \ldots x_n$, которые входятъ въ функціи φ_i и ψ_i. Очевидно, что это есть функція симметрическая отъ корней $x_1 x_2 \ldots x_n$ ибо при любой подстановкѣ Σ корней функціи φ и ψ одинаково перемѣщаются, такъ что въ суммѣ (4) перемѣщаются слагаемыя дроби, а сумма ихъ не мѣняется.

Если мы сумму (4) представимъ въ видѣ одной дроби, то эта дробь будетъ имѣть видъ

$$\frac{F(t)}{\Omega_0(t)}$$

гдѣ $\Omega_0(t)=(t-\varphi)(t-\varphi_1)\ldots(t-\varphi_{k-1})$, а числитель $F(t)$ будетъ цѣлой функціей степени $k-1$ отъ t. На основаніи теоремы, относящейся къ симметрическимъ функціямъ, заключающимъ произвольный параметръ мы заключаемъ, что всѣ коэффиціенты цѣлыхъ функцій $F(t)$ и $\Omega_0(t)$ суть элементы поля $\Omega(p)$, ибо они суть симметрическія функціи корней. Итакъ, мы имѣемъ тождество

$$\frac{F(t)}{\Omega_0(t)}=\frac{\psi}{t-\varphi}+\frac{\psi_1}{t-\varphi_1}+\ldots$$

На основаніи теоремы Lagrange'а получаемъ

(5) $$\psi = \frac{F(\varphi)}{\Omega_0'(\varphi)}$$

и теорема доказана.

Оказывается, что ψ выражается въ полѣ $\Omega(p)$ раціонально черезъ φ. Для возможности примѣненія формулы (5) необходимо, чтобы функція $\Omega_0(t)$ не имѣла кратныхъ корней, ибо если φ будетъ кратнымъ корнемъ функціи $\Omega_0(t)$, то $\Omega_0'(\varphi) = 0$ и формула (5) перестаетъ имѣть мѣсто. Поэтому было необходимо предположеніе, что φ принадлежитъ группѣ G

Какъ очевидное слѣдствіе вытекаетъ такая теорема.

Если двѣ функціи принадлежатъ къ одной и той же группѣ, то каждая функція выражается раціонально черезъ другую.

§ 17.

Поясним приведенную теорію примѣромъ.

Двѣ функціи

$$\varphi = x_1x_2 + x_3x_4\,,\ \psi = x_1^3x_2^3 + x_3^3x_4^3$$

принадлежатъ, очевидно, къ одной и той же группѣ; значитъ, онѣ должны выражаться одна черезъ другую. Выразить ψ черезъ φ проще; въ самомъ дѣлѣ, возвышая функцію φ въ кубъ получимъ

$$\varphi^3 = \psi + 3(x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1x_2x_3^2x_4^2) = \psi + 3p_4\varphi\,,$$

откуда окончательно

(1) $$\psi = \varphi^3 - 3p_4\varphi$$

Чтобы выразить обратно φ черезъ ψ, поступимъ такъ: на основаніи уравненія (2) § 15 можно будетъ формулу (1) переписать такъ

(2) $$\psi = p_2\varphi^2 + (p_4 - p_1p_3)\varphi + p_1^2p_4 - 4p_2p_4 + p_3^2\,,$$

умножая обѣ части послѣдняго уравненія (2) на φ и пользуясь уравненіемъ (2) § 15, получимъ

(3) $$\psi\varphi = \varphi^2(p_2^2 - p\ p_3 + p_4) + \varphi(p_1^2p_4 + p_3^2 - p_1p_2p_3) + \\ + p_1^2p_2p_4 + p_2p_3^2 - 4p_2^2p_4\,.$$

Разсматривая уравненія (2) и (3) какъ уравненія первой степени относительно φ и φ^2, получимъ для φ такое выраженіе

$$\varphi = \frac{A + B\psi}{C + D\psi}\,,$$

гдѣ

$$A = p_1^3 p_3 p_4 - p_1^2 p_4^2 - 4p_1 p_2 p_3 p_4 + 4p_2 p_4^2 + p_1 p_3^2 - p_3^2 p_4$$

$$B = p_2^2 - p_1 p_3 + p_4$$

$$C = p_2^2 p_4 - 2p_1 p_3 p_4 + p_4^2 + p_1^2 p_3^2 - p_1^2 p_2 p_4 - p_2 p_3^2$$

$$D = p_2$$

§ 18.

Теорема. *Функція ψ, принадлежащая къ подгруппѣ G группы H, къ которой принадлежитъ функція φ есть корень алгебраическаго уравненія, коэффиціенты котораго выражаются раціонально черезъ функцію φ, и степень котораго равна индексу подгруппы G. Функція же φ выражается раціонально черезъ ψ.*

Послѣднее утвержденіе теоремы о томѣ, что функція φ выражается раціонально черезъ ψ слѣдуетъ непосредственно изъ теоремы § 16, ибо φ не мѣняется отъ всѣхъ подстановокъ группы функціи ψ.

Покажемъ теперь справедливость первой части теоремы. Разложимъ группу H на сопряженныя системы при помощи подгруппы G. Пусть эти системы будутъ

(1) $$G,\ GS_1,\ GS_2,\ \ldots GS_{q-1},$$

гдѣ q есть индексъ подгруппы G. Этимъ системамъ соотвѣтствуютъ различныя значенія ψ. Обозначимъ эти значенія такъ

$$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots\psi_q.$$

Эти всѣ значенія различны между собой, ибо мы предположили, что функція ψ принадлежитъ какъ разъ подгруппѣ G. Что касается функціи φ, то она не мѣняется отъ всѣхъ подстановокъ, входящихъ во всѣ системы (1), ибо совокупность этихъ системъ и есть группа H функціи φ. Разсмотримъ функцію

$$(t-\psi)(t-\psi_1)\ldots(t-\psi_{q-1}) = t^q + Q_1 t^{q-1} + \ldots + Q_q,$$

гдѣ t есть новая независимая перемѣнная, а $Q_1,\ Q_2,\ \ldots Q_q$ симметрическія функціи отъ величинъ $\psi,\ \psi_1,\ \ldots\ \psi_{q-1}$. Очевидно, что всякій изъ коэффиціентовъ Q_i не мѣняется отъ всѣхъ подстановокъ группы H, ибо всякая подстановка этой группы влечетъ за собой лишь перестановку величинъ $\psi,\ \psi_1,\ \ldots\ \psi_{q-1}$; поэтому на основаніи теоремы § 16 мы можемъ утверждать, что Q_i выражается раціонально черезъ φ, что и требовалось доказать.

§ 19.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію группъ, къ которымъ принадлежатъ сопряженныя значенія функціи.

Возьмемъ функцію φ, принадлежащую группѣ G. тогда, какъ мы видѣли уже, ея сопряженныя значенія

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{k-1}$$

соотвѣтствуютъ сопряженнымъ системамъ

$$G, GT_1, GT_2, \ldots GT_{k-1}.$$

Посмотримъ теперь, какія подстановки не мѣняютъ значеніе φ_i. Очевидно, что всякая подстановка вида

(1) $$T_i^{-1}ST_i,$$

гдѣ S подстановка изъ группы G, не будетъ мѣнять φ_i. Въ самомъ дѣлѣ, подстановка T_i^{-1} переводитъ φ_i въ φ, подстановка S не мѣняетъ φ и наконецъ подстановка T_i переводитъ φ обратно въ φ_i.

Покажемъ, что и, обратно, всякая подстановка Σ, не мѣняющая функціи φ_i, будетъ имѣть видъ (1). Въ самомъ дѣлѣ, подстановка

$$T_i\Sigma T_i^{-1},$$

очевидно не мѣняетъ функціи φ, а потому она должна совпадать съ нѣкоторою подстановкой S группы G

$$T_i\Sigma T_i^{-1} = S,$$

откуда окончательно

$$\Sigma = T_i^{-1}ST_i,$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, мы видимъ, что *группа функціи φ_i будетъ не что иное какъ преобразованіе*

$$T_i^{-1}GT_i$$

группы G при помощи подстановки T_i.

Мы просимъ читателя еще разъ внимательно просмотрѣть §§ 18, 19, 20, 42, 43, 44, 45, 46, 47 главы V; теперь мы можемъ яснѣе себѣ представить происхожденіе изложенныхъ тамъ теоремъ.

Такъ какъ функція φ_i есть, можно сказать, таже функція, что и φ, только перемѣнныя независимыя имѣютъ другія обозначенія, такъ ска-

зать, другія названія; то очевидно, что группа $T_i^{-1}GT_i$ должна быть совершенно изоморфна съ группой G.

Теперь намъ дѣлается совершенно яснымъ, почему преобразованіе $T_i^{-1}ST_i$ подстановки S совершается при помощи замѣны обозначенія элементовъ въ циклахъ подстановки S при помощи подстановки T_i.

§ 20.

Итакъ, если G есть *нормальный* дѣлитель симметрической группы, то всѣ преобразованія

$$T_1^{-1}GT_1,\ T_2^{-1}GT_2,\ \ldots T_k^{-1}GT_k$$

совпадаютъ съ группой G, значитъ, всѣ сопряженныя значенія

(1) $$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots \varphi_{k-1}$$

принадлежатъ къ одной и той же группѣ G. На основаніи теоремы § 16 мы получаемъ въ этомъ случаѣ, что всѣ значенія (1) суть *раціональныя* функціи отъ одного изъ нихъ, напримѣръ, φ.

(2) $$\varphi_1=\theta_1(\varphi),\ \varphi_2=\theta_2(\varphi),\ \ldots \varphi_{k-1}=\theta_{k-1}(\varphi).$$

Мы будемъ называть *нормальнымъ* уравненіе

(3) $$t^k+P_1t^{k-1}+\ldots+P_k=0,$$

которому удовлетворяютъ величины (1), если имѣютъ мѣсто равенства (2), то есть, всѣ онѣ выражаются раціонально черезъ одну.

§ 21.

Поясенимъ вышеизложенную теорію на примѣрѣ общаго уравненія 4-ой степени. Интересно, что, показывая на уравненіи 4-ой степени приложеніе изложенныхъ теоремъ, мы систематически придемъ къ полному рѣшенію уравненій 4-ой степени

Начнемъ съ разсмотрѣнія двухъ функцій

$$\varphi=x_1x_2+x_3x_4,\ \psi=(x_1-x_3)(x_2-x_4).$$

Первую функцію мы уже разсматривали въ § 15

Что касается до функціи ψ, то мы замѣчаемъ, что она принадлежитъ группѣ (Vierergruppe) подстановокъ

$$1,\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1x_3)(x_2x_4),\ (x_1x_4)(x_2x_3),$$

которая входитъ дѣлителемъ въ группу (1) § 6 функціи φ; такъ какъ индексъ этой подгруппы равенъ $\frac{8}{4} = 2$, то будутъ существовать два сопряженныхъ значенія функціи ψ при восьми подстановкахъ группы (1) § 6. Эти значенія будутъ

$$\psi = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)\,,\ \psi_1 = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4)\,.$$

Если мы введемъ обозначенія § 15, то можно будетъ написать

$$\psi = \varphi - \varphi_2\,,\ \psi_1 = \varphi - \varphi_1$$

Если мы разсмотримъ функцію

$$(t - \psi)(t - \psi_1) = t^2 + Q_1 t + Q_2\,,$$

то надо будетъ показать, какъ выразить Q_1 и Q_2 раціонально черезъ φ

Мы имѣемъ

$$Q_1 = -\psi - \psi_1 = -(\varphi - \varphi_2) - (\varphi - \varphi_1) = -3\varphi + (\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) =$$
$$= -3\varphi - P_1 = -3\varphi + p_2$$

$$Q_2 = \psi\psi_1 = (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) = \Omega_0'(\varphi)$$

гдѣ

$$\Omega_0(t) = (t - \varphi)(t - \varphi_1)(t - \varphi_2) = t^3 + P_1 t^2 + P_2 t + P_3$$

и, слѣдовательно, получаемъ

$$Q_2 = 3\varphi^2 + 2P_1\varphi + P_2 = 3\varphi^2 - 2p_2\varphi + p_1 p_3 - 4p_4\,.$$

§ 22.

Разсмотримъ общую симметрическую группу 4-хъ независимыхъ перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, x_4. Для сокращенія мы будемъ писать только индексы 1, 2, 3, 4.

Напишемъ таблицу всѣхъ 24 перемѣщеній 4-хъ индексовъ.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

мы получимъ всѣ 24 подстановки симметрической группы, если укажемъ переходъ отъ первоначальнаго перемѣщенія ко всякому другому.

Эти подстановки будутъ

$$(1)\qquad \begin{array}{c|c|c|c} 1 & (12) & (132) & (1432) \\ (34) & (12)(34) & (1342) & (142) \\ (23) & (123) & (13) & (143) \\ (234) & (1234) & (134) & (14) \\ (243) & (1243) & (13)(24) & (1423) \\ (24) & (124) & (1324) & (14)(23) \end{array}$$

Вслѣдствіе существованія формулы

$$(1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n) = (12)(13)\ \ldots\ (1n)$$

мы заключаемъ, что въ знакоперемѣнную группу одиночные циклы могутъ входить только въ томъ случаѣ, если они состоятъ изъ нечетнаго числа элементовъ. Знакоперемѣнная группа (см. стр. 182) будетъ состоять изъ слѣдующихъ 12 подстановокъ

$$(2)\qquad \begin{array}{c} 1\,,\ (12)(34)\,,\ (13)(24)\,,\ (14)(23) \\ (123)\,,\ (132)\,,\ (124)\,,\ (142)\,,\ (134)\,,\ (143)\,,\ (234)\,,\ (243)\,. \end{array}$$

Эта группа имѣетъ нормальнымъ дѣлителемъ Vierergruppe

$$(3)\qquad 1\,,\ (12)(34)\,,\ (13)(24)\,,\ (14)(23)$$

Въ самомъ дѣлѣ, преобразованіе всякой подстановки вида $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ будетъ имѣть тотъ же видъ $(\alpha_1\beta_1)(\gamma_1\delta_1)$.

Наконецъ, мы можемъ указать группу, состоящую изъ двухъ подстановокъ

$$(4)\qquad 1\,,\ (12)(34)\,,$$

которая будетъ, очевидно, нормальнымъ дѣлителемъ группы (3).

§ 23.

Въ связи съ указанными въ § 22 подгруппами можно будетъ поступить такъ. Разсмотримъ функціи корней уравненія 4-ой степени, принадлежащія группамъ (1), (2), (3), (4). Изученіе связи между этими функціями приведетъ насъ къ полному алгебраическому рѣшенію буквеннаго уравненія 4-ой степени.

О функціяхъ, принадлежащихъ къ симметрической группѣ (1), говорить не стоитъ, ибо симметрическія функціи мы считаемъ величинами извѣстными. Функція, принадлежащая къ знакоперемѣнной группѣ (2), будетъ корнемъ квадратнаго уравненія съ извѣстными коэффиціентами.

Проще всего взять знакоперемѣнную функцію

$$\tau = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4).$$

Эта функція, очевидно, удовлетворяетъ квадратному уравненію

$$\tau^2 = D,$$

гдѣ D — дискриминантъ даннаго уравненія

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0.$$

Въ § 31. Главы IX мы видѣли, что

$$27D = 4A^3 - B^2,$$

гдѣ

$$A = p_2^2 - 3p_1p_3 + 12p_4$$

$$B = 27p_1^2p_4 + 27p_3^2 + 2p_2^3 - 72p_2p_4 - 9p_1p_2p_3.$$

Мы видѣли уже въ § 21 примѣръ функціи, принадлежащей къ Vierergruppe (3), а именно

$$\psi = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4).$$

Такъ какъ Vierergruppe имѣетъ индексъ 3 относительно знакоперемѣнной, то функція ψ должна быть корнемъ кубическаго уравненія, коэффиціенты котораго должны выражаться раціонально черезъ функцію τ, принадлежащую знакоперемѣнной группѣ.

Разлагая знакоперемѣнную группу на сопряженныя системы по Vierergruppe V, получимъ

$$V \quad = 1,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)$$

$$V(123) = (123),\ (134),\ (243),\ (142)$$

$$V(132) = (132),\ (234),\ (124),\ (143).$$

Этимъ системамъ соотвѣтствуютъ значенія

$$\psi = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = \varphi - \varphi_2$$

(1) $$\psi_1 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_4) = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\psi_2 = (x_3 - x_2)(x_1 - x_4) = \varphi_1 - \varphi,$$

гдѣ φ, φ_1, φ_2 обозначенія § 15.

Функція ψ есть корень кубическаго уравненія коэффиціенты котораго вычисляются слѣдующимъ образомъ,

$$\psi + \psi_1 + \psi_2 = 0$$

$$\psi\psi_1 + \psi\psi_2 + \psi_1\psi_2 = -(\varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2) + (\varphi\varphi_1 + \varphi\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2)$$

$$\psi\psi_1\psi_2 = \tau .$$

Далѣе, придерживаясь обозначеній § 15, получимъ

$$\varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = P_1^2 - 2P_2 = p_2^2 - 2(p_1p_3 - 4p_4)$$

$$\varphi\varphi_1 + \varphi\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 = P_2 = p_1p_3 - 4p_4 ,$$

слѣдовательно,

$$\psi\psi_1 + \psi\psi_2 + \psi_1\psi_2 = -p_2^2 + 3(p_1p_3 - 4p_4) = -A$$

Итакъ, кубическое уравненіе, которому удовлетворяетъ функція ψ, имѣетъ видъ

(2) $$\psi^3 - A\psi - \tau = 0$$

Переходимъ теперь къ функціи ω, принадлежащей къ группѣ (4). За такую функцію можно взять

$$\omega = x_1 - x_3 + x_2 - x_4 .$$

Такъ какъ группа (4) имѣетъ индексъ 2 относительно группы (3), то ω должна удовлетворять квадратному уравненію, коэффиціенты котораго выражаются раціонально черезъ ψ. Раскладывая Vierergruppe на сопряженныя системы по отношенію къ группѣ (4) получимъ

1, (12)(34); (13)(24), (14)(23).

Этимъ системамъ соотвѣтствуютъ два сопряженныя значенія функціи ω,

$$\omega = x_1 - x_3 + x_2 - x_4 ,\quad \omega_1 = x_3 - x_1 + x_4 - x_2 = -\omega .$$

Функція ω удовлетворяетъ квадратному уравненію

(3) $$\omega^2 - k = 0 ,$$

гдѣ

$$k = (x_1 - x_3 + x_2 - x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\varphi - 2\varphi_1 - 2\varphi_2 =$$

$$= p_1^2 - 2p_2 - 2p_2 + 4\varphi = p_1^2 - 4p_2 + 4\varphi ,$$

но изъ уравненій (1) получаемъ

$$\psi - \psi_2 = 2\varphi - \varphi_1 - \varphi_2 = 3\varphi - p_2,$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{3}(p_2 + \psi - \psi_2).$$

Итакъ уравненіе (3) принимаетъ окончательно видъ

$$\omega^2 - p_1 + \frac{8}{3}p_2 + \frac{4}{3}(\psi_2 - \psi) = 0.$$

Послѣ того какъ найдена функція ω, можно будетъ окончательно найти всѣ 4 корня заданнаго уравненія при помощи квадратныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\omega = x_1 - x_3 + x_2 - x_4 = p_1 + 2(x_1 + x_2) = -p_1 - 2(x_3 + x_4).$$

Значитъ,

$$x_1 + x_2 = \frac{\omega - p_1}{2}, \quad x_3 + x_4 = \frac{-\omega - p_1}{2}.$$

Но произведенія x_1x_2 и x_3x_4 суть корни квадратнаго уравненія вида

$$\xi^2 - \varphi\xi + p_4 = 0,$$

или

(4) $$\xi^2 - \frac{1}{3}(p_2 + \psi - \psi_2)\xi + p_4 = 0.$$

Корни x_1 и x_2 найдутся при помощи квадратнаго уравненія, ибо извѣстны сумма ихъ $x_1 + x_2$ и произведеніе x_1x_2. Подобнымъ же образомъ найдемъ x_3 и x_4 при помощи квадратнаго уравненія. Итакъ, послѣдовательное разсмотрѣніе функцій τ, ψ, ω, ξ приводитъ насъ къ полному рѣшенію въ радикалахъ уравненія 4-ой степени. Это рѣшеніе сводится къ цѣпи уравненій

$$\tau^2 = D, \quad \psi^3 - A\psi - \tau = 0, \quad \omega^2 - p_1^2 + \frac{8}{3}p_2 + \frac{4}{3}(\psi_2 - \psi) = 0$$

$$\xi^2 - \frac{1}{3}(p_2 + \psi - \psi_2)\xi + p_4 = 0$$

и наконецъ

$$x^2 + \frac{p_1 - \omega}{2}x + \xi_1 = 0, \quad x^2 + \frac{p_1 + \omega}{2}x + \xi_2 = 0,$$

гдѣ ξ_1 и ξ_2 суть корни уравненія (4).

§ 24.

Изложенный въ предыдущемъ параграфѣ, способъ рѣшенія уравненія 4-ой степени наводитъ насъ на дальнѣйшія весьма важныя разсужденія.

Въ § 13 главы III мы видѣли самый простой способъ рѣшенія буквеннаго уравненія 4-ой степени. Если мы припомнимъ, что по этому способу рѣшеніе приводится къ рѣшенію уравненія 3-ей степени, то, принимая во вниманіе формулы Cardan'а, мы замѣчаемъ, что радикальное выраженіе является 4-хъ этажнымъ, при чемъ тремъ этажамъ соотвѣтствуютъ квадратные радикалы, а одному—кубическій. Этотъ видъ можетъ быть указанъ схематически такъ

$$\sqrt{\ldots\sqrt{\ldots\sqrt[3]{\ldots\sqrt{\ldots}}}}$$

Полученное нами въ предыдущемъ параграфѣ, рѣшеніе кажется намъ уклоняющимся отъ указанной схемы. Во первыхъ, можно подумать, что подъ корнемъ кубическимъ должно быть 2 квадратныхъ радикала: одинъ $\sqrt{D}$, а другой вводимый формулами Cardan'а. Съ другой стороны можно подумать, что надъ корнемъ кубическимъ должны быть 3 этажа квадратныхъ радикаловъ. Нетрудно, однако, убѣдиться, что квадратный радикалъ соотвѣтствующій формуламъ Cardan'а пропадаетъ, ибо кубическое уравненіе φ имѣетъ особенный видъ; съ другой стороны, одинъ изъ верхнихъ квадратныхъ радикаловъ пропадаетъ вслѣдствіе того, что квадратное уравненіе для ξ имѣетъ корни, раціонально выражающіеся черезъ ω.

§ 25.

Остановимся сначала на второмъ замѣчаніи, что корни $\xi_1 = x_1x_2$, $\xi_2 = x_3x_4$ квадратнаго уравненія (4) § 23 выражаются раціонально, черезъ функцію ω. На основаніи разсмотрѣнія группъ это очевидно, ибо ξ_1 и ξ_2 не мѣняются отъ группы 1, (12)(34) функціи ω; Но нетрудно убѣдиться въ этомъ и на самомъ дѣлѣ при помощи вычисленія

$$(x_1x_2 - x_3x_4)\omega = (x_1x_2 - x_3x_4)(x_1 - x_3 + x_2 - x_4) =$$
$$= p_3 + x_1x_2(x_1 + x_2) + x_3x_4(x_3 + x_4)$$
$$-p_1\varphi = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) =$$
$$= -p_3 + x_1x_2(x_1 + x_2) + x_3x_4(x_3 + x_4);$$

отсюда

$$x_1x_2 - x_3x_4 = \frac{2p_3 - p_1\varphi}{\omega};$$

кромѣ того

$$x_1x_2 + x_3x_4 = \varphi$$

и окончательно

$$\xi_1 = x_1x_2 = \frac{1}{2}\left\{\varphi + \frac{2p_3 - p_1\varphi}{\omega}\right\}$$

$$\xi_2 = x_3x_4 = \frac{1}{2}\left\{\varphi - \frac{2p_3 - p_1\varphi}{\omega}\right\}$$

§ 26.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію кубическаго уравненія

(1) $$\psi^3 - A\psi - \sqrt{D} = 0\,.$$

Такъ какъ Vierergruppe есть нормальный дѣлитель знакопеременной, то уравненіе принадлежитъ къ числу нормальныхъ, если мы будемъ считать выраженіе $\tau = \sqrt{D}$, присоединеннымъ къ полю $\Omega(p)$. Но Vierergruppe есть нормальный дѣлитель также и для всей симметрической группы, то уравненіе

$$(\psi^3 - A\psi)^2 - D = 0$$

будетъ также нормальнымъ въ полѣ $\Omega(p)$ безъ присоединенія τ.

Мы видѣли уже въ § 12 главы XII, что у нормальныхъ кубическихъ уравненій

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

долженъ быть полнымъ квадратомъ дискриминантъ

$$\Delta = -(4b^3 + 27c^2) + 18abc + a^2b^2 - 4a^3c\,.$$

Это какъ разъ имѣетъ мѣсто для кубическаго уравненія (1), ибо

$$\Delta = 4A^3 - 27D\,.$$

Откуда (см. стр. 539)

$$\Delta = B^2.$$

Примѣняя формулы Cardan'a, получимъ

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{D}}{2} + B\frac{i\sqrt{3}}{2^2 9^2}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{D}}{2} - B\frac{i\sqrt{3}}{2^2.9^2}}.$$

Второй корень квадратный $\sqrt{3}$ является отъ присоединенія корня кубическаго изъ единицы

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

§ 27.

Покажемъ теперь, какъ на самомъ дѣлѣ выражаются корни уравненія (1) § 26 одни черезъ другіе.

Проще всего будемъ слѣдовать общей теоріи § 16 и разсмотримъ выраженіе

(1) $$\frac{\psi_1}{t-\psi} + \frac{\psi_2}{t-\psi_1} + \frac{\psi}{t-\psi_2},$$

гдѣ ψ, ψ_1, ψ_2 суть корни разсматриваемаго кубическаго уравненія. Выраженіе (1) можетъ быть переписано такъ

(2) $$\frac{t\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{t^3 - At - \tau}$$

гдѣ

$$\mathfrak{A} = -(\psi_1 + \psi_2)\psi_1 - (\psi + \psi_2)\psi_2 - (\psi + \psi_1)\psi =$$

$$= \psi\psi_1 + \psi_1\psi_2 + \psi_2\psi = -A.$$

Вычисленіе $\mathfrak{B}$ нѣсколько сложнѣе

$$\mathfrak{B} = \psi_1^2\psi_2 + \psi_2^2\psi + \psi^2\psi_1.$$

Введемъ вспомогательную величину

$$\lambda = \psi_1\psi_2^2 + \psi_2\psi^2 + \psi\psi_1^2.$$

Тогда

(3) $$\mathfrak{B} + \lambda = \psi_1\psi_2(\psi_1 + \psi_2) + \psi_2\psi(\psi_2 + \psi) + \psi\psi_1(\psi + \psi_1) = -3\psi\psi_1\psi_2 = -3\tau.$$

Съ другой стороны

$$\mathfrak{B} - \lambda = \psi_1\psi_2(\psi_1 - \psi_2) + \psi_2\psi(\psi_2 - \psi) + \psi\psi_1(\psi - \psi_1),$$

но

$$\psi_1 - \psi_2 = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 - 3\varphi_1 = p_2 - 3\varphi_1$$

$$\psi_2 - \psi = p_2 - 3\varphi$$

$$\psi - \psi_1 = p_2 - 3\varphi_2,$$

кромѣ того

$$\psi_1\psi_2 = \Omega_0'(\varphi_1),\ \psi_2\psi = \Omega_0'(\varphi),\ \psi\psi_1 = \Omega_0'(\varphi_2),$$

гдѣ $\Omega_0'(y)$ обозначаетъ первую часть уравненія (1) § 15. Итакъ, выраженіе

(1) $$\mathfrak{B} - \lambda = \Omega_0'(\varphi)(p_2 - 3\varphi) + \Omega_0'(\varphi_1)(p_2 - 3\varphi_1) + \Omega_0'(\varphi_2)(p_2 - 3\varphi_2)$$

будучи симметрической функціей трехъ корней φ, φ_1, φ_2 уравненія

$\Omega_0(y) = 0$ выражается просто въ полѣ $\Omega(p)$, пусть это выраженіе будетъ $\mathfrak{K}$. Мы получаемъ, сопоставляя (3) и (4),

$$\mathfrak{B} = -\frac{3}{2}\tau - \frac{1}{2}\mathfrak{K}.$$

Окончательное выраженіе ψ_1 черезъ ψ имѣетъ видъ

$$\psi_1 = \frac{A\psi + \mathfrak{B}}{3\psi^2 - A}.$$

ГЛАВА XVI.

Теорія Galois.

§ 1.

Въ основу моего изложенія теоріи Galois я положу мысли, приведенныя мною въ статьѣ „Объ основныхъ положеніяхъ теоріи Galois". Матем. Сборн Москва 1914.

Теоріи Galois принадлежитъ настолько исключительная роль въ математикѣ, что я считаю необходимымъ остановиться нѣсколько на личности автора этой теоріи.

Evariste Galois родился 25 окт. 1811 г. вблизи Парижа. Въ 1823 году покинулъ родительскій домъ, чтобы поступить въ коллегію Louis-le-Grand. Уже съ пятнадцати лѣтъ обнаружились въ немъ выдающіяся способности къ математикѣ, причемъ на классическихъ твореніяхъ Lagrange'а онъ воспиталъ свои природныя наклонности алгебраиста — Можно думать, что уже къ семнадцати годамъ онъ обладалъ своими наиболѣе важными идеями. Но объ этомъ можно дѣлать только догадки, ибо два мемуара, представленные имъ въ парижскую Академію Наукъ, не только удостоились отвѣта, но даже оказались потерянными. Этотъ удивительный фактъ въ высшей степени характеренъ для оффиціальныхъ научныхъ организацій, которыя всегда относятся съ извѣстнымъ недовѣріемъ къ начинающимъ авторамъ. Послѣ двухъ неудачныхъ попытокъ поступить въ Политехническую Школу Galois поступилъ въ 1829 году въ Нормальную Школу, которую принужденъ былъ оставить уже въ слѣдующемъ году. Послѣдніе годы жизни онъ провелъ довольно бурно, участвуя въ политической жизни страны, и умеръ 31 мая 1832 г отъ раны, полученной на дуэли

§ 2.

Если обычно принято приписывать Galois начало примѣненія теоріи группъ къ изученію алгебраическихъ уравненій, то это справедливо только до извѣстной степени, ибо надо признать, что случай буквенныхъ уравненій, какъ это мы видѣли въ предыдущей главѣ, достаточно подробно изученъ уже Lagrange'омъ. Galois принадлежитъ лишь честь созданія удивительной по глубинѣ теоріи, которая, съ одной стороны, является распространеніемъ теоріи Langrange'a на численныя уравненія, съ другой стороны, заключаетъ теорію Langrange'a какъ частный случай.

Не смотря на большую разработанность теоріи Galois мнѣ не случилось до самаго послѣдняго времени встрѣтить такое изложеніе ея принциповъ, которое бы удовлетворило меня съ точки зрѣнія простоты, строгости и общности. Скажу болѣе, часто изложеніе теоріи страдаетъ такими неясностями и недомолвками, что, изучающій эту теорію въ первый разъ, можетъ составить себѣ совершенно превратное понятіе о предметѣ.

§ 3.

Въ основу моего изложенія я ставлю *точную* формулировку различія между буквенными и численными уравненіями.

Уравненіе

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

я буду называть *численнымъ*, если между его корнями *существуютъ* соотношенія вида

(1) $$\Pi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

гдѣ Π цѣлая функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ съ отличными отъ нуля и принадлежащими къ полю Ω коэффиціентами.

Я напомню, что мы согласились въ главѣ XIV разсматривать только поля съ равной нулю характеристикой.

Соотношенія (1) съ отличными отъ нуля коэффиціентами будемъ называть для сокращенія *нетождественными*, сохраняя названіе *тождественныхъ* для соотношеній (1) въ случаѣ равенства нулю всѣхъ коэффиціентовъ.

Говоря кратко, мы назовемъ численными такія уравненія, которыя допускаютъ не тождественныя соотношенія между корнями.

Если всѣ коэффиціенты p_i уравненія суть опредѣленныя числа, принадлежащія къ полю Ω, то уравненіе будетъ, очевидно, численнымъ, ибо существуютъ между корнями не тождественныя соотношенія

$$\sum x_1 + p_1 = 0, \quad \sum x_1 x_2 - p_2 = 0, \quad \ldots$$

Этотъ случай есть, такъ сказать, крайній въ смыслѣ числовой опредѣленности уравненія По моей терминологіи численнымъ уравненіемъ будетъ называться также и такое, гдѣ, напримѣръ, $p_1 = 0$, а всѣ остальные коэффиціенты $p_2, p_3, \ldots p_n$ независимыя перемѣнныя ибо тогда существуетъ между корнями не тождественное соотношеніе

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 .$$

Вообще говоря, будетъ численнымъ всякое уравненіе, коэффиціенты котораго удовлетворяютъ соотношеніямъ вида $\Pi(p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$.

§ 4.

Разсмотримъ совокупность G *всѣхъ* подстановокъ, изъ которыхъ *каждая* не нарушаетъ справедливости *всякаго* соотношенія между корнями. Докажемъ, что эта совокупность есть группа.

Пусть выписаны всѣ возможныя соотношенія между корнями [1])

$$(1) \qquad \Pi = 0 , \ \Pi_1 = 0 , \ \Pi_2 = 0 , \ \ldots$$

Примѣнимъ къ произвольному изъ нихъ, напримѣръ къ $\Pi = 0$, одну изъ подстановокъ S данной совокупности. Такъ какъ подстановка S не должна нарушать справедливости соотношенія $\Pi = 0$, то это послѣднее послѣ подстановки должно обратиться въ новое соотношеніе также вѣрное. Это новое соотношеніе должно находиться среди соотношеній (1), пусть оно будетъ $\Pi_k = 0$. Примѣнимъ теперь къ послѣднему другую подстановку T нашей совокупности G. Пусть соотношеніе $\Pi_k = 0$ перейдетъ въ новое $\Pi_l = 0$. Очевидно, что подстановка ST переводитъ соотношеніе $\Pi = 0$ въ $\Pi_l = 0$, но соотношеніе $\Pi_l = 0$ есть также вѣрное соотношеніе, слѣдовательно, подстановка ST принадлежитъ къ G, ибо эта подстановка не нарушаетъ произвольно выбраннаго соотношенія $\Pi = 0$. Итакъ, G есть группа.

Группа G носитъ названіе группы Galois для даннаго уравненія или, просто, группы уравненія.

§ 5

Нетрудно видѣть, что для буквеннаго уравненія группой Galois является вся симметрическая группа всѣхъ подстановокъ корней, ибо можно сказать, что между корнями буквеннаго уравненія существуютъ только

[1]) Цѣлыми индексами при буквахъ Π я не имѣю желанія подчеркивать необходимости для совокупности соотношеній быть обязательно перечислимою.

тождественныя соотношенія, эти же соотношенія не нарушаются отъ любой подстановки.

§ 6.

Если соотношенія между корнями численнаго уравненія таковы, что требованіе не нарушать ихъ заставляетъ отбрасывать извѣстныя подстановки, то группа Galois уменьшается и дѣлается подгруппой симметрической группы. Слѣдуя Kronecker'у, мы скажемъ, что въ такомъ случаѣ уравненіе имѣетъ *аффектъ*. Буквенныя уравненія суть уравненія безъ аффекта.

§ 7.

Покажемъ на простомъ примѣрѣ, что существуютъ *численныя* уравненія *безъ* аффекта.

Разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе (см. § 15 главы XII)

$$x^5 - p^2x - p = 0, \tag{1}$$

гдѣ p произвольное простое число, и возьмемъ за основное поле Ω поле раціональныхъ чиселъ.

Такъ какъ первая часть уравненія имѣетъ при $-\infty$, -1, 0, $+\infty$, знаки $-$, $+$, $-$, $+$, то существуютъ *три* вещественныхъ корня уравненія. Остальные *два* корня обязательно *мнимые*, ибо въ уравненіи имѣется пропускъ трехъ членовъ со степенями x^4, x^3, x^2 (см стр. 356).

Такъ какъ числа основного поля вещественныя, то всякое соотношеніе между корнями будетъ имѣть видъ $a + ib = 0$, откуда $a = 0$, $b = 0$, а, слѣдовательно, и $a - ib = 0$. Другими словами, всякое соотношеніе между корнями не нарушается отъ измѣненія знака передъ i.

Если мы обозначимъ черезъ 1 и 2 мнимые корни, то измѣненіе знака передъ i осуществляется при помощи транспозиціи (12). Итакъ мы видимъ, что транспозиція (12) должна входить въ группу Galois. По теоремѣ Eisenstein'а (см. стр. 491) уравненіе (1) неприводимо въ основномъ полѣ, то, слѣдовательно, *какъ мы увидимъ дальше*, его группа транзитивна. Мы видѣли въ § 39 главы V, что, если транзитивная группа заключаетъ транспозицію (12), то она или симметрическая или же импримитивная. Уравненіе задано простой степени, значитъ, число корней есть простое, а потому группа подстановокъ этихъ корней не можетъ быть импримитивною. Итакъ, мы видимъ, что группа Galois для уравненія (1) есть симметрическая, т. е уравненіе (1) не имѣетъ аффекта.

§ 8.

Будемъ теперь разсматривать раціональныя функціи

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

отъ корней $x_1, x_2, \ldots x_n$ съ коэффиціентами изъ основного поля Ω

Основнымъ вопросомъ является изученіе условій *неизмѣняемости* функціи φ при подстановкахъ корней. Эту неизмѣняемость можно понимать двояко: при буквенныхъ уравненіяхъ дѣло идетъ о функціональной неизмѣняемости, т. е. неизмѣняемости *вида*; при численныхъ же уравненіяхъ дѣло идетъ о неизмѣняемости *численнаго значенія* функціи, хотя бы видъ ея и измѣнялся при подстановкѣ.

Несмотря на кажущееся большое различіе этихъ двухъ понятій, теорія Galois сближаетъ ихъ въ одно гармоническое цѣлое.

Поясним сказанное примѣромъ. Функція $x_1x_2+x_3x_4$ не мѣняетъ своего вида при подстановкѣ (1324), но мѣняетъ видъ при подстановкѣ (123), ибо отъ послѣдней подстановки функція принимаетъ видъ $x_2x_3+x_1x_4$; если у насъ разсматривается численное уравненіе, среди соотношеній котораго существуетъ $x_2=x_4$, то численное значеніе функціи $x_1x_2+x_3x_4$ не мѣняется при обѣихъ подстановкахъ (1324) и (123).

§ 9.

При буквенныхъ уравненіяхъ мы имѣли очевидную теорему: *подстановки не измѣняющія вида функціи, образуютъ группу*

Эта теорема падаетъ, если мы потребуемъ вмѣсто неизмѣняемости вида функціи неизмѣняемость численнаго значенія. Можно доказать для численныхъ уравненій, *что подстановки, не измѣняющія численнаго значенія функціи, могутъ и не образовать группы.*

Въ послѣднемъ мы легко убѣждаемся на самыхъ простыхъ примѣрахъ. Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе

$$x^6+x^5+\ldots+x^2+x+1=0,$$

корни котораго суть

$$x_k=e^{\frac{2k\pi i}{7}}$$

Очевидно, что $x_1x_6=1$. Произведеніе x_1x_6 не мѣняетъ своей численной величины, т. е. остается равнымъ единицѣ, при двухъ подстановкахъ

$$S=(12)(56),\ T=(16)(23),$$

ибо отъ подстановки S оно переходитъ въ $x_2x_5=1$, а отъ T оно переходитъ въ $x_6x_1=1$. Подстановка же ST переводитъ первоначальную функцію x_1x_6 въ x_3x_5, а эта величина уже не равна единицѣ и, значитъ, произведеніе подстановокъ S и T, не мѣнявшихъ численнаго значенія функціи, представляетъ подстановку, уже мѣняющую численное значеніе.

Теорема о томъ, что подстановки, не мѣняющія функціи, образуютъ группу, *возстановляется* для численныхъ уравненій, если будемъ выбирать подстановки не произвольно, а только лишь *изъ группы Galois.*

Мы приходимъ къ теоремѣ, имѣющей мѣсто для *численныхъ* уравненій.

Подстановки изъ группы Galois, не мѣняющія численно функціи, образуютъ группу.

Пусть функція $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, которую мы обозначимъ для краткости $\varphi(x)$, не мѣняетъ своего численнаго значенія отъ двухъ подстановокъ S и T, взятыхъ изъ группы Galois. Обозначимъ то выраженіе, въ которое переходитъ функція $\varphi(x)$ при подстановкѣ S, знакомъ $\varphi(x|S)$.

Получимъ два равенства

(1) $$\varphi(x|S)=\varphi(x),\ \varphi(x|T)=\varphi(x).$$

Такъ какъ подстановки изъ группы Galois можно примѣнять ко всякому соотношенію между корнями, то, примѣняя подстановку T къ первому изъ равенствъ (1), а S ко второму, получимъ

(2) $$\varphi(x|ST)=\varphi(x|T),\ \varphi(x|TS)=\varphi(x|S).$$

Сравнивая (1) и (2), получимъ

$$\varphi(x|ST)=\varphi(x|TS)=\varphi(x)$$

и теорема доказана.

§ 10.

Примыкая къ идеямъ Kronecker'a, возьмемъ выраженіе

$$\xi=t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n,$$

гдѣ $t_1, t_2, \ldots t_n$ независимыя перемѣнныя. Корни $x_1, x_2, \ldots x_n$ мы можемъ предполагать различными между собой, ибо въ случаѣ кратныхъ корней мы можемъ освободить отъ нихъ уравненіе при помощи раціональныхъ дѣйствій, т. е., другими словами, не выходя изъ основного поля.

Пусть

(1) $$\xi,\ \xi',\ \xi'',\ \ldots \xi^{(N-1)}\ (N=1.2.3\ldots n)$$

будутъ тѣ выраженія, которыя получаются изъ ξ отъ различныхъ N подстановокъ корней $x_1, x_2, \dots x_n$, оставляя на мѣстѣ величины $t_1, t_2, \dots t_n$.

Такъ, напримѣръ,

$$\xi^{(i)} = t_1 x_{i_1} + t_2 x_{i_2} + \dots + t_n x_{i_n},$$

гдѣ

$$i_1, i_2, \dots i_n$$

нѣкоторое перемѣщеніе индексовъ $1, 2, \dots n$.

Величины (1), разсматриваемыя какъ функціи отъ независимыхъ перемѣнныхъ t_i, всѣ *различны* между собой, ибо различны всѣ $x_1, x_2, \dots x_n$.

§ 11.

Разсмотримъ функцію

$$G(\eta) = (\eta - \xi)(\eta - \xi') \dots (\eta - \xi^{(N-1)}) = \eta^N + T_1\eta^{N-1} + T_2\eta^{N-2} + \dots + T_N,$$

гдѣ, очевидно, T_k есть форма степени k отъ независимыхъ перемѣнныхъ t_i съ коэффиціентами симметрическими функціями отъ x_i. Другими словами, T_k будетъ форма степени k отъ t_i съ коэффиціентами, принадлежащими къ полю $\Omega(p)$; такъ напримѣръ,

$$T_1 = \frac{N}{n} p_1(t_1 + t_2 + \dots + t_n),$$

гдѣ p_1 первый коэффиціентъ заданнаго уравненія.

§ 12.

Покажемъ, что уравненіе $G(\eta) = 0$ *неприводимо* въ полѣ $\Omega(p, t)$, полученномъ отъ присоединенія $t_1, t_2, \dots t_n$ къ $\Omega(p)$, если предположить корни x_i *независимыми перемѣнными*.

Допустимъ обратное, а именно, что уравненіе приводимо. Пусть $G_1(\eta)$ будетъ нѣкоторый неприводимый множитель функціи $G(\eta)$. Мы, конечно, должны предполагать, что коэффиціенты функціи $G_1(\eta)$ суть формы отъ t_i съ коэффиціентами изъ $\Omega(p)$. Указанный характеръ коэффиціентовъ $G_1(\eta)$ происходитъ оттого, что эта функція должна быть произведеніемъ разностей $\eta - \xi^{(i)}$, гдѣ i не пробѣгаетъ полной системы значеній $0, 1, 2, \dots N-1$. Пусть $G_1(\eta)$ будетъ тотъ изъ неприводимыхъ множителей функціи $G(\eta)$, который имѣетъ корень ξ.

Имѣетъ мѣсто тождество $G_1(\xi) = 0$. Это тождество будетъ буквеннымъ, если предположить корни x_i независимыми перемѣнными. Такъ какъ

буквенное тождество не нарушается при всѣхъ подстановкахъ перемѣнныхъ, то мы получимъ тождество

$$G_1(\xi^{(i)}) = 0 ,$$

гдѣ i пробѣгаетъ всю систему чиселъ $0, 1, 2, \ldots N-1$.

Итакъ, неприводимый множитель $G_1(\eta)$ долженъ заключать всѣ различные между собой N корней функціи $G(\eta)$, т. е. $G_1(\eta)$ долженъ совпадать съ $G(\eta)$ и, слѣдовательно, $G(\eta) = 0$ неприводимо.

§ 13

Покажемъ прежде всего, что корни заданнаго уравненія $x_1, x_2, \ldots x_n$ выражаются раціонально черезъ ξ въ такомъ смыслѣ, что корень x_i есть раціональная функція отъ ξ, коэффиціенты которой принадлежатъ полю $\Omega(p, t)$.

Разсмотримъ слѣдующихъ N линейныхъ уравненій

(1) $$x_{i_r} = \sum A_h(t_1 x_{i_1} + t_2 x_{i_2} + \ldots + t_n x_{i_n})^h$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ значенія $0, 1, \ldots N-1$ показателя h. Коэффиціенты A_h подлежатъ опредѣленія изъ N уравненій первой степени, которыя получаются изъ уравненія (1), если подъ $i_1, i_2, \ldots i_n$ разумѣть всѣ возможныя перемѣщенія индексовъ $1, 2, \ldots n$.

Рѣшимъ при помощи опредѣлителей систему N уравненій съ N неизвѣстными A_h и покажемъ, что эти неизвѣстныя окажутся элементами поля $\Omega(p, t)$.

Мы получаемъ, очевидно,

$$\Theta A_h = \Delta_h ,$$

гдѣ Θ есть опредѣлитель

$$\left| \begin{matrix} (t_1 x_{i_1} + t_2 x_{i_2} + \ldots + t_n x_{i_n})^{N-1}, & (t_1 x_{i_1} + \ldots + t_n x_{i_n})^{N-2}, & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right|$$

Въ этомъ опредѣлителѣ горизонтали получаются изъ первой при помощи подстановокъ корней x_i.

Опредѣлитель же Δ_h получается изъ Θ замѣной h-ой колонны колонной корней x_{i_r}. Такъ какъ при всякой подстановкѣ корней x_i горизонтали въ Θ и Δ_h перемѣщаются одинаково, то будутъ симметрическими функціями отъ корней x_i два выраженія Θ^2 и $\Theta\Delta_h$. Отсюда окажется симметрической функціей отъ корней x_i коэффиціентъ

$$A_h = \frac{\Delta_h \Theta}{\Theta^2} .$$

Подставляя полученныя выраженія коэффиціентовъ A_h въ равенство (1) и примѣняя это равенство къ первоначальному расположенію индексовъ $1, 2, \ldots n$, получимъ

$$x_r = \sum A_h \xi^h,$$

т. е. всякій корень x_r раціонально выражается черезъ ξ въ полѣ $\Omega(p, t)$.

§ 14.

Если x_i будутъ корнями численнаго уравненія, то функція $G(\eta)$ § 11 можетъ *сдѣлаться приводимой*. Мы покажемъ, что, если обозначить черезъ $g(\eta)$ неприводимой въ $\Omega(p, t)$ множитель функціи $G(\eta)$, то степень уравненія $g(\eta) = 0$ будетъ равна порядку группы Galois. Уравненіе $g(\eta) = 0$ называется *резольвентой Galois*. Тогда будетъ очевидно, что для уравненія безъ аффекта резольвента Galois обращается въ уравненіе $G(\eta) = 0$.

Пусть резольвента $g(\eta)$ тотъ неприводимый множитель функціи $g(\eta)$, который имѣетъ корень ξ. Тождество $g(\xi) = 0$ удовлетворяется такимъ образомъ: первая часть есть функція раціональная отъ t_i и x_i. Всѣ коэффиціенты при степеняхъ t_i въ числителѣ должны уничтожаться на основаніи соотношеній между корнями x_i. Итакъ, разсматривая въ равенствѣ $g(\xi) = 0$ величины t_i какъ произвольныя постоянныя, мы можемъ къ нему примѣнить любую подстановку S_i корней x_i, взятую изъ группы Galois. Пусть подстановка S_i обращаетъ ξ въ $\xi^{(i)}$, значитъ, получимъ новое справедливое равенство $g(\xi^{(i)}) = 0$. Итакъ, подстановки группы Galois можно характеризовать какъ такія, которыя переводятъ одинъ корень ξ резольвенты въ другой. Но быть можетъ такимъ образомъ не исчерпываются всѣ корни $\xi^{(i)}$ резольвенты. Для доказательства обратнаго покажемъ, что переходъ отъ ξ ко всякому другому корню $\xi^{(k)}$ резольвенты даетъ подстановку корней изъ группы Galois. Для этой цѣли возьмемъ любое соотношеніе

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \tag{1}$$

между корнями. Выражая корни черезъ ξ, получимъ

$$\Pi(\xi) = 0.$$

Здѣсь $\Pi(\xi)$ есть цѣлая функція отъ ξ съ коэффиціентами изъ поля $\Omega(p, t)$. Если уравненію $\Pi(\xi)$ удовлетворяетъ одинъ корень ξ неприводимаго въ полѣ $\Omega(p, t)$ уравненія $g(u) = 0$, то ему долженъ удовлетворять также всякій другой корень $\xi^{(k)}$ того же уравненія $g(u) = 0$ и мы имѣемъ $\Pi(\xi^{(k)}) = 0$. Другими словами, соотношеніе (1) между корнями не нарушается отъ подстановки $(\xi, \xi^{(k)})$ переводящей ξ въ ξ^k

Такъ какъ соотношеніе (1) выбрано произвольно, то подстановка $(\xi, \xi^{(k)})$ принадлежитъ группѣ Galois, что и требовалось доказать.

Резюмируя сказанное, мы замѣчаемъ, что группа Galois состоитъ изъ подстановокъ

$$(\xi, \xi), (\xi, \xi'), (\xi, \xi''), \ldots (\xi, \xi^{(\nu-1)}),$$

гдѣ $\xi, \xi', \ldots \xi^{(\nu-1)}$ суть всѣ корни резольвенты Galois.

§ 15.

Теперь я перейду къ указанію способа разсужденія, который сводитъ численную неизмѣняемость, непосредственно къ разсмотрѣнію буквенной неизмѣняемости.

Для этой цѣли покажемъ, что переходъ отъ

$$\xi = t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n$$

къ

$$\xi^{(i)} = t_1x_{i_1} + t_2x_{i_2} + \ldots + t_nx_{i_n}$$

можетъ быть воспроизведенъ подстановкой, буквъ t_i, оставляя x_i на мѣстахъ. Чтобы найти соотвѣтственную подстановку величинъ t_i будемъ разсуждать такъ: обозначимъ черезъ

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots & i_n \\ 1, & 2, & \ldots & n \end{pmatrix}$$

подстановку $(\xi, \xi^{(i)})$ корней x_i. Произведемъ въ выраженіи $\xi^{(i)}$ ту же подстановку σ индексовъ у величинъ t_i, оставляя корни x_i на мѣстахъ, тогда выраженіе $\xi^{(i)}$ обратится въ $t_{i_1}x_{i_1} + t_{i_2}x_{i_2} + \ldots +$, т. е. въ ξ.

Итакъ, переходъ отъ ξ къ $\xi^{(i)}$ производится при помощи обратной подстановки σ^{-1} величинъ t_i.

§ 16.

Если подстановка σ пробѣгаетъ группу Galois, то туже группу пробѣгаетъ и обратная подстановка σ^{-1}. Итакъ, мы имѣемъ право вмѣсто подстановокъ корней x_i разсматривать подстановки независимыхъ перемѣнныхъ t_i. Если мы не будемъ выходить изъ группы Galois, то мы достигнемъ полнаго сведенія теоріи численныхъ уравненій къ теоріи Lagrange'a.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое соотношеніе

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

послѣ подстановки вмѣсто x_i ихъ выраженій черезъ ξ обратится въ

$$(1) \qquad \Pi'(t_1, t_2, \ldots t_n) = 0,$$

которое должно быть *тождествомъ относительно* t_i, ибо эти величины суть независимыя перемѣнныя.

Конечно равенство (1) не будетъ тождествомъ, если сохранить обозначенія корней x_i; всѣ его коэффиціенты обратятся въ нуль лишь на основаніи соотношеній, существующихъ между корнями численнаго уравненія. Поэтому я и сказалъ, что (1) есть тождество *только относительно* t_i.

Если функція $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ не измѣняетъ численнаго значенія при подстановкѣ σ, при чемъ видъ свой она измѣняетъ и обращается въ $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$, то мы имѣемъ равенство

$$(2) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

которое будетъ однимъ изъ существующихъ соотношеній между корнями. Выразимъ теперь x_i черезъ ξ, тогда получимъ изъ равенства (2) другое

$$(3) \qquad \varphi'(t_1, t_2, \ldots t_n) = \varphi_1'(t_1, t_2, \ldots t_n)$$

Такъ какъ t_i суть независимыя перемѣнныя, то обѣ функціи

$$\varphi'(t_1, t_2, \ldots t_n) \text{ и } \varphi_1'(t_1, t_2, \ldots t_n),$$

разсматриваемыя какъ функціи отъ t_i должны быть равны *тождественно*, принимая во вниманіе, конечно, существующія между x_i соотношенія. Функція $\varphi'(t_1, t_2, \ldots t_n)$ не измѣняетъ, слѣдовательно, своего вида относительно t_i при подстановкѣ σ^{-1} этихъ величинъ t_i.

§ 17.

Для завершенія полнаго сведенія численныхъ уравненій къ теоріи Lagrange'а необходимо доказать для *численныхъ* уравненій теорему, аналогичную основной теоремѣ теоріи симметрическихъ функцій

Эта теорема можетъ быть формулируема такъ:

Теорема. *Функція φ отъ корней x_i съ коэффиціентами изъ основного поля Ω, не мѣняющаяся численно при всѣхъ подстановкахъ группы Galois, есть величина изъ поля $\Omega(p)$.*

Пусть резольвента Galois $g(u) = 0$ имѣетъ степень ν и пусть ея корни будутъ $\xi, \xi', \xi'', \ldots \xi^{(\nu-1)}$. Выразимъ функцію φ черезъ ξ

$$\varphi = \Phi(\xi)$$

На основаніи неизмѣняемости функціи φ при всѣхъ подстановкахъ группы Galois получимъ

$$\varphi = \Phi(\xi) = \Phi(\xi') = \ldots = \Phi(\xi^{(\nu-1)}),$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{\nu}\left[\Phi(\xi) + \Phi(\xi') + \ldots + \Phi(\xi^{(\nu-1)})\right].$$

Итакъ, φ выражается симметрической функціей отъ корней резольвенты, значитъ, эта функція есть элементъ поля $\Omega(p, t)$. Съ другой стороны, φ не заключаетъ перемѣнныхъ независимыхъ t_i, слѣдовательно, она должна быть величиною изъ $\Omega(p)$, что и требовалось доказать.

§ 18

Изъ сказаннаго вытекаетъ справедливость слѣдующихъ теоремъ самаго общаго вида, въ которыхъ неизмѣняемость функцій и ихъ принадлежность къ группѣ должна быть понимаема въ томъ или другомъ смыслѣ, судя по тому, какое уравненіе разсматривается, буквенное или численное

I. Подстановки изъ группы Galois, *не мѣняющія* (буквенно при буквенныхъ уравненіяхъ и численно при численныхъ) раціональной функціи φ отъ корней, образуютъ всегда нѣкоторую группу H.

II. Функція φ, *принадлежащая* группѣ H, являющейся настоящимъ (меньшаго порядка) дѣлителемъ группы Galois, *измѣняется* при подстановкахъ группы Galois, не входящихъ въ составъ подгруппы H, при чемъ она получаетъ новое значеніе (новый видъ при буквенныхъ уравненіяхъ и новое численное значеніе при численныхъ) при подстановкахъ сопряженной системы $H\Sigma$ и только при нихъ.

III. Функція, *не мѣняющаяся* отъ всѣхъ подстановокъ группы Galois, есть величина изъ $\Omega(p)$.

IV. Число *различныхъ* значеній функціи φ, принимаемыхъ при всѣхъ подстановкахъ группы Galois, равно индексу j подгруппы H по отношенію къ группѣ Galois.

V. Функція φ, *принадлежащая* группѣ H индекса j, есть корень уравненія степени j

$$\varphi^j + M_1\varphi^{j-1} + \ldots + M_j = 0,$$

гдѣ коэффиценты M_i принадлежатъ къ $\Omega(p)$

VI. Если функція ψ *не мѣняется* при подстановкахъ групны H другой функціи φ, то она выражается раціонально въ полѣ $\Omega(p)$ черезъ φ.

VII. Если двѣ функціи φ и ψ принадлежатъ къ одной группѣ, то каждая изъ нихъ выражается раціонально черезъ другую.

VIII. Если функція ψ принадлежитъ къ подгруппѣ K группы H другой функціи φ, то она есть корень алгебраическаго уравненія

$$\psi^\lambda + L_1\psi^{\lambda-1} + \ldots + L_\lambda = 0$$

степени λ, равной индексу подгруппы K по отношенію къ группѣ H, причемъ коэффиціенты L_i суть раціональныя въ полѣ $\Omega(p)$ функціи отъ φ.

ГЛАВА XVII.

Дальнѣйшія свойства резольвентъ. О резольвентѣ Galois.

§ 1.

Въ предыдущей главѣ мы дали опредѣленіе понятія группы Galois. Особенное значеніе имѣетъ группа Galois въ вопросѣ объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій. Оказывается, что, если уравненіе рѣшается въ радикалахъ, то его группа обладаетъ *особенными свойствами* и носитъ въ случаѣ наличности этихъ свойствъ названіе *группы разрѣшимой*. Разрѣшимость группы уравненія, или, лучше сказать, *наличность* тѣхъ *свойствъ*, по которымъ группу называютъ разрѣшимою, является условіемъ необходимымъ и достаточнымъ для возможности алгебраическаго рѣшенія уравненій. Существующее среди не спеціалистовъ алгебры нѣкоторое предубѣжденіе противъ теоріи Galois основано на недоразумѣніи. За всю столѣтнюю послѣ Galois исторію вопроса объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій не было случая, чтобы рѣшеніе уравненія въ радикалахъ не сопровождалось указаніемъ, соотвѣтствующей уравненію, группы и обратно, чтобы знаніе разрѣшимой группы не приводило къ полному рѣшенію уравненія. Поэтому изученіе группы Galois для алгебраическаго рѣшенія уравненія является не только теоріей, но и практическимъ пріемомъ для проведенія до конца выкладки рѣшенія уравненія.

§ 2.

Поставивъ въ предыдущей главѣ задачу самымъ общимъ образомъ, поведемъ однако дальнѣйшее изложеніе ближе къ обычной теоріи численныхъ уравненій, трактующей вопросъ нѣсколько ўже.

Пусть коэффиценты заданнаго уравненія

$$(1) \qquad x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

суть *опредѣленныя числа, принадлежащія* къ полю Ω, которое мы будемъ считать основнымъ. Числа основного поля мы будемъ считать числами *извѣстными.*

Въ настоящей главѣ будетъ обращено особенное вниманіе на тотъ важный фактъ, что группа Galois *зависитъ* органически отъ того *поля*, которое принято за основное. Если поле измѣняется при помощи расширенія черезъ присоединеніе новыхъ величинъ, или же мы переходимъ отъ первоначальнаго поля къ его дѣлителю, то группа уравненія *можетъ* измѣниться.

Если для нѣкотораго поля группа Galois сведется къ одной только тождественной подстановкѣ (сведется къ единицѣ), то можно сказать, что *въ такомъ полѣ заданное уравненіе рѣшается вполнѣ.* Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ каждый корень въ отдѣльности

$$x_i$$

можетъ считаться за функцію, не измѣняющуюся отъ всѣхъ подстановокъ группы Galois, ибо эта группа состоитъ изъ одной только тождественной подстановки. Итакъ, на основаніи теоремы § 17 главы XVI корень x_i долженъ принадлежать къ нашему полю. Мы предполагаемъ, что при всякомъ измѣненіи поля коэффиціенты p_i заданнаго уравненія въ немъ находятся.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ основной пріемъ приложенія теоріи Galois къ рѣшенію уравненій.

Вся задача состоитъ въ томъ, чтобы приличнымъ измѣненіемъ поля придти окончательно къ такому полю, для котораго группа Galois обращается въ единицу; тогда, очевидно, уравненіе окажется рѣшеннымъ.

§ 3.

На простомъ примѣрѣ можно показать возможность такого расширенія основного поля Ω, чтобы въ новомъ полѣ данное уравненіе (1) § 2 рѣшалось вполнѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы присоединимъ къ основному полю Ω всѣ корни $x_1, x_2, \ldots x_n$ даннаго уравненія, то, очевидно, что въ полученномъ такимъ образомъ расширенномъ полѣ

$$(1) \qquad \Omega(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

заданное уравненіе рѣшается вполнѣ. Всѣ корни x_i находятся въ этомъ

новомъ полѣ (1), припоминая же соглашеніе § 2 считать числа всякаго разсматриваемаго поля за извѣстныя, мы можемъ сказать, что всѣ корни x_i оказываются извѣстными въ новомъ полѣ.

Приведенныя соображенія могутъ съ перваго взгляда показаться тривіальными и какъ бы игрой словъ; тѣмъ не менѣе въ этихъ соображеніяхъ лежитъ глубокій смыслъ и ключъ ко всей теоріи Galois.

Припоминая теорему § 18 главы XIV, мы замѣчаемъ, что одновременное присоединеніе нѣсколькихъ алгебраическихъ чиселъ $x_1, x_2, \dots x_n$ равносильно присоединенію одного ξ, и можемъ сказать, что поле (1) есть не что иное, какъ

$$\Omega(\xi),$$

гдѣ ξ есть корень нѣкотораго неприводимаго уравненія

$$(2) \qquad g(\xi) = 0$$

съ коэффиціентами изъ поля Ω.

§ 4.

Покажемъ весьма важныя свойства вспомогательнаго уравненія (2) $g(\xi) = 0$ предыдущаго параграфа.

Такъ какъ корни $x_1, x_2, \dots x_n$ суть элементы поля (1) § 3, которое есть не что иное какъ $\Omega(\xi)$, то корни x_i будутъ раціональными функціями отъ ξ

$$x_1 = \Theta_1(\xi), \; x_2 = \Theta_2(\xi), \; \dots x_n = \Theta_n(\xi)$$

коэффиціенты всѣхъ функцій Θ_i принадлежатъ къ основному полю Ω. Съ другой стороны, величина ξ есть элементъ поля (1) § 3, значитъ,

$$(1) \qquad \xi = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

гдѣ φ раціональная функція отъ x_i съ коэффиціентами изъ поля Ω. Припоминая, какъ мы въ § 18 главы XIV указывали функцію ξ, мы придемъ къ дальнѣйшимъ весьма важнымъ замѣчаніямъ. Я повторю въ нѣсколько иныхъ выраженіяхъ соображенія § 18 главы XIV.

Функція $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ можетъ быть взята совершенно произвольно лишь бы она мѣнялась *численно* отъ всѣхъ подстановокъ корней. Такую функцію мы будемъ по примѣру § 7 главы XV называть функціей Galois. Тамъ мы разсматривали буквенную измѣняемость функціи. Теперь придется убѣдиться, что существуютъ функціи Galois при численныхъ уравненіяхъ, т. е. что существуетъ такая функція, *численныя* значенія которой получаемыя при *всѣхъ* подстановкахъ корней *всѣ* различны между собой.

Въ § 10 главы XVI мы построили линейную функцію

(2) $$t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n$$

отъ корней x_i численнаго уравненія съ коэффиціентами произвольными перемѣнными независимыми. Если всѣ корни x_i различны, то функція (2) будетъ уже функціей Galois. Въ дальнѣйшемъ мы не желаемъ разсматривать трансцендентныхъ расширеній поля при помощи перемѣнныхъ t_i, а потому надо сообразить, нельзя ли выборомъ численныхъ значеній t_i изъ поля Ω достигнуть того, чтобы выраженіе (2) оставалось функціей Galois также и при опредѣленныхъ численныхъ значеніяхъ t_i. Прилагая разсужденія § 17 главы XIV, замѣтимъ, что всегда можно задать *даже* раціональныя значенія коэффиціентамъ t_i чтобы выраженіе (2) было функціей Galois.

Единственное и вполнѣ *естественное* требованіе мы накладываемъ на заданное уравненіе, чтобы всѣ его корни были *простые*.

Пусть

(3) $$\xi,\ \xi',\ \xi'',\ \ldots\ \xi^{(N-1)}\ (N = 1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$$

будутъ выраженія получаемыя при всѣхъ подстановкахъ корней изъ

$$\xi = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n),$$

гдѣ φ есть функція Galois.

Разсмотримъ уравненіе

$$G(\eta) = (\eta - \xi)(\eta - \xi') \ldots (\eta - \xi^{(N-1)}) = \eta^N + A_1\eta^{N-1} + A_2\eta^{N-2} + \ldots,$$

въ которомъ всѣ коэффиціенты A_i, будучи симметрическими функціями корней x_i, представляютъ изъ себя элементы поля Ω.

Неприводимая функція $g(\eta)$, (см. (2) § 3) будетъ, очевидно, дѣлителемъ $G(\eta)$, ибо $G(\eta)$ имѣетъ своимъ корнемъ корень ξ функціи $g(\eta)$. Итакъ, мы видимъ, что корнями функціи $g(\eta)$ будутъ нѣкоторые изъ выраженій (3). Пусть эти корни будутъ

$$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_{r-1}.$$

Повторяя разсужденіе § 12 главы XVI, докажемъ, что *группа Galois, есть не что иное какъ группа подстановокъ x_i, соотвѣтствующихъ переходу отъ ξ въ остальныя значенія ξ_k*

$$(\xi,\ \xi),\ (\xi,\ \xi_1),\ \ldots\ (\xi,\ \xi_{r-1}).$$

Уравненіе $g(\eta) = 0$, осуществляющее своими корнями группу Galois, носитъ названіе, какъ мы уже сказали; *резольвенты Galois.*

Корни $\xi, \xi_1, \ldots \xi_{\nu-1}$ резольвенты, будучи раціональными функціями отъ корней x_i, суть элементы поля, (1) § 3, или, что одно и тоже, поля $\Omega(\xi)$; итакъ, всѣ корни резольвенты Galois выражаются раціонально черезъ одинъ изъ нихъ ξ

$$\xi = \xi, \ \xi_1 = \omega_1(\xi), \ \xi_2 = \omega_2(\xi), \ \ldots \ \xi_{\nu-1} = \omega_{\nu-1}(\xi).$$

Резюмируя все сказанное, мы можемъ характеризовать резольвенту Galois такимъ образомъ.

Резольвента Galois $g(\eta) = 0$ для уравненія $f(x) = 0$, не имѣющаго кратныхъ корней, есть уравненіе изъ той же основной области Ω, обладающее слѣдующими свойствами:

1) *Всѣ корни даннаго уравненія $f(x) = 0$ выражаются раціонально черезъ одинъ изъ корней резольвенты*

$$x_1 = \Theta_1(\xi), \ x_2 = \Theta_2(\xi), \ \ldots \ x_n = \Theta_n(\xi).$$

2) *Всѣ корни резольвенты раціонально выражаются черезъ всѣ корни заданнаго уравненія*

$$\xi = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n), \ \xi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \ \ldots \ \xi_{\nu-1} = \varphi_{\nu-1}(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

3) *Всѣ корни резольвенты раціонально выражаются черезъ одинъ изъ нихъ*

$$\xi = \xi, \ \xi_1 = \omega_1(\xi), \ \ldots \ \xi_{\nu-1} = \omega_{\nu-1}(\xi)$$

Названіе *резольвенты* дано уравненію $g(\eta) = 0$ потому, что достаточно знаніе одного изъ корней ξ этого уравненія, чтобы вполнѣ рѣшить заданное уравненіе $f(x) = 0$.

§ 5.

Резольвента Galois есть *нормальное* (см. § 20 главы XV) уравненіе, ибо всѣ ея корни выражаются раціонально черезъ ξ. Этого можно было сразу ожидать, ибо корень ξ, какъ функція Galois, принадлежитъ единичной групнѣ, единичная же група есть нормальный дѣлитель всякой другой.

Понятіе о резольвентѣ Galois заключаетъ большой произволъ, ибо все зависитъ отъ выбора функціи Galois $\xi = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Если мы выберемъ другую функцію $\varphi_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$, то эта новая функція будучи элементомъ поля $\Omega(\xi)$ будетъ раціональною функціей отъ первоначальной ξ. Такъ что новая функція $\eta = \vartheta(\xi)$ окажется корнемъ новой резольвенты Galois $g(\eta) = 0$. Эта новая резольвента происходитъ изъ первоначальной при помощи преобразованія $\eta = \vartheta(\xi)$ Tschirnhausen'a.

Итакъ, въ этой теоріи резольвенты Galois, какъ уравненія происходящія одно изъ другого при помощи преобразованія Tschirnhausen'а, считаются одной трудности въ смыслѣ рѣшенія.

Выборъ резольвенты не вліяетъ на группу Galois, ибо соотвѣтственные корни различныхъ резольвентъ связаны между собой раціонально, а потому принадлежатъ одной и той же группѣ.

§ 6.

Взглянемъ на связь группы Galois съ резольвентой еще съ другой точки зрѣнія.

Такъ какъ $\xi_i = \omega_i(\xi)$ есть корень уравненія $g(u) = 0$, то мы получимъ $g(\omega_i(\xi)) = 0$, то есть, другими словами, уравненіе $g(\omega_i(u)) = 0$ имѣетъ общій корень ξ съ неприводимымъ уравненіемъ $g(u) = 0$. На основаніи свойствъ неприводимыхъ уравненій мы замѣчаемъ, что и всякій другой корень ξ_k неприводимаго уравненія $g(u) = 0$ будетъ удовлетворять уравненію $g(\omega_i(u)) = 0$ и мы получаемъ

$$g(\omega_i(\xi_k)) = 0,$$

т. е. $\omega_i(\xi_k)$ есть также корень уравненія $g(u) = 0$

$$\omega_i(\xi_k) = \xi_l,$$

что можно написать подробнѣе такъ

(1) $$\omega_i(\omega_k(\xi)) = \omega_l(\xi).$$

Итакъ, если функціи $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{\nu-1}$ разсматривать какъ нѣкоторыя операціи, производимыя надъ аргументомъ, причемъ присоединимъ къ нимъ еще операцію $\omega_0(\xi) = \xi$ (единичную операцію), то формула (1) показываетъ, что эти операціи образуютъ группу. Эта группа, конечно, изоморфна съ группой Galois.

Транзитивныя группы и неприводимость.

§ 7.

Пусть заданное уравненіе $f(x) = 0$ степени n *приводимо* въ полѣ Ω и пусть $f_1(x)$ нѣкоторый неприводимый въ полѣ Ω множитель функціи $f(x)$. Пусть степень $f_1(x)$ есть m, гдѣ $m < n$.

Обозначимъ корни множителя $f_1(x)$ черезъ

(1) $$x_1, x_2, \ldots x_m,$$

а черезъ

(2) $$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n,$$

остальные корни уравненія $f(x) = 0$.

Обозначимъ черезъ x' одинъ изъ корней (1), а черезъ x'' одинъ изъ корней (2).

Мы имѣемъ тождество

(3) $$f_1(x') = 0.$$

Предположимъ, что группа Galois заданнаго уравненія $f(x) = 0$ *транзитивная* (см. § 37 глава V), тогда должна въ группѣ быть по крайней мѣрѣ одна подстановка Σ, переводящая корень x' въ x''.

Такъ какъ подстановки группы Galois прилагаются ко всякому соотношенію между корнями. Прилагая Σ къ соотношенію (3), получимъ

$$f_1(x'') = 0,$$

что противорѣчитъ предположенію. Итакъ мы приходимъ къ теоремѣ.

Если уравненіе неприводимо, то его группа транзитивна, въ случаѣ же приводимости группа должна быть интранзитивна.

Докажемъ теперь теорему обратную. Пусть группа уравненія интранзитивна, причемъ пусть она перемѣщаетъ между собой только корни (1), тогда функція

$$f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$$

не мѣняется при всѣхъ подстановкахъ группы Galois, значитъ, коэффиціенты $f_1(x)$ принадлежатъ полю Ω (см. § 15 главы XVI). Итакъ $f_1(x)$ оказывается множителемъ въ полѣ Ω функціи $f(x)$ и уравненіе $f(x) = 0$ приводимо. Получается окончательная теорема.

Условіемъ необходимымъ и достаточнымъ для приводимости или неприводимости уравненія является интранзитивность или транзитивность его группы.

Примитивныя группы и уравненія.

§ 8.

Въ § 38 главы V мы дали понятіе объ *импримитивности* группы. Покажемъ теперь, какими свойствами обладаетъ уравненіе, когда оно имѣетъ импримитивную группу Galois.

Для большей ясности будемъ параллельно разсматривать *три понятія:* 1) нѣкоторое *уравненіе* $f(x) = 0$ съ коэффиціентами изъ поля Ω, не

имѣющее кратныхъ корней, 2) его *группу* Galois, 3) *поле* $\Omega(\alpha)$, образованное отъ присоединенія къ полю Ω корня α уравненія $f(x)=0$

Что такое мы понимаемъ подъ импримитивностью или, обратно, примитивностью группы, было сказанно въ § 38 главы V.

Мы будемъ называть неприводимое въ полѣ Ω уравненіе $f(x)=0$ *импримитивнымъ*, если оно дѣлается приводимымъ и раскладывается на нѣсколько множителей

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)\ \ ..f_\mu(x)$$

въ расширенномъ полѣ $\Omega(\tau)$, гдѣ всѣ множители $f_i(x)$ *одной и той же степени*, а τ есть корень нѣкотораго уравненія

$$\varphi(x)=0$$

степени ν съ коэффиціентами изъ Ω.

Такъ какъ число μ должно быть дѣлителемъ степени n, то *импримитивнымъ можетъ быть только уравненіе составной степени.*

Если невозможно сведеніе рѣшенія неприводимаго уравненія $f(x)=0$, на рѣшеніе ряда уравненій $\varphi(x)=0$ и

$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ ...f_\mu(x)=0$$

такого рода, какъ было выше сказано, то уравненіе $f(x)=0$ носитъ названіе *примитивнаго.* Очевидно, что *всякое уравненіе простой степени примитивное.*

§ 9.

Введемъ теперь понятіе объ *импримитивности* поля $\Omega(\alpha)$, получаемаго отъ присоединенія къ полю Ω корня уравненія

(1) $$f(x)=0,$$

неприводимаго въ полѣ Ω.

Пусть корни уравненія (1) будутъ

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ ..\ .\alpha_{n-1}.$$

Разсмотримъ поля

(2) $$\Omega(\alpha),\ \Omega(\alpha_1),\ \Omega(\alpha_2)\ ...\ \Omega(\alpha_{n-1}).$$

Поля (2) имѣютъ общимъ дѣлителемъ Ω, основное поле, и называются полями, *сопряженными* съ полемъ $\Omega(\alpha)$.

Если уравненіе (1) нормальное (см. § 20 главы XV), то всѣ поля (2) тождественны между собой.

Можетъ существовать случай промежуточный, когда общимъ наибольшимъ дѣлителемъ полей (2) будетъ поле

$$(3) \qquad \Omega(\beta),$$

гдѣ β не заключается въ полѣ Ω.

Въ случаѣ нормальнаго уравненія поле (3) совпадаетъ съ каждымъ изъ полей (2).

Будемъ разсматривать элементы поля $\Omega(\alpha)$; эти элементы суть, очевидно, раціональныя функціи $\psi(\alpha)$.

Будемъ называть *сопряженными* величинами элемента $\psi(\alpha)$ числа

$$(4) \qquad \psi(\alpha),\ \psi(\alpha_1),\ \psi(\alpha_2) \ldots \psi(\alpha_{n-1}).$$

Если числа (4) всѣ различны между собой, то мы будемъ называть элементъ $\psi(\alpha)$ поля $\Omega(\alpha)$ *примитивнымъ элементомъ поля* $\Omega(\alpha)$.

Если среди чиселъ (4) существуютъ равныя, то элементъ $\psi(\alpha)$ носитъ названія *импримитивнаго*.

Такъ, напримѣръ, если всѣ сопряженныя значенія (4) одинаковы, то элементъ $\psi(\alpha)$ есть элементъ поля Ω, ибо въ этомъ случаѣ

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{n}[\psi(\alpha) + \psi(\alpha_1) + \ldots + \psi(\alpha_{n-1})].$$

Итакъ, во всякомъ полѣ $\Omega(\alpha)$ существуютъ импримитивные элементы изъ поля Ω.

Если кромѣ элементовъ поля Ω поле $\Omega(\alpha)$ не имѣетъ другихъ импримитивныхъ элементовъ, то поле называется примитивнымъ.

Обратно, поле $\Omega(\alpha)$ будетъ импримитивнымъ при наличности въ немъ импримитивныхъ элементовъ β, не заключающихся въ полѣ Ω.

§ 10

Покажемъ, что три данныя нами опредѣленія импримитивности группы, уравненія и поля совершенно тождественны между собой.

Начнемъ съ сопоставленія понятія объ импримитивности уравненія и его группы Galois.

Если группа уравненія $f(x) = 0$ импримитивна, то, какъ мы видѣли въ § 38 главы V, всѣ n корней уравненія $f(x) = 0$ могутъ быть расположены въ прямую матрицу

$$(1) \qquad \begin{array}{l} A = \alpha,\ \alpha_1,\ \ldots \alpha_{r-1} \\ B = \beta,\ \beta_1,\ \ldots \beta_{r-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S = \sigma,\ \sigma_1,\ \ldots \sigma_{r-1}, \end{array}$$

состоящую изъ s горизонталей ($n = rs$). Каждая изъ этихъ горизонталей состоитъ изъ корней, образующихъ систему импримитивности.

Возьмемъ симметрическую функцію $\psi(x, x_1 \ldots x_{r-1})$ такую, чтобы значенія

(2)
$$\begin{aligned} y \;&= \psi(\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}) \\ y_1 \;&= \psi(\beta, \beta_1, \ldots \beta_{r-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{s-1} &= \psi(\sigma, \sigma_1, \ldots \sigma_{r-1}) \end{aligned}$$

всѣ были *различны* между собой.

Чтобы видѣть возможность сказаннаго, возьмемъ, напримѣръ, за выраженія (2) слѣдующія

(3)
$$\begin{aligned} \psi(t, A) &= (t-\alpha)(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_{r-1}) \\ \psi(t, B) &= (t-\beta)(t-\beta_1)\ldots(t-\beta_{r-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(t, S) &= (t-\sigma)(t-\sigma_1)\ldots(t-\sigma_{r-1}) \end{aligned}$$

достаточно вмѣсто t *подобрать* такое *раціональное* значеніе, чтобы всѣ величины (3) были различны между собой.

Разсмотримъ функцію

(4)
$$\varphi(\eta) = (\eta - y)(\eta - y_1)\ldots(\eta - y_{s-1}),$$

гдѣ η перемѣнная независимая.

Такъ какъ по свойству импримитивности группа перемѣщаетъ только корни отдѣльныхъ системъ импримитивности и кромѣ того перемѣщаетъ между собой самыя системы, то всѣ коэффиціенты функціи $\varphi(\eta)$ не мѣняются и, значитъ, функція $\varphi(\eta)$ принадлежитъ полю Ω.

Величины (2) оказываются корнями уравненія

(5)
$$\varphi(\eta) = 0$$

степени s

Нетрудно видѣть, что уравненіе (5) *неприводимое*, ибо, вслѣдствіе предполагаемой *транзитивности* группы Galois, корень α можетъ переходить въ любой изъ корней $\beta_i, \ldots \sigma_i$, слѣдовательно, система A должна переходить въ любую изъ слѣдующихъ $B, \ldots S$, то есть, корни $y, y_1, \ldots y_{s-1}$ перемѣщаются *транзитивно*.

Очевидно, что, если мы обозначимъ черезъ ω произвольную симметрическую функцію корней $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}$, то разсматривая цѣлую функцію

$$\varphi(\eta)\left\{\frac{\omega}{\eta-y}+\frac{\omega_1}{\eta-y_1}+\ldots+\frac{\omega_{s-1}}{\eta-y_{s-1}}\right\}$$

съ коэффиціентами изъ Ω по способу, уже нѣсколько разъ нами примѣнявшемуся, мы покажемъ, что ω выражается раціонально черезъ y

Мы можемъ написать

(6) $$\psi(\eta, A)=\psi(\eta, y),$$

что будетъ выражать то обстоятельство, что коэффиціенты $\psi(\eta, A)$, будучи симметрическими функціями отъ $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}$ выражаются раціонально черезъ y.

Мы получаемъ

(7) $$f(x)=\psi(x, y)\psi(x, y_1)\ldots\psi(x, y_{s-1}).$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе $f(x)=0$ оказалось импримитивнымъ въ указанномъ выше смыслѣ слова.

Данныя нами опредѣленія импримитивности группы и уравненія другъ другу соотвѣтствуютъ

Покажемъ, что уравненіе $\psi(\eta, y)=0$ *неприводимо* въ полѣ $\Omega(y)$.

Корни уравненія $\psi(\eta, y)=0$, суть (см. (3)) $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}$.

Допустимъ приводимость уравненія и пусть $\psi_1(\eta, y)$ будетъ тотъ неприводимый множитель, который имѣетъ корень α.

Если мы къ соотношенію

$$\psi_1(\alpha, y)=0$$

примѣнимъ всѣ подстановки группы Galois и примемъ во вниманіе, что y симметрическая функція отъ корней $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}$, то получимъ

$$\psi_1(\alpha_i, y)=0,$$

гдѣ вслѣдствіе транзитивности группы Galois i можетъ принимать всѣ значенія $0, 1, 2, \ldots r-1$, слѣдовательно, ψ_1 совпадаетъ съ ψ и неприводимость уравненія $\psi(\eta, y)=0$ доказана.

§ 11.

Теперь остается показать, что понятіе о импримитивности группы и поля другъ другу соотвѣтствуютъ.

Разсмотримъ сопряженныя величины

$$(1)\qquad \psi(\alpha),\ \psi(\alpha_1),\ \psi(\alpha_2),\ \ldots\ \psi(\alpha_{n-1})$$

элемента $\psi(\alpha)$ поля $\Omega(\alpha)$.

Очевидно, что величина $\psi(\alpha)$ есть корень уравненія

$$(2)\qquad (t-\psi(\alpha))\ \ldots\ (t-\psi(\alpha_{n-1}))=F(t)=0,$$

получаемаго отъ преобразованія Tschirnhausen'a

$$t=\psi(x),$$

примѣненнаго къ заданному неприводимому уравненію

$$(3)\qquad f(x)=0,$$

корни котораго суть $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{n-1}$.

Посмотримъ, что можно сказать о приводимости уравненія (2).

Пусть уравненіе (2) будетъ приводимымъ и пусть $\varphi(t)$ будетъ неприводимый множитель функціи $F(t)$, у котораго предположимъ равнымъ единицѣ старшій коэффиціентъ.

Очевидно, что уравненіе $\varphi(t)=0$ удовлетворяется по крайней мѣрѣ для одной изъ величинъ (1).

Пусть, напримѣръ,

$$\varphi(\psi(\alpha))=0,$$

тогда уравненіе $\varphi(\psi(x))=0$ имѣетъ одинъ общій корень α съ уравненіемъ $f(x)=0$. Вслѣдствіе неприводимости уравненія $f(x)=0$ всѣ его корни должны обращать въ нуль функцію $\varphi(\psi(x))$ и мы получаемъ

$$(4)\qquad \varphi(\psi(\alpha))=0,\ \varphi(\psi(\alpha_1))=0,\ \varphi(\psi(\alpha_2))=0,\ \ldots\ \varphi(\psi(\alpha_{n-1}))=0..$$

Если всѣ величины (1) различны между собой, то $\varphi(t)$ совпадаетъ съ $F(t)$ и уравненіе (2) неприводимо.

Пусть $\psi(\alpha)$ будетъ *импримитивный* элементъ поля $\Omega(\alpha)$, тогда среди величинъ существуютъ *одинаковыя*. Пусть различныя между собой изъ этихъ величинъ будутъ

$$(5)\qquad \psi_1=\psi(\alpha_{i_1}),\ \psi_2=\psi(\alpha_{i_2})\ \ldots\ \psi_s=\psi(\alpha_{i_s})$$

остальныя величины пусть совпадаютъ съ одною изъ величинъ (5).

На основаніи (4) корнями неприводимаго множителя $\varphi(t)$ должны быть всѣ величины (5) и каждая, очевидно, по одному разу, ибо $\varphi(t)$ какъ функція неприводимая не можетъ имѣть кратныхъ корней.

Итакъ

$$\varphi(t) = (t - \psi_1)(t - \psi_2) \ldots (t - \psi_s).$$

Всякій другой неприводимый множитель функціи $F(t)$ долженъ совпадать съ $\varphi(t)$, ибо онъ долженъ имѣть корнемъ по крайней мѣрѣ одну изъ величинъ (5).

Итакъ, мы получаемъ

$$F(t) = [\varphi(t)]^r,$$

гдѣ $n = sr$.

§ 12

Резюмируя сказанное въ § 11, мы замѣчаемъ, что всѣ корни уравненія $f(x) = 0$ можно будетъ расположить въ s системъ

(1)
$$\begin{aligned} A &= \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1} \\ B &= \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{r-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S &= \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{r-1} \end{aligned}$$

по отношенію къ импримитивному элементу $\psi(\alpha)$ поля $\Omega(\alpha)$.

Системы (1) взяты такъ, что

(2)
$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi(\alpha) = \psi(\alpha_1) = \ldots = \psi(\alpha_{r-1}) \\ \psi_2 &= \psi(\beta) = \psi(\beta_1) = \ldots = \psi(\beta_{r-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_s &= \psi(\sigma) = \psi(\sigma_1) = \ldots = \psi(\sigma_{r-1}), \end{aligned}$$

причемъ величины (2) суть корни уравненія

$$\varphi(t) = 0$$

неприводимаго въ полѣ Ω.

Нетрудно убѣдиться, что группа Galois уравненія $f(x) = 0$ импримитивна, то есть, не отдѣляетъ корней каждой изъ системъ $A, B, \ldots S$, а каждая подстановка этой группы перемѣщаетъ лишь корни внутри каждой изъ системъ и переставляетъ сами системы.

Допустимъ обратное, что нѣкоторая подстановка S группы Galois распредѣляетъ корни одной системы по разнымъ системамъ. Пусть эта подстановка переводитъ корень α въ β, а корень α_1 въ σ.

Примѣняя подстановку S къ соотношенію

$$\psi(\alpha) = \psi(\alpha_1)$$

между корнями заданнаго уравненія, получимъ

$$\psi(\beta) = \psi(\sigma),$$

что невозможно, ибо мы предполагаемъ величины ψ_2 и ψ_3 различными между собой.

Итакъ, мы приходимъ къ теоремѣ.

Импримитивное поле $\Omega(\alpha)$ имѣетъ импримитивную группу

§ 13

Остается убѣдиться въ справедливости предложенія обратнаго, а именно, что импримитивная группа соотвѣтствуетъ импримитивному полю.

Для этой цѣли достаточно показать, что поле $\Omega(\alpha)$ будетъ имѣть импримитивные элементы, не входящіе въ составъ Ω. Другими словами, достаточно указать элементъ поля $\Omega(\alpha)$ удовлетворяющій неприводимому въ Ω уравненію, степень котораго не равна единицѣ и есть *настоящій* дѣлитель числа n.

Если группа импримитивна, то имѣютъ мѣсто соображенія § 10. Покажемъ, что величина y есть какъ разъ такой импримитивный элементъ поля $\Omega(\alpha)$, для этой цѣли достаточно убѣдиться что функція y, будучи функціей $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}$, есть въ тоже время *раціональная функція только отъ одного корня α*.

Разсмотримъ уравненіе (см. § 10)

$$\psi(\alpha, y) = 0$$

Величины

$$\psi(\alpha, y_1), \psi(\alpha, y_2), \ldots \psi(\alpha, y_{s-1})$$

отличны отъ нуля, ибо равенство $\psi(\alpha, y_1) = 0$ показывало бы, что α есть корень уравненія $\psi(t, y_1) = 0$, корни котораго суть $\beta, \beta_1, \ldots \beta_{r-1}$. Это невозможно, ибо α не совпадетъ ни съ однимъ изъ корней β_i.

Итакъ, уравненіе

(1) $$\psi(\alpha, u) = 0,$$

гдѣ u величина неизвѣстная имѣетъ одинъ только общій корень y съ уравненіемъ (4) § 10

(2) $$\varphi(u) = 0.$$

Итакъ, общій наибольшій дѣлитель функцій $\psi(\alpha, u)$ и $\varphi(u)$ будетъ $u - y$. Такъ какъ нахожденіе общаго дѣлителя при помощи алгориѳма Эвклида сопровождается только раціональными выкладками, то y выра-

зится рационально черезъ α, что и требовалось доказать. Итакъ, обратная теорема оказывается справедливой. Ее можно формулировать такъ.

Примитивное поле имѣетъ примитивную группу.

§ 14.

Докажемъ слѣдующую въ высшей степени важную для дальнѣйшаго теорему.

Теорема. *Транзитивная группа имѣетъ отличнаго отъ единицы интранзитивнаго нормальнаго дѣлителя только въ томъ случаѣ, если она импримитивна.*

Пусть транзитивная группа G имѣетъ интранзитивнаго нормальнаго дѣлителя H и пусть одна изъ системъ интранзитивности группы H будетъ

$$A - \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{\nu-1},$$

причемъ элементы этой системы связаны между собой транзитивно.

Вслѣдствіе транзитивности заданной группы G въ ней должна существовать подстановка S, переводящая элементъ α въ произвольный элементъ β. Пусть подстановка S переводитъ элементы системы A въ новые

$$B - \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\nu-1}$$

Очевидно, что должно произойти одно изъ двухъ, или системы A и B совпадаютъ, или онѣ не имѣютъ общихъ элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, группа H есть нормальный дѣлитель группы G, слѣдовательно, $S^{-1}HS = H$ и значитъ элементы B будутъ также перемѣщаться между собой подобно элементамъ α. Если существуютъ въ двухъ системахъ A и B общіе элементы, то обѣ системы должны совпадать. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что въ системѣ B существуютъ элементы какъ изъ системы A такъ и новые, мы приходимъ къ невозможному заключенію, что элементы системы A могутъ переходить въ элементы, не входящіе въ составъ системы A.

Группа G оказывается, дѣйствительно, импримитивною, причемъ *системы интранзитивности A, B, . группы H являются системами импримитивности группы G.*

Группа резольвенты.

§ 15.

Мы сказали уже, что группа уравненія зависитъ отъ основного поля Ω, теперь мы будемъ заниматься вопросомъ о томъ, какъ измѣняется группа уравненія отъ присоединенія къ полю Ω новыхъ элементовъ.

Присоединимъ къ основному полю Ω нѣкоторую функцію $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$, принадлежащую къ подгруппѣ H группы Galois заданнаго уравненія

Если положено въ основу разсужденій нѣкоторое поле Ω, то его элементы и *только* эти элементы носятъ названіе *раціональныхъ величинъ*, всякая величина, не заключающаяся въ полѣ Ω, будетъ такъ называемой *ирраціональностью*.

Понятіе объ ирраціональности есть, какъ мы видимъ, понятіе относительное и зависитъ отъ основного поля.

Функція $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ является ирраціональностью, ибо, принадлежа къ подгруппѣ группы уравненія, она не можетъ заключаться въ полѣ Ω.

Ирраціональность, подобную функціи φ, представляющую изъ себя раціональную функцію отъ корней заданнаго уравненія *съ коэффиціентами* изъ Ω мы будемъ называть *натуральною* ирраціональностью. Мы будемъ называть *побочною* ирраціональностью всякую ирраціональность другого рода. Такъ, напримѣръ, побочными ирраціональностями будутъ корни другихъ уравненій, не выражающіеся раціонально черезъ корни заданнаго, а также мы будемъ побочною ирраціональностью называть раціональную функцію отъ корней заданнаго уравненія, въ коэффиціенты которой входятъ побочныя ирраціональности.

§ 16.

Посмотримъ, что произойдетъ съ группой уравненія отъ присоединенія натуральной ирраціональности $\varphi(x_1, x_2, .. x_n)$, принадлежащей точно къ подгруппѣ H.

Покажемъ прежде всего, что *въ новомъ полѣ $\Omega(\varphi)$ заданное уравненіе будетъ имѣть H въ качествѣ группы Galois.*

Мы имѣемъ соотношеніе между корнями $x_1, x_2, \ldots x_n$ заданнаго уравненія въ новомъ полѣ

$$\varphi(x_1, x_2, .. x_n) = k, \tag{1}$$

гдѣ k величина изъ новаго поля.

Очевидно, что соотношеніе (1) *нарушается* отъ всякой подстановки, не принадлежащей группѣ H, ибо функція φ численно мѣняется. Значитъ, при новомъ полѣ изъ группы Galois должны быть *откинуты* всѣ подстановки, не входящія въ составъ H. Покажемъ теперь, что группа Galois, соотвѣтствующая новому полю будетъ какъ разъ H. Для этой цѣли надо убѣдиться, что всякая подстановка изъ H не нарушаетъ всѣхъ соотношеній между корнями съ коэффиціентами изъ новаго поля

Пусть выписаны всѣ возможныя соотношенія между корнями, какъ *прежнія*

(2) $$\lambda = 0\,,\ \kappa = 0\,,\ \ldots$$

т. е. имѣющія коэффиціентами числа основного поля Ω, такъ и *новыя*

(3) $$\lambda' = 0\,,\ \kappa' = 0\,,$$

т. е. имѣющія коэффиціентами элементы новаго поля $\Omega(\varphi)$.

Разсмотримъ одно изъ новыхъ соотношеній (3)

(4) $$\sum \Phi x_1^{\alpha_1'} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = 0\,,$$

въ которомъ коэффиціенты Φ суть раціональныя функціи отъ φ съ коэффиціентами изъ Ω. Замѣняя коэффиціенты Φ ихъ выраженіями черезъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ обратимъ соотношеніе (4) въ одно изъ (2). Это соотношеніе не нарушается отъ каждой подстановки группы H, ибо эта подстановка есть въ тоже время одна изъ подстановокъ группы Galois даннаго уравненія. Кромѣ того подстановка H не мѣняетъ, очевидно, численной величины коэффиціентовъ Φ, слѣдовательно, соотношеніе (4) разсматриваемое какъ соотношеніе вида (3), т. е. при постоянныхъ Φ не будетъ тоже нарушаться. Слѣдовательно, группа H будетъ группой Galois для новаго поля.

§ 17.

Функція φ будетъ корнемъ нѣкотораго уравненія

(1) $$F(\varphi) = 0$$

степени l, равной индексу группы H по отношенію къ первоначальной группѣ Galois.

При рѣшеніи уравненій 4-ой степени въ главѣ XV мы видѣли пользу подобныхъ уравненій (1), поэтому естественно, что уравненія, которымъ удовлетворяютъ натуральныя ирраціональности, носятъ названіе *резольвентъ*, то есть уравненій помогающихъ при рѣшеніи заданнаго.

Напомнимъ извѣстныя уже намъ свойства резольвенты (1).

1) Коэффиціенты уравненія (1) суть элементы поля Ω.

2) Всѣ корни $\varphi, \varphi_1, \varphi, \ldots \varphi_{l-1}$ уравненія (1) различны.

3) φ обращается въ φ_i при помощи подстановки изъ сопряженной системы HS_i.

4) Если группа G, соотвѣтствующая первоначальному полю, разлагается такъ

$$G = H + HS_1 + HS_2 + \ldots + HS_{l-1}\,.$$

то всѣ корни $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{l-1}$ принадлежать группамъ

$$H, \; S_1^{-1}HS_1, \; S_2^{-1}HS_2, \; \ldots S_{l-1}^{-1}HS_{l-1}.$$

Въ заключеніе покажемъ, что уравненіе (1) неприводимо въ полѣ Ω. Допустимъ обратное, а именно, что

$$F(t) = F_1(t)F_2(t).$$

Пусть $F_1(t)$ тотъ неприводимый въ Ω множитель который имѣетъ корень φ, тогда

(2) $$F_1(\varphi) = 0$$

будетъ соотношеніе между корнями $x_1, x_2, \ldots x_n$ съ коэффиціентами изъ Ω, значитъ, къ этому соотношенію примѣнимы всѣ подстановки первоначальной группы G. Примѣняя къ (2) по одной подстановкѣ изъ каждой сопряженной системы HS_i, получимъ

$$F_1(\varphi) = 0, \; F_1(\varphi_1) = 0, \; \ldots \; F_1(\varphi_{l-1}) = 0,$$

то есть, $F_1(t)$ имѣетъ всѣ корни функціи F, а, такъ какъ эти корни различны, то $F_1(t) = F(t)$ и уравненіе (1) неприводимо.

§ 18.

Найдемъ теперь группу Galois для резольвенты

$$F(t) = 0.$$

Другими словами, намъ надо указать подстановки величинъ (корней)

$$\varphi, \; \varphi_1, \; \ldots \varphi_{l-1},$$

не нарушающія всякаго существующаго между этими величинами соотношенія

(1) $$\sum \Psi \varphi^{\beta} \varphi_1^{\beta_1} \ldots \varphi_{l-1}^{\beta_{l-1}} = 0,$$

гдѣ Ψ принадлежитъ къ Ω.

Выражая соотношеніе (1) черезъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, получимъ соотношеніе, къ которому примѣнимы всѣ подстановки G. Значитъ, мы приходимъ къ такой теоремѣ.

Группа $\mathfrak{G}$ резольвенты $F(t) = 0$ состоитъ изъ подстановокъ ея корней

$$\varphi, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \; \ldots \varphi_{l-1},$$

которыя получаются, если произвести надъ корнями первоначальнаго уравненія $x_1, x_2, \ldots x_n$ всѣ подстановки группы G этого уравненія.

§ 18.

Разсмотримъ группы

$$H, S_1^{-1}HS_1, S_2^{-1}HS_2, \ldots S_{l-1}^{-1}HS_{l-1},$$

къ которымъ принадлежатъ корни

(1) $$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{l-1}$$

резольвенты.

Общее пересѣченіе R этихъ группъ есть: 1) нормальный дѣлитель (см. § 46 главы V) группы G, 2) совокупность *тѣхъ* и *только тѣхъ* подстановокъ, при которыхъ не измѣняются всѣ величины (1).

Расположимъ группу G на сопряженныя системы по подгруппѣ R, тогда получимъ

$$G = R + RT_1 + RT_2 + \ldots + RT_{q-1}.$$

Группа Galois для уравненія $F(t) = 0$ имѣетъ, очевидно, порядокъ q и состоитъ изъ тѣхъ подстановокъ, которыя производятся въ величинахъ (1) при помощи подстановокъ

$$1, T_1, T_2, \ldots T_{q-1}$$

корней $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Эта группа носитъ названіе *Hölder'овскаго дополненія* нормальнаго дѣлителя R. Мы будемъ её обозначать знакомъ дѣленія группъ

$$\frac{G}{R} \text{ или } G : R.$$

§ 19.

Начнемъ со случая, когда группа R сводится къ единицѣ. Тогда группа резольвенты будетъ $G : 1 = G$.

Если мы присоединимъ къ Ω всѣ корни $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{l-1}$ резольвенты, то группа уравненія должна понизиться до той, которая оставляетъ безъ измѣненія всѣ эти корни (каждый въ отдѣльности); но $R = 1$, слѣдовательно, присоединеніе всѣхъ корней резольвенты сводитъ группу на единицу и заданное уравненіе оказывается рѣшеннымъ.

Такія резольвенты ($R = 1$) будемъ называть *полными*, подчеркивая этимъ названіемъ ту мысль, что рѣшеніе заданнаго уравненія равносильно рѣшенію такой полной резольвенты.

Такъ какъ группой полной резольвенты является группа G заданнаго уравненія, то съ точки зрѣнія теоріи Galois рѣшеніе обоихъ урав-

ненiй является задачей одинаковой трудности. Хотя степени заданнаго уравненiя и полной резольвенты могутъ быть различны, но имъ соотвѣтствуетъ та же самая группа. Отсюда вытекаетъ, что разсмотрѣнiе полныхъ резольвентъ не подвигаетъ задачу рѣшенiя уравненiя, ибо сводитъ эту задачу на задачу ей равносильную.

§ 20.

Мы будемъ называть резольвенту частною, если группа R не сводится къ единицѣ. Въ этомъ случаѣ происходитъ пониженiе порядка группы уравненiя съ одной стороны, а съ другой стороны достигается та выгода, что группа $G:R$ резольвенты также ниже группы G первоначальнаго уравненiя.

Мы замѣчаемъ, слѣдовательно, что одновременное присоединенiе корней частной резольвенты равносильно присоединенiю одной функцiи ω принадлежащей группѣ R. Мы видѣли уже, что группа R есть нормальный дѣлитель группы G и, значитъ, ω будетъ корнемъ нормальнаго уравненiя, т. е. такого, у котораго всѣ корни выражаются рацiонально черезъ одинъ. Итакъ, отъ присоединенiя корня ω нѣкотораго нормальнаго уравненiя получается полное рѣшенiе разсматриваемой частной резольвенты. Послѣ рѣшенiя частной резольвенты и присоединенiя всѣхъ ея корней группа заданнаго уравненiя понижается до R.

§ 21.

Задача дѣлается гораздо проще, если R будетъ совпадать съ H, такъ что подгруппа H сама будетъ нормальнымъ дѣлителемъ группы уравненiя. Въ этомъ случаѣ частная резольвента будетъ уже сама нормальнымъ уравненiемъ и происходитъ пониженiе порядка группы отъ присоединенiя одного изъ ея корней.

§ 22.

Будемъ называть уравненiе *простымъ*, когда его группа простая и *составнымъ*, когда его группа составная (см. § 47 главы V) Очевидно, что простое уравненiе можетъ имѣть только полныя резольвенты, ибо простыя группы не имѣютъ отличныхъ отъ единицы нормальныхъ дѣлителей. Слѣдовательно, нельзя достигнуть пониженiя группы, какiя бы ни присоединять натуральныя иррацiональности.

Если мы возьмемъ буквенное уравненiе степени выше 4-ой, то послѣ присоединенiя знакоперемѣнной функцiи группа сводится на знакоперемѣн-

чую. Вслѣдствіе доказанной нами простоты знакоперемѣнной группы разсмотрѣніе резольвентъ не можетъ принести пользы.

§ 23.

Докажемъ теперь одну теорему относительно группы Hölder'a, которая понадобится въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Будемъ называть нормальный дѣлитель H группы G *наибольшимъ*, если не существуетъ другого нормальнаго дѣлителя $\mathfrak{G}$ заключающаго H.

Возможно существованіе у группы G нѣсколькихъ различныхъ между собой наибольшихъ нормальныхъ дѣлителей.

Теорема. *Если H есть наибольшій нормальный дѣлитель группы G, то Hölder'овская группа $G:H$ простая.*

Hölder'овскую группу можно разсматривать, какъ группу подстановокъ сопряженныхъ системъ

(1) $$H,\ HS_1,\ HS_2,\ \ldots\ HS_{i-1},$$

происходящихъ отъ умноженія справа на подстановки T группы G

$$HT,\ HS_1T,\ HS_2T,\ \ldots\ HS_{i-1}T.$$

Можно еще иначе разсуждать, если установить понятіе о *композиціи частей* группы G.

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ двѣ совокупности элементовъ группы G. Не предполагая совокупности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ непремѣнно подгруппами, мы можемъ назвать ихъ *частями* группы G.

Обозначимъ символомъ

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

совокупность выраженій

$$AB$$

гдѣ элементъ A пробѣгаетъ часть $\mathfrak{A}$, а элементъ B часть $\mathfrak{B}$.

Очевидно, что совокупность $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ будетъ новою частью группы, которая можетъ быть подгруппой или даже совпадать съ G.

Если H есть подгруппа, то, очевидно, будетъ

$$HH = H$$

Сопряженныя системы (1) будутъ частями группы G, ихъ можно будетъ считать элементами Hölder'овской группы, если подъ композиціей этой группы понимать композицію частей, ибо

$$(HS_i)(HS_k) = HHS_iS_k = HS_m.$$

Допустимъ, что группа $G:H$ не простая, а имѣетъ нормальнаго дѣлителя

(2) $$H,\ H\Sigma_1,\ H\Sigma_2,\ \ldots H\Sigma_{\lambda-1} (\lambda < l).$$

Покажемъ, что группа

(3) $$\mathfrak{G} = H + H\Sigma_1 + H\Sigma_2 + \ldots + H\Sigma_{\lambda-1}$$

будетъ тогда нормальнымъ дѣлителемъ G и, слѣдовательно, приходимъ къ противорѣчію съ требованіемъ, чтобы H былъ наибольшимъ нормальнымъ дѣлителемъ.

Группа (2) есть нормальный дѣлитель группы (1); будемъ преобразовывать ея элементы $H\Sigma_i$ при помощи произвольнаго элемента HS группы (1).

Элементъ H играетъ въ Hölder'овской группѣ роль единицы; посмотримъ, какъ для элемента HS составить ему обратный HS_0

$$HS_0HS = H,\ HHS_0S = HS_0S = H$$

и окончательно

$$HS_0 = HS^{-1}.$$

Итакъ, преобразовывая $H\Sigma_i$ при помощи HS, получимъ

(4) $$HS^{-1}H\Sigma_iHS = H\Sigma_k,$$

ибо (2) есть нормальный дѣлитель группы (1).

Равенство (4) можно переписать такъ

$$S^{-1}H\Sigma_iS = H\Sigma_k.$$

Послѣднее же равенство равносильно ряду такихъ равенствъ

(5) $$S^{-1}T_\alpha\Sigma_iS = T_\beta\Sigma_k,$$

гдѣ T_α и T_β суть элементы H

Равенства (5) показываютъ, что группа $\mathfrak{G}$ есть нормальный дѣлитель группы G.

Пониженіе группы отъ присоединеній.

§ 24.

Мы видѣли уже случаи, когда разсмотрѣніе натуральныхъ ирраціональностей не приноситъ пользы для рѣшенія уравненія. Является естественнымъ вопросъ, не могутъ ли въ такихъ случаяхъ помочь дѣлу побочныя ирраціональности. Отвѣтъ получается отрицательный, ибо можно показать что *всякое пониженіе группы при помощи присоединенія побоч-*

ной иррацiональности можетъ быть съ такимъ же успѣхомъ достигнуто присоединенiемъ натуральной.

§ 24.

Покажемъ прежде всего, что можно всегда составить рацiональную функцiю отъ корней уравненiя съ коэффицiентами изъ Ω, принадлежащую ко всякой подгруппѣ H группы Galois.

Составимъ сначала функцiю Galois V, мѣняющуюся при всѣхъ подстановкахъ. Эта функцiя, очевидно, будетъ принимать различныя значенiя при всѣхъ подстановкахъ группы Galois.

Пусть V, V_1, V_2, ... V_{q-1} суть значенiя, принимаемыя функцiей V при подстановкахъ подгруппы H.

Разсмотримъ функцiю

$$\varphi(u, x_1, x_2, \ldots x_n) = (u - V)(u - V_1)(u - V_2) \ldots (u - V_{q-1}),$$

гдѣ u новая перемѣнная независимая.

Очевидно, что функцiя φ не мѣняется отъ подстановокъ группы H, ибо отъ этихъ подстановокъ переставляются величины V_i.

Отъ различныхъ сопряженныхъ системъ HS', HS'', ... будутъ получаться уже другiя функцiи

$$\varphi' = (u - V')(u - V_1')(u - V_2') \ldots (u - V_{q-1}')$$
$$\varphi'' = (u - V'')(u - V_1'')(u - V_2'') \ldots (u - V_{q-1}'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подбираемъ u такимъ образомъ, чтобы не удовлетворялось ни одно изъ уравненiй

(1) $$\varphi - \varphi' = 0,\ \varphi - \varphi'' = 0,\ \varphi' - \varphi'' = 0, \ldots$$

Такой подборъ можно сдѣлать на безчисленное число способовъ, даже давая буквѣ u рацiональныя значенiя, ибо ни въ одномъ изъ уравненiй (1) буква, разсматриваемая какъ перемѣнная, не можетъ сократиться.

Итакъ функцiя φ *точно* принадлежитъ группѣ H.

§ 25.

Допустимъ теперь, что произошло пониженiе группы уравненiя отъ присоединенiя побочной иррацiональности ζ, которую мы будемъ предполагать корнемъ уравненiя

(1) $$F(\zeta) = 0$$

степени m съ коэффиціентами изъ поля Ω, которое для общности мы будемъ предполагать или первоначальнымъ или расширеннымъ при помощи такихъ ирраціональностей, которыя не измѣнили группы уравненія.

Введемъ въ разсмотрѣніе *резольвенту Galois*.

Пусть ξ есть функція Galois (см. § 3).

Возьмемъ основную функцію

$$G(\eta) = (\eta - \xi)(\eta - \xi') \ldots (\eta - \xi^{(N-1)}).$$

Если уравненіе имѣетъ аффектъ, то функція G приводима въ полѣ Ω. Ея неприводимый множитель $g(\eta)$ даетъ резольвенту Galois

$$g(\eta) = 0$$

Если обозначить черезъ j индексъ группы уравненія по отношенію ко всей симметрической группѣ, то нетрудно показать, что функція $G(\eta)$ раскладывается на j неприводимыхъ множителей

$$G(\eta) = g(\eta) g_1(\eta) g_2(\eta) \ldots g_{j-1}(\eta)$$

одинаковыхъ степеней.

Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, множитель $g_i(\eta)$, пусть одинъ изъ корней этого множителя будетъ $\xi^{(\alpha)}$, но, принимая во вниманіе, что $\xi^{(\alpha)}$ есть раціональная функція отъ корней x_i, а эти послѣдніе выражаются раціонально черезъ ξ, то мы получаемъ

$$\xi^{(\alpha)} = \vartheta(\xi),$$

гдѣ $\vartheta(t)$ знакъ раціональной въ Ω функціи отъ перемѣннаго независимаго t.

Итакъ, мы имѣемъ тождество

(2) $$g_i(\vartheta(\xi)) = 0$$

Примѣняя къ соотношенію (2) всѣ подстановки группы Galois, получимъ

(3) $$g_i(\vartheta(\xi)) = 0, \; g_i(\vartheta(\xi')) = 0, \ldots g_i(\vartheta(\xi^{(\nu-1)})) = 0,$$

гдѣ $\xi, \xi', \ldots \xi^{(\nu-1)}$ суть всѣ корни резольвенты Galois $g(\eta) = 0$

Соотношенія (3) показываютъ, что будетъ

$$g_i(\eta) = [\eta - \vartheta(\xi)][\eta - \vartheta(\xi')] \ldots [\eta - \vartheta(\xi^{(\nu-1)})],$$

ибо правая часть, будучи симметрической функціей корней резольвенты $g(\eta) = 0$, будетъ цѣлою въ Ω функціей степени ν отъ независимой перемѣнной η.

Итакъ, всѣ множители $g_i(\eta)$ имѣютъ одну и ту же степень ν и неприводимы на основаніи формулъ (3), поэтому за резольвенту Galois можно выбрать любой изъ нихъ

$$(4) \qquad g_i(\eta) = 0\,.$$

Покажемъ, что группа Galois не зависитъ отъ выбора значка i. Это очевидно изъ того соображенія, что переходъ отъ одного корня $\vartheta(\xi)$ новой резольвенты (4) къ другимъ ея корнямъ $\vartheta(\xi')$, $\vartheta(\xi'')$, . . . равносиленъ переходу отъ корня ξ первоначальной резольвенты къ ея другимъ корнямъ ξ', ξ'', . . .

§ 25.

Предположимъ, что присоединеніе ζ понизило группу уравненія съ G на ея подгруппу H индекса l.

Покажемъ, что при пониженіи порядка группы *неприводимая* въ первоначальномъ полѣ резольвента $g(\eta) = 0$ должна сдѣлаться *приводимою* въ новомъ полѣ. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\nu = l\mu$, гдѣ μ порядокъ подгруппы H, обозначимъ подстановки H такимъ образомъ

$$(1) \qquad [\xi,\ \xi]\,,\ [\xi,\ \xi_1]\,,\ \ldots\ [\xi,\ \xi_{\mu-1}]$$

гдѣ ξ, ξ_1, . . . $\xi_{\mu-1}$ суть нѣкоторые изъ корней $g(\eta) = 0$.

Не трудно видѣть, что въ новомъ полѣ будетъ имѣть раціональные коэффиціенты цѣлая функція

$$(2) \qquad (\eta - \xi)(\eta - \xi_1) \ldots (\eta - \xi_{\mu-1})\,,$$

ибо примѣненіе подстановокъ группы (1) не измѣняетъ функціи (2), а тогда по теоремѣ § 15 главы XVI функціи (2) имѣетъ коэффиціенты изъ новаго поля $\Omega(\zeta)$. Обозначимъ поэтому функцію (2) такъ

$$(3) \qquad g(\eta,\ \zeta)\,,$$

не забывая, что степень ея равна μ (порядку группы H). Функція (3), очевидно, неприводимая, ибо, если бы мы обозначили въ обратномъ случаѣ ея неприводимаго множителя черезъ $g_1(\eta,\ \zeta)$ причемъ того, который обращаетъ въ нуль при $\eta = \xi$, получили бы тождество

$$(4) \qquad g_1(\xi,\ \zeta) = 0$$

къ тождеству (4) можно примѣнить подстановки новой группы Galois H и мы получимъ

$$g_1(\xi\,,\ \zeta) = 0\,,\ g_1(\xi_1\,,\ \zeta) = 0\,,\ \ldots\ g_1(\xi_{\mu-1}\,,\ \zeta) = 0\,,$$

т. е. g_1 совпадаетъ съ g.

Повторяя разсужденіе § 24, замѣчаемъ, что резольвента Galois $g(\eta)=0$, распадается въ новомъ полѣ $\Omega(\zeta)$ на l неприводимыхъ множителей степени μ каждый

$$g(\eta)=g(\eta, \zeta)g_1(\eta, \zeta) \ldots g_{l-1}(\eta, \zeta),$$

приравнивая одинъ изъ этихъ множителей нулю, получаемъ новую резольвенту Galois

(5) $$g(\eta, \zeta)=0$$

для новаго поля $\Omega(\zeta)$.

Пусть множители

(6) $$g(\eta, \zeta), g_1(\eta, \zeta), \ldots g_{l-1}(\eta, \zeta)$$

соотвѣтствуютъ сопряженнымъ системамъ

(7) $$H, HS_1, \ldots HS_{l-1}.$$

Возьмемъ *натуральную* ирраціональность φ относящуюся по коэффиціентамъ къ полю Ω и принадлежащую *точно* къ группѣ H.

Пусть различныя значенія φ, относящіяся къ системамъ (7), будутъ

$$\varphi, \varphi_1', \ldots \varphi_{l-1};$$

по теоремѣ о функціяхъ относящихся къ одной и той же группѣ получимъ

$$g(\eta, \zeta)=\gamma(\eta, \varphi), g_1(\eta, \zeta)=\gamma(\eta, \varphi_1), \ldots g_{l-1}(\eta, \zeta)=\gamma(\eta, \varphi_{l-1})$$

γ есть знакъ раціональной функціи отъ φ, причемъ вслѣдствіе произвольности η функція γ остается функціей степени μ отъ η.

Функціи (6) отъ η всѣ различныя, поэтому можно подобрать такое раціональное значеніе a для η, чтобы были различными всѣ числа

$$g(a, \zeta), g_1(a, \zeta), \ldots g_{l-1}(a, \zeta)$$

Очевидно, что, если мы обозначимъ черезъ $\Phi(u)=0$ то уравненіе изъ поля Ω, которому удовлетворяетъ натуральная ирраціональность φ, то уравненіе

$$g(a, \zeta)=\gamma(a, u)$$

имѣетъ одинъ только общій корень φ съ уравненіемъ $\Phi(u)=0$; отыскивая общій наибольшій дѣлитель $u-\varphi$ двухъ уравненій при помощи послѣдовательнаго дѣленія, выразимъ φ раціонально черезъ ζ.

Итакъ, φ есть элементъ поля $\Omega(\zeta)$.

Если φ будетъ *примитивный* элементъ поля, то поле $\Omega(\zeta) = \Omega(\varphi)$, такъ что ζ есть раціональная функція отъ φ. Въ этомъ случаѣ ζ есть *натуральная* ирраціональность и мы имѣемъ $m = l$.

Если ζ будетъ *побочною* ирраціональностью, то φ будетъ *импримитивнымъ* элементомъ поля $\Omega(\zeta)$. На основаніи сказаннаго въ § 10 получаемъ

$$m = l\lambda\,, \tag{8}$$

гдѣ λ цѣлое число.

Если число m простое, то уравненіе (8) возможно лишь въ случаѣ $\lambda = 1$ и мы приходимъ къ теоремѣ, которую мы примѣнимъ въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Если группа понижается отъ присоединенія корня ζ простой степени, то ζ есть натуральная ирраціональность

§ 26.

Резюмируя сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, приходимъ къ теоремѣ.

I. *Всякое возможное пониженіе группы Galois можно произвести присоединеніемъ натуральной ирраціональности*

II. *Если l есть индексъ пониженной группы по отношенію къ первоначальной, то пониженіе возможно только черезъ присоединеніе корня уравненія, степень котораго есть число кратное l.*

III. *Если степень уравненія есть l, то присоединяемый его корень есть натуральная ирраціональность.*

§ 27.

Въ заключеніе дадимъ еще одно болѣе простое доказательство теоремы § 32 главы XIII.

Пусть α, β суть корни двухъ неприводимыхъ въ Ω уравненіи.

Поле $\Omega(\alpha, \beta)$ получается, или отъ присоединенія къ полю $\Omega(\alpha)$ корня β, или же отъ присоединенія къ полю $\Omega(\beta)$ корня α.

Если отъ присоединенія къ полю $\Omega(\alpha)$ корня β получится импримитивное поле, то таково же будетъ поле, получаемое отъ присоединенія α къ полю $\Omega(\beta)$.

§ 28.

Теорема. *Если группа G подстановокъ корней заданнаго уравненія обладаетъ двойнымъ свойствомъ: 1) каждая изъ ея подстановокъ не нарушаетъ всѣхъ соотношеній между корнями и 2) функція, не измѣняющаяся отъ всѣхъ подстановокъ G, есть элементъ основного поля; то группа G есть группа Galois для заданнаго уравненія.*

Изъ перваго свойства слѣдуетъ, что группа G является дѣлителемъ группы Galois. Остается убѣдиться, что второе свойство влечетъ какъ слѣдствіе тождественность группы G съ группой Galois. Возьмемъ функцію ξ (см. § 3 главы XVII) и пусть ея значенія, соотвѣтствующія подстановкамъ G, будутъ

(1) $$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots \xi_{m-1}.$$

Тогда цѣлая функція

$$g(t) = (t-\xi)(t-\xi_1)\ldots(t-\xi_{m-1})$$

будетъ, *дѣйствительно*, резольвентой Galois, ибо на основаніи второго свойства функція $g(t)$ принадлежитъ къ основному полю. Она неприводима въ этомъ полѣ, ибо величины (1) измѣняются транзитивно отъ подстановокъ группы G.

ГЛАВА XVIII.

Классическіе виды уравненій, рѣшаемыхъ въ радикалахъ.

Нормальныя уравненія.

§ 1.

Въ слѣдующей главѣ мы докажемъ теорему Abel'а, что буквенныя уравненія выше четвертой степени не рѣшаются въ радикалахъ. Такъ какъ рѣшимость въ радикалахъ, какъ мы въ слѣдующей главѣ увидимъ, связана неразрывно съ извѣстными свойствами группы уравненія, то теорему Abel'а можно будетъ формулировать такъ: *уравненія выше четвертой степени и безъ аффекта не рѣшаются въ радикалахъ*.

Является задачей первостепенной важности указать на *численныя* уравненія, *имѣющія аффектъ* и рѣшающіяся въ радикалахъ. Въ настоящей главѣ мы будемъ разсматривать наиболѣе важные виды уравненій, рѣшающихся въ радикалахъ.

§ 2

Мы назвали *нормальнымъ* неприводимое уравненіе, всѣ корни котораго выражаются раціонально черезъ одинъ изъ нихъ.

Разсмотримъ конструкцію группы нормальнаго уравненія.

Если мы обозначимъ черезъ G_0 подгруппу группы G неприводимаго уравненія, оставляющую на мѣстѣ корень x_0, то получимъ слѣдующее разложеніе на сопряженныя системы

$$G = G_0 + G_0S_1 + G_0S_2 + \dots + G_0S_{n-1},$$

гдѣ S_1 подстановка, переводящая корень x_0 въ x_1, S_2 переводитъ x_0 въ x_2, и такъ далѣе, наконецъ, S_{n-1} переводитъ x_0 въ x_{n-1}.

Такъ какъ группа неприводимаго уравненія *транзитивна*, то подстановки $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$ должны въ ней существовать.

Итакъ, мы приходимъ къ теоремѣ.

Группа неприводимаго уравненія имѣетъ порядокъ, дѣлящійся на степень n уравненія.

Если мы эту теорему желаемъ высказать относительно группъ подстановокъ безъ связи съ уравненіями, то получаемъ слѣдующую формулировку.

Порядокъ всякой транзитивной группы подстановокъ дѣлится на число переставляемыхъ элементовъ.

§ 3.

Если неприводимое уравненіе *нормально*, то подгруппа G_0, оставляющая безъ измѣненія корень x_0, *должна сводиться къ единичной подстановкѣ*, ибо при неизмѣнности корня x_0 должны оставаться безъ измѣненія и остальные корни $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, выражающіеся раціонально черезъ x_0. Группа уравненія будетъ состоять, слѣдовательно, изъ подстановокъ

$$G = 1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1},$$

и мы приходимъ къ теоремѣ.

Группа нормальнаго уравненія имѣетъ порядокъ, равный степени уравненія.

Abel'евы уравненія.

§ 4.

Опредѣленіе. Мы назовемъ Abel'евымъ всякое уравненіе n-ой степени $f(x) = 0$, *если каждый изъ корней его выражается раціонально черезъ одинъ. Причемъ, если это раціональное выраженіе имѣетъ видъ*

$$x_1 = \mathfrak{D}_1(x_0), \; x_2 = \mathfrak{D}_2(x_0), \; \ldots \; x_{n-1} = \mathfrak{D}_{n-1}(x),$$

то между функціями $\mathfrak{D}_i$ *должна существовать зависимость*

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_i[\mathfrak{D}_k(x_0)] = \mathfrak{D}_k[\mathfrak{D}_i(x_0)],$$

имѣющая мѣсто для каждыхъ двухъ функцій $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}_k$.

Конечно, коэффиціенты раціональныхъ функцій $\mathfrak{D}_i$ должны принадлежать къ нѣкоторому основному полю Ω.

Такъ, напримѣръ, уравненіе $x^n - 1 = 0$ дѣленія круга есть Abel'ево при основномъ полѣ раціональныхъ чиселъ, ибо, если мы обозначимъ

черезъ r первообразный корень, то всякій другой корень будетъ имѣть видъ $\mathfrak{D}_i(r) = r^i$ и, слѣдовательно, соотношеніе (1) удовлетворяется

$$\mathfrak{D}_i\mathfrak{D}_k(r) = \mathfrak{D}_k\mathfrak{D}_i(r) = r^{ik}.$$

Подобнымъ же образомъ всякое двучленное уравненіе

$$x^n - a = 0 \tag{2}$$

будетъ Abel'евымъ, если основное поле Ω заключаетъ корни n-ой степени изъ единицы. Обозначая первообразный изъ этихъ корней черезъ r, мы можемъ сказать, что корни уравненія (2) выражаются раціонально черезъ одинъ

$$\mathfrak{D}_i(x_0) = r^i x_0$$

и соотношеніе (1) имѣетъ мѣсто

$$\mathfrak{D}_i\mathfrak{D}_k(x_0) = \mathfrak{D}_k\mathfrak{D}_i(x_0) = r^{i+k}\cdot x_0 .$$

§ 5.

Покажемъ теперь, что группа Abel'ева уравненія коммутативная [1])

Пусть $\varphi(x)$ будетъ неприводимый множитель первой части $f(x)$ Abel'ева уравненія, причемъ этотъ множитель тотъ, которому удовлетворяетъ корень x_0. Пусть остальные корни функціи $\varphi(x)$ будутъ $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$. Тогда мы имѣемъ по опредѣленію

$$x_1 = \mathfrak{D}_1(x_0),\ x_2 = \mathfrak{D}_2(x_0),\ \ldots\ x_{m-1} = \mathfrak{D}_{m-1}(x_0).$$

Уравненіе $\varphi(x) = 0$, будучи нормальнымъ, имѣетъ группу, состоящую изъ преобразованій

$$\Sigma_0 = (x_0 x_0),\ \Sigma_1 = (x_0 x_1),\ \ldots\ \Sigma_{m-1} = (x_0 x_{m-1}).$$

Эта группа, очевидно, коммутативная, ибо

$$\Sigma_i = (x_0,\ x_i) = [x_0,\ \mathfrak{D}_i(x_0)]$$

$$\Sigma_k = (x_0,\ x_k) = [x_0,\ \mathfrak{D}_k(x_0)] .$$

Отсюда

$$\Sigma_i\Sigma_k = [x_0,\ \mathfrak{D}_i(x_0)]\ [\mathfrak{D}_i(x_0),\ \mathfrak{D}_i\mathfrak{D}_k(x_0)] = [x_0,\ \mathfrak{D}_i\mathfrak{D}_k(x_0)]$$

$$\Sigma_k\Sigma_i = [x_0,\ \mathfrak{D}_k(x_0)]\ [\mathfrak{D}_k(x_0),\ \mathfrak{D}_k\mathfrak{D}_i(x_0)] = [x_0,\ \mathfrak{D}_k\mathfrak{D}_i(x_0)] .$$

[1]) Отсюда происходитъ названіе Abel'евой группы. Надо принять, кромѣ того, въ соображеніе, что Abel'ево уравненіе нормальное, и слѣдовательно, его резольвентой является одинъ изъ его неприводимыхъ множителей.

На основанiи (1) § 4 получимъ

$$\Sigma_i \Sigma_k = \Sigma_k \Sigma_i$$

и группа оказывается, дѣйствительно, коммутативною.

§ 6.

Теорема. *Неприводимое уравненiе $\varphi(x) = 0$ съ коммутативною группой будетъ Abel'евымъ.*

Пусть G_0 будетъ подгруппа группы нашего уравненiя, оставляющая безъ измѣненiя корень x_0. На основанiи транзитивности группы G Galois имѣемъ

$$G = G_0 + G_0 S_1 + G_0 S_2 + \ldots + G_0 S_{n-1},$$

гдѣ подстановка S_i перемѣщаетъ корень x_0 въ x_i.

Очевидно, что группа, оставляющая корень x_i безъ перемѣны, будетъ (см. § 19, глава XV)

$$S_i^{-1} G_0 S_i.$$

На основанiи коммутативности группы G имѣемъ

$$S_i^{-1} G_0 S_i = S_i^{-1} S_i G_0 = G_0,$$

то есть, группа G_0 не мѣняетъ также x_i. Такъ какъ значекъ i взятъ произвольно, то группа G_0 не мѣняетъ всѣхъ корней и сводится къ единицѣ.

Итакъ, группа Galois заданнаго уравненiя будетъ

$$1, S_1, S_2, \ldots S_{n-1}.$$

Если мы присоединимъ къ основному полю Ω корень x_0 уравненiя $\varphi(x) = 0$, то группа должна сводиться къ единицѣ, значитъ, въ полѣ $\Omega(x_0)$ должны заключаться всѣ остальные корни.

Уравненiе $\varphi(x) = 0$ оказывается нормальнымъ и является своей собственной резольвентой Galois.

Если мы положимъ $x_i = \mathfrak{D}_i(x_0)$, то группа Galois будетъ состоять изъ подстановокъ

$$\Sigma_i = [x_0, \mathfrak{D}_i(x_0)]$$

Мы имѣемъ

$$\Sigma_i \Sigma_k = [x_0, \mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_k(x_0)], \quad \Sigma_k \Sigma_i = [x_0, \mathfrak{D}_k \mathfrak{D}_i(x_0)];$$

вслѣдствiе коммутативности группы получаемъ

$$\mathfrak{D}_i \mathfrak{D}_k(x_0) = \mathfrak{D}_k \mathfrak{D}_i(x_0)$$

и уравненiе Abel'ево.

§ 7.

Приводимое уравненіе съ коммутативной группой можетъ и не быть Abel'евымъ. Мы приходимъ къ теоремѣ.

Если приводимое уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ коммутативную группу, то всякій неприводимый множитель φ функціи $f(x)$ даетъ Abel'ево уравненіе $\varphi=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть группа заданнаго уравненія $f(x)$ есть G. Мы получимъ группу уравненія $\varphi(x)=0$, если разсмотримъ совокупность G' подстановокъ, которыя происходятъ среди корней $\varphi(x)=0$ отъ примѣненія подстановокъ группы G. Очевидно, что если группа G коммутативна, то такова же и группа G'.

Сведеніе Abel'евыхъ уравненій на циклическія.

§ 8.

Мы видѣли уже, что въ транзитивной Abel'евой группѣ не существуетъ кромѣ единицы другой подстановки, оставляющей безъ измѣненія одинъ изъ корней. Разсмотримъ разложеніе подстановки S Abel'евой группы на циклы.

$$S=C_1C_2\ .\ .\ .\ C_s;$$

пусть C_1 есть циклъ, порядокъ котораго r не выше порядковъ другихъ цикловъ. Въ нашей группѣ должна существовать подстановка

$$S^r=C_1{}^rC_2{}^r\ .\ .\ .\ C_s{}^r.$$

Но $C_1{}^r=1$ и не мѣняетъ корней, входящихъ въ составъ цикла C_1, слѣдовательно, $S^r=1$. То есть, всѣ циклы S должны имѣть одинъ и тотъ же порядокъ r и мы приходимъ къ теоремѣ.

Всякая подстановка, входящая въ составъ транзитивной Abel'евой группы должна быть правильною (см. § 15 главы V).

§ 9.

Итакъ, разсмотримъ одну изъ подстановокъ

$$S=C_1C_2\ \ .\ .\ C_s$$

разсматриваемой группы заданнаго Abel'ева уравненія $f(x)=0$, гдѣ циклы

C_i суть

$$C_1 = (\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{r-1})$$

$$C_2 = (\beta, \beta_2, \ldots \beta_{r-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_s = (\sigma, \sigma_1, \ldots \sigma_{r-1}) \quad (\alpha_i, \beta_i, \ldots \sigma_i \text{ суть корни } x_0 x_1 \ldots x_{n-1}).$$

Въ § 20 главы V мы видѣли, что всякая другая подстановка T нашей группы, перестановочная, слѣдовательно, съ S, должна производить только циклическое перемѣщеніе буквъ каждаго цикла C_i и подстановку самихъ цикловъ. Такъ какъ при этомъ не будетъ происходить смѣшенія буквъ различныхъ цикловъ, то при $s > 1$ группа нашего уравненія будетъ, очевидно, *импримитивная*.

§ 10.

Функцію $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r)$ мы будемъ называть *циклическою*, если она не измѣняется отъ циклической подстановки $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r)$.

Обозначимъ

(1) $\omega = \omega(\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}), \ \omega_1 = \omega(\beta, \beta_1, \ldots \beta_{r-1}) \ldots \omega_{s-1} = \omega(\sigma, \sigma_1, \ldots \sigma_{r-1})$

Эти величины суть корни уравненія

$$F(\eta) = 0 \tag{2}$$

степени s, коэффиціенты котораго, будучи симметрическими функціями отъ величинъ $\omega, \omega_1, \ldots \omega_{s-1}$, не мѣняются при всѣхъ подстановкахъ группы Galois заданнаго Abel'ева уравненія. Итакъ, это уравненіе (2) есть уравненіе въ полѣ Ω. На основаніи соображеній § 9 главы XVII оно будетъ неприводимо.

Группой уравненія (2) будетъ совокупность подстановокъ величинъ (1) при примѣненіи къ нимъ подстановокъ S_i группы заданнаго уравненія. Коммутативность группы заданнаго уравненія влечетъ, очевидно, за собой коммутативность группы уравненія (2)

Итакъ, уравненіе (2) есть Abel'ево, ибо оно неприводимое и имѣетъ коммутативную группу.

Присоединеніе къ основному полю Ω величины ω разбиваетъ заданное уравненіе на s множителей

$$f(x) = f(x, \omega) f(x, \omega_1) \ldots f(x, \omega_{s-1}) = 0.$$

Уравненіе $f(x, \omega) = 0$ имѣетъ корни $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{r-1}$ причемъ его группа состоитъ изъ періода одного цикла

$$C_1 = (\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{r-1}).$$

Тоже самое относится и къ другимъ множителямъ. Корни $f(x, \omega_1) = 0$ будутъ $\beta, \beta_1, \dots \beta_{r-1}$ и такъ далѣе.

§ 11.

Мы будемъ называть *циклическимъ* уравненіе, когда его группа состоитъ изъ *степеней одного цикла.*

Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что первоначальное Abel'ево уравненіе $f(x) = 0$ степени $n = rs$ привелось къ рѣшенію одного Abel'ева уравненія $F(\eta) = 0$ степени s и ряда циклическихъ уравненій $f(x, \omega_1) = 0$ степени r. Мы можемъ подобнымъ же образомъ свести задачу рѣшенія Abel'ева уравненія $F(\eta) = 0$, степени $s = s_1 s_2$ на рѣшеніе Abel'ева уравненія степени s_1 и на рѣшеніе s_1 циклическихъ уравненій степени s_2.

Продолжая далѣе, мы можемъ придти къ рѣшенію *Abel'ева уравненія простой степени* p, которое будетъ само *циклическимъ,* ибо можно доказать теорему.

Всякое нормальное уравненіе простой степени есть циклическое.

Пусть S есть одна изъ отличныхъ отъ единицы подстановокъ группы такого уравненія. Порядокъ подстановки S долженъ быть дѣлителемъ порядка группы. Порядокъ же группы есть простое число, равное степени p уравненія. Единственнымъ дѣлителемъ p отличнымъ отъ единицы является само число p, слѣдовательно, группа уравненія состоитъ изъ степеней $1, S, S^2, \dots S^{p-1}$ и уравненіе циклическое.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему окончательному выводу.

Рѣшеніе Abel'ева уравненія приводится къ рѣшенію ряда циклическихъ, степени которыхъ суть дѣлители степени заданнаго Abel'ева уравненія.

§ 12.

Покажемъ теперь, *что можно привести циклическое уравненіе составной степени къ рѣшенію ряда циклическихъ уравненій простой степени.*

Возьмемъ нѣкоторое циклическое уравненіе $f(x) = 0$ составной степени $n = ef$, его группа G состоитъ изъ степеней одного цикла

$$S = (x_0, x_1, \dots x_{n-1}).$$

Подстановка S^e распадается на e цикловъ порядка f

$$S^e = C_0 C_1 C_2 \dots C_{e-1}$$

гдѣ

$$C_0 = (x_0, x_e, x_{2e}, \ldots x_{(f-1)e})$$

$$C_1 = (x_1, x_{e+1}, x_{2e+1}, \ldots x_{(f-1)e+1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{e-1} = (x_{e-1}, x_{2e-1}, x_{3e-1}, \ldots x_{n-1}).$$

Возьмемъ циклическую функцію $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_f)$ и обозначимъ

$$\eta = \omega(x_0, x_e, x_{2e}, \ldots x_{(f-1)e})$$

(1) $$\eta_1 = \omega(x_1, x_{e+1}, x_{2e+1}, \ldots x_{(f-1)e+1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_{e-1} = \omega(x_{e-1}, x_{2e-1}, x_{3e-1}, \ldots x_{n-1}).$$

Величины $\eta, \eta_1, \ldots \eta_{e-1}$ всѣ различны между собой, ибо онѣ суть корни неприводимаго въ Ω уравненія

(2) $$F(t) = (t-\eta)(t-\eta_1)\ldots(t-\eta_{e-1}) = 0$$

степени e. Неприводимость уравненія (2) слѣдуетъ изъ транзитивности группы G, ибо корень x_0 переходитъ въ x_i отъ подстановки S^i, значитъ, η должна переходить во всѣ остальныя величины (1).

Что коэффиціенты уравненія (2) находятся въ полѣ Ω, слѣдуетъ изъ того соображенія, что подстановка S производитъ циклическое перемѣщеніе величинъ $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$. *Уравненіе (2) циклическое.*

Всѣ величины η_i выражаются раціонально черезъ одну изъ нихъ, напримѣръ, η, такъ что присоединеніе къ полю Ω величины η_i равносильно присоединенію всѣхъ остальныхъ. Сказанное слѣдуетъ изъ того, что всякое *циклическое* уравненіе есть въ тоже время *Abel'ево.*

Въ полѣ $\Omega(\eta)$ заданное уравненіе $f(x) = 0$ разбивается на e множителей

$$f(x) = f(x, \eta)f(x, \eta_1)\ldots f(x, \eta_{e-1}) = 0,$$

гдѣ

$$f(x, \eta_i) = (x - x_i)(x - x_{e+i})\ldots(x - x_{(f-1)e+i}).$$

Каждое изъ уравненій

$$f(x, \eta_i) = 0$$

есть циклическое, ибо его группа Galois состоитъ изъ степеней цикла C_i.

Резюмируя сказанное, приходимъ къ заключенію, *что всякое циклическое уравненіе степени n приводится къ рѣшенію ряда циклическихъ уравненій, степени которыхъ суть простые множители числа n*

Если степень n есть 2^k, то рѣшеніе приведетъ къ формулѣ заключающей только квадратные радикалы. Такимъ путемъ была рѣшена Gauss'омъ [1]) задача построенія правильнаго 17-ти угольника, или иначе, задача дѣленія окружности на 17 равныхъ частей.

§ 13.

Перейдемъ теперь къ доказательству возможности рѣшенія въ радикалахъ циклическаго уравненія простой степени. Такимъ путемъ будетъ доказано, что всякое Abel'ево уравненіе рѣшается въ радикалахъ

Методъ Lagrange'a рѣшенія циклическихъ уравненій.

§ 14

отримъ функцію

(1) $$(\varepsilon, x_0) = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^{n-1} x_{n-1},$$

гдѣ n есть нѣкоторое простое число, ε первообразный корень n-ой степени изъ единицы, а $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}$ суть корни заданнаго циклическаго уравненія степени n.

Отъ примѣненія къ функціи (1) циклической подстановки

$$S = (x_0 . x_1 . x_2 \ldots x_{n-1})$$

эта функція получаетъ, очевидно, множителя ε^{-1}, то есть, она обращается послѣ подстановки въ величину

$$\varepsilon^{-1}(\varepsilon, x_0).$$

Изъ сказаннаго вытекаетъ, что функція

(2) $$(\varepsilon, x_0)^n$$

не мѣняется отъ подстановокъ группы заданнаго уравненія

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы покажемъ, что всякій корень ε простой степени n изъ единицы выражается въ радикалахъ. Присоединимъ теперь къ полю Ω корень ε и будемъ разсматривать новое поле $\Omega(\varepsilon)$.

Такъ какъ въ формулѣ (2) безразлично, который изъ первообразныхъ корней взять за ε, то мы можемъ ε замѣнить на ε^r. На основаніи неизмѣнности величины (2) отъ подстановокъ x_i группы даннаго уравненія замѣчаемъ, что величина (2) есть элементъ поля $\Omega(\varepsilon)$

[1]) Gauss. Disquisitiones arithmeticae. Sectio VII.

Мы получаемъ, слѣдовательно,

$$(\varepsilon^r, x_0)^n = B_r,$$

гдѣ B_r есть элементъ поля $\Omega(\varepsilon)$, то есть, на основаніи сказаннаго величина, выражающаяся въ радикалахъ.

Мы приходимъ къ равенствамъ

$$
\begin{array}{ll}
& (1, x_0) = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = -a_1 \\
& (\varepsilon, x_0) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^{n-1} x_{n-1} = \sqrt[n]{B_1} \\
(3) & (\varepsilon^2, x_0) = x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^4 x_2 + \ldots + \varepsilon^{2(n-1)} x_{n-1} = \sqrt[n]{B_2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (\varepsilon^{n-1}, x_0) = x_0 + \varepsilon^{n-1} x_1 + \varepsilon^{2(n-1)} x_2 + \ldots + \varepsilon^{(n-1)^2} x_{n-1} = \sqrt[n]{B_{n-1}}
\end{array}
$$

гдѣ a_1—коэффиціентъ заданнаго уравненія при неизвѣстномъ въ степени $n-1$.

Принимая во вниманіе очевидное равенство

$$1 + \varepsilon^r + \varepsilon^{2r} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)r} = \frac{\varepsilon^{nr} - 1}{\varepsilon^r - 1} = 0 \quad (r < n)$$

и складывая наши уравненія (3), мы получаемъ

$$nx_0 = -a_1 + \sqrt[n]{B_1} + \sqrt[n]{B_2} + \ldots + \sqrt[n]{B_{n-1}}. \tag{4}$$

Подобнымъ образомъ, умножая уравненія (3) на $1, \varepsilon^{-r}, \varepsilon^{-2r}, \ldots \varepsilon^{-(n-1)r}$ и складывая, находимъ

$$nx_r = -a_1 + \varepsilon^{-r} \sqrt[n]{B_1} + \varepsilon^{-2r} \sqrt[n]{B_2} + \ldots + \varepsilon^{-(n-1)r} \sqrt[n]{B_{n-1}}. \tag{5}$$

Итакъ, корни x_r заданнаго циклическаго уравненія выражаются въ радикалахъ.

§ 15.

Рѣшеніе въ радикалахъ циклическаго уравненія простой степени, данное въ предыдущемъ параграфѣ, заслуживаетъ нѣкотораго весьма важнаго добавленія.

Съ перваго взгляда можетъ показаться, что въ уравненіи (5) предыдущаго параграфа слишкомъ много радикаловъ, но не трудно убѣдиться,

что всѣ радикалы $\sqrt[n]{B_i}$ выражаются раціонально черезъ одинъ изъ нихъ, напримѣръ, $\sqrt[n]{B_1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе

$$(1) \qquad (\varepsilon^r,\ x_0)(\varepsilon,\ x_0)^{n-r}$$

не мѣняется отъ подстановки группы G, ибо подстановка S соотвѣтствуетъ, какъ было сказано, умноженію функціи $(\varepsilon,\ x_0)$ на ε^{-1} и, слѣдовательно, функція (1) получаетъ множителя

$$\varepsilon^{-r}.(\varepsilon^{-1})^{n-r} = \varepsilon^{-n} = 1 .$$

Итакъ, выраженіе (1) должно быть элементомъ C_r поля $\Omega(\varepsilon)$.

Мы получаемъ

$$(\varepsilon^r,\ x_0)(\varepsilon,\ x_0)^{n-r} = C_r,$$

т. е.

$$\sqrt[n]{B_r}.\sqrt[n]{B_1}^{n-r} = C_r,$$

или окончательно

$$\sqrt[n]{B_r} = \frac{C_r}{B_1}(\sqrt[n]{B_1})^r .$$

Значитъ, мы получаемъ слѣдующее выраженіе для корня

$$(2) \qquad x_r = \frac{1}{n}\Big\{ -a_1 + \varepsilon^{-r}\sqrt[n]{B_1} + \varepsilon^{-2r}\frac{C_2}{B_1}(\sqrt[n]{B_1})^2 + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^{-(n-1)r}\frac{C_{n-1}}{B_1}(\sqrt[n]{B_1})^{n-1}\Big\}.$$

Это выраженіе заключаетъ одинъ только радикалъ $\sqrt[n]{B_1}$ и, слѣдовательно, давая радикалу n его различныхъ значеній получимъ всѣ n корней заданнаго циклическаго уравненія.

§ 16.

Такъ какъ величина B_1 находится въ знаменателяхъ дробныхъ выраженій формулы (2) § 15, то нужно показать, что она не равна нулю Другими словами надо показать, что выборомъ первообразнаго корня ε можно сдѣлать B_1 отличнымъ отъ нуля.

Мы имѣемъ, очевидно,

$$nx_0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}(\varepsilon^\lambda,\ x_0),\quad nx_k = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\varepsilon^{-\lambda k}(\varepsilon^\lambda,\ x_0).$$

Откуда

$$n(x_k - x_0) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=(n-1)} (\varepsilon^{-\lambda k} - 1)(\varepsilon^{\lambda}, x_0).$$

Всѣ функціи $(\varepsilon^{\lambda}, x_0)$ не могутъ равняться нулю, ибо тогда было бы $x_k = x_0$, что противорѣчитъ неприводимости заданнаго циклическаго уравненія.

Значитъ, при нѣкоторомъ значеніи λ_0 функція $(\varepsilon^{\lambda_0}, x_0)$ отлична отъ нуля, эту то функцію и можно принять за B_1, а за ε взять ε^{λ_0}.

§ 17.

Нетрудно видѣть, что рѣшеніе циклическаго уравненія, приведенное въ §§ 14, 15, 16 сохраняется во всѣхъ деталяхъ и при n — составномъ.

Въ этомъ случаѣ можно убѣдиться также, что выборомъ первообразнаго корня ε можно достигнуть неравенства нулю выраженія B_1.

Доказательство этого обстоятельства при n — составномъ было дано Weber'омъ [1]).

Розельвенты Lagrange'a.

§ 18.

Розельвентами Lagrange'a называются выраженія

$$(\varepsilon, x_0) = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^{m-1} x_{m-1},$$

гдѣ ε есть *произвольный* корень m-ой степени изъ единицы

Мы имѣемъ

$$\sum_{\varepsilon} \varepsilon^k = m,$$

или

$$\sum_{\varepsilon} \varepsilon^k = 0,$$

гдѣ суммы распространены на всѣ корни ε m-ой степени изъ единицы. Причемъ сумма будетъ равна m, если k дѣлится на m и равняться нулю, если k не дѣлится на m. (См § 6 главы IX).

Отсюда, какъ мы видѣли раньше, получаемъ

$$mx_0 = \sum_{\varepsilon} (\varepsilon, x_0)$$

(1)

$$mx_k = \sum_{\varepsilon} \varepsilon^{-k} (\varepsilon, x_0)$$

---

[1]) Weber. Lehrbuch der Algebra. 1898. B I, S. 590.

Если ε — первообразный корень, то формулы (1) можно переписать такъ

(2)
$$mx_0 = \sum_\lambda (\varepsilon^\lambda\,,\; x_0)$$
$$mx_k = \sum_\lambda \varepsilon^{-\lambda k}(\varepsilon^\lambda,\; x_0)\,.$$

Итакъ, мы видимъ, что, если резольвенты Lagrange'a извѣстны, то извѣстны также и легко опредѣляются и корни по формуламъ (1) и (2).

§ 19.

Резольвенты Lagrange'a представляютъ изъ себя весьма важный алгорифмъ для вычисленія функцій отъ корней, обладающихъ извѣстными свойствами.

Итакъ, будемъ резольвенту обозначать

$$(\varepsilon\,,\; x_0) = \sum_{h=0}^{h=m-1} \varepsilon^h x_h\,;$$

причемъ во всемъ дальнѣйшемъ будемъ употреблять обозначеніе x_i корня также въ томъ случаѣ, когда число $i > m$; причемъ будемъ писать

$$x = x_0 = x_m\,,$$

$$x_h = x_k\,,$$

если $h \equiv k \pmod m$; т. е. другими словами, если значки образуютъ одинъ классъ по модулю m, то соотвѣтствующіе имъ корни—одинаковы.

Мы видѣли уже, что циклическая подстановка

$$S = (x_h\,,\; x_{h+1}\,,\; \ldots\; x_{m+h-1})$$

переводитъ резольвенту

$$(\varepsilon\,,\; x) \text{ въ } \varepsilon^{-1}(\varepsilon\,,\; x)\,.$$

Очевидно, что подстановка S^k переведетъ резольвенту

$$(\varepsilon\,,\; x) \text{ въ } \varepsilon^{-k}(\varepsilon\,,\; x)\,.$$

Будемъ всѣ корни x_i считать перемѣнными независимыми, съ однимъ лишь вышесдѣланнымъ ограниченіемъ относительно значковъ, и разсмотримъ выраженіе

$$(\varepsilon\,,\; x)^\lambda.$$

Тогда возвышая резольвенту въ степень ν по извѣстнымъ формуламъ, и замѣчая, что всѣ степени ε, выше m, замѣняются соотвѣтственными вычетами по модулю m, мы получаемъ

(1) $$(\varepsilon, x)^\nu = X_0^{(\nu)} + \varepsilon X_1^{(\nu)} + \ldots + \varepsilon^{m-1} X_{m-1}^{(\nu)} = \sum_h \varepsilon^h X_h^{(\nu)},$$

гдѣ $X_i^{(\nu)}$ суть формы степени ν отъ независимыхъ перемѣнныхъ x_i.

Напримѣръ, если $m = 3$, то $(\varepsilon, x)^2 = (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)^2 = X_0^{(2)} + \varepsilon X_1^{(2)} + \varepsilon^2 X_2^{(2)}$, гдѣ $X_0^{(2)} = x_0^2 + 2x_1x_2$, $X_1^{(2)} = x_2^2 + 2x_0x_1$ и $X_2^{(2)} = x_1^2 + 2x_0x_2$.

Для значковъ формъ $X_i^{(\nu)}$ мы будемъ придерживаться того же условія, что

$$X_h^{(\nu)} = X_k^{(\nu)},$$

если $h \equiv k \pmod m$.

Подстановка S, очевидно, производитъ надъ функціями

$$X_0^{(\nu)},\ X_1^{(\nu)} \ldots\ X_{m-1}^{(\nu)}$$

циклическую подстановку

$$(0,\ \nu,\ 2\nu,\ 3\nu,\ \ldots),$$

т. е. $X_h^{(\nu)}$ переходитъ въ $X_{h+\nu}^{(\nu)}$.

Въ самомъ дѣлѣ, для доказательства мы замѣчаемъ, что

(2) $$m X_h^{(\nu)} = \sum_\varepsilon \varepsilon^{-h} (\varepsilon, x)^\nu.$$

Послѣднее равенство слѣдуетъ изъ того, что $(\varepsilon, x)^\nu$ есть новая резольвента, гдѣ роль перемѣнныхъ x_i играютъ $X_i^{(\nu)}$.

Дѣлая въ правой части равенства (2) подстановку S, мы получаемъ въ этой части новую сумму

$$\sum_\varepsilon \varepsilon^{-h-\nu} (\varepsilon, x)^\nu.$$

Значитъ, лѣвая часть должна перейти въ $m X_{h+\nu}^{(\nu)}$.

§ 20.

Соображеніями аналогичными съ тѣми, что въ предыдущемъ параграфѣ, можно доказать такую же самую теорему общаго характера, если разсматривается функція

$$(\varepsilon, x)^\nu (\varepsilon^{\lambda_1}, x)^{\nu_1} (\varepsilon^{\lambda_2}, x)^{\nu_2} \ldots = \sum_h \varepsilon^h \Xi_h,$$

гдѣ Ξ_h суть формы нѣкоторой степени $\nu + \nu_1 + \nu_2 + \ldots$ относительно x_i.

Отсюда

(1) $$m\Xi_h = \sum \varepsilon^{-h}(\varepsilon, x)^{\nu}(\varepsilon^{\lambda_1}, x)^{\nu_1}(\varepsilon^{\lambda_2}, x)^{\nu_2} \ldots$$

Очевидно, что производство въ правой части равенства (1) подстановки S обращаетъ подъ знакомъ $\sum$ множителя ε^{-h} въ множителя $\varepsilon^{-h-\nu-\nu_1\lambda_1-\nu_2\lambda_2-\ldots}$, т. е., другими словами, форма Ξ_h переходитъ отъ этой подстановки въ форму $\Xi_{h+\nu+\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2+\ldots}$.

Періоды Gauss'а.

§ 21.

Gauss показываетъ въ своемъ сочиненіи Disquisitiones Arithmeticae удобныя въ практическомъ отношеніи и важныя въ теоретическомъ пріемы рѣшенія двучленныхъ уравненій.

Сущность его методы сводится къ разсмотрѣнію резольвенты Lagrange'а (ε, x) въ томъ случаѣ, когда ε—не первообразный корень.

Пусть $m = e.f$ и пусть ε будетъ корень степени m изъ единицы, принадлежащій къ показателю e. Тогда резольвенту Lagrange'а можно написать такъ

$$\begin{aligned}(\varepsilon, x) = x_0 &+ \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^{e-1}x_{e-1} + \\ + x_e &+ \varepsilon x_{e+1} + \ldots + \varepsilon^{e-1}x_{2e-1} + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + x_{e(f-1)} &+ \varepsilon x_{e(f-1)+1} + \ldots + \varepsilon^{e-1}x_{m-1}.\end{aligned}$$

Слѣдуя Gauss'у, мы назовемъ *періодами* такія функціи корней

(1) $$\begin{aligned}\eta_0 &= x_0 + x_e + x_{2e} + \ldots + x_{e(f-1)} \\ \eta_1 &= x_1 + x_{e+1} + \ldots + x_{e(f-1)+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{e-1} &= x_{e-1} + x_{2e-1} + \ldots + x_{m-1}.\end{aligned}$$

Тогда получается выраженіе резольвенты Lagrange'а черезъ періоды Gaussa въ такомъ видѣ

(2) $$(\varepsilon, x) = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \ldots + \varepsilon^{e-1}\eta_{e-1}.$$

Будемъ выраженіе (2) также обозначать (ε, η). Будемъ разсматривать циклическую подстановку $S = (x_0, x_1, \ldots x_n)$. Такъ какъ подста-

новка S даетъ циклическое перемѣщеніе періодовъ

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}),$$

то очевидно, что теоремы §§ 19, 20 будутъ справедливы и относительно коэффиціентовъ выраженій

$$(\varepsilon, \eta)^{\nu} = H_0^{(\nu)} + \varepsilon H_1^{(\nu)} + \ldots + \varepsilon^{e-1} H_e^{(\nu)},$$

и

$$(\varepsilon, \eta)^{\nu} (\varepsilon^{\lambda_1}, \eta)^{\nu_1} (\varepsilon^{\lambda_2}, \eta)^{\nu_2} \ldots$$

Двучленныя уравненія и дѣленіе круга.

§ 22.

Изъ элементовъ извѣстно, что корни уравненія

(1) $$x^n - 1 = 0$$

имѣютъ видъ

$$x = e^{\frac{2k\pi}{n}i}.$$

Отсюда видно, что задача рѣшенія уравненія (1) равносильна задачѣ дѣленія окружности на n равныхъ частей, или задачѣ вписыванія въ кругъ правильнаго многоугольника.

Древнимъ математикамъ были извѣстны построенія циркулемъ и линейкой вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ число сторонъ, выражаемое одной изъ слѣдующихъ формулъ

$$2^k, \; 3 . 2^k, \; 5 . 2^k, \; 3 . 5 . 2^k$$

Новый шагъ въ вопросѣ построенія правильныхъ многоугольниковъ циркулемъ и линейкой былъ сдѣланъ Gauss'омъ въ его знаменитомъ сочиненіи „Disquisitiones Arithmeticae" (въ §§ 365—366).

Gauss даетъ такую теорему: для рѣшимости уравненія $x^n - 1 = 0$ въ квадратныхъ радикалахъ необходимо и достаточно, чтобы было одно изъ трехъ:

1) число n простое, вида $2^h + 1$,

2) $n = 2^m$;

3) число n есть произведеніе чиселъ предыдущихъ видовъ.

Gauss добавляетъ весьма важное соображеніе, состоящее въ томъ, что для чиселъ, для которыхъ можно дѣлить циркулемъ и линейкой окружность круга, можно также дѣлить на равныя части и обводъ кривой линіи — *лемнискаты*

§ 23.

Очевидно, что число h, фигурирующее въ теоремѣ Gauss'а должно имѣть видъ

$$h = 2^k;$$

ибо, если $h = 2^k(2r+1)$, то число

$$2^h + 1 = [2^{2^k}]^{2r+1} + 1$$

дѣлится на

$$2^{2^k} + 1$$

и, слѣдовательно, не можетъ быть простымъ числомъ, такъ что простыя числа надо будетъ искать среди чиселъ

$$2^{2^k} + 1 .$$

Относительно этихъ чиселъ Fermat сдѣлалъ предположеніе (оказавшееся невѣрнымъ), что всѣ эти числа простыя.

Дѣйствительно, оказалось, что получаются простыя числа при $k = 0, 1, 2, 3, 4$, а именно

$$3, 5, 17, 257, 65537.$$

Случай 17 разобранъ у Gauss'а въ Disquisitiones Arithmeticae.

Построеніе циркулемъ многоугольника съ числомъ сторонъ $= 257$ произвелъ по методѣ Gauss'а Richelot [1]). И, наконецъ, случай 65537 сдѣланъ Hermes'омъ [2]).

Далѣе, для числа $k = 5$ Euler показалъ, что получается число составное, а именно

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Затѣмъ сложность чиселъ показали далѣе Landry для числа

$$2^{2^6} + 1,$$

а затѣмъ священникъ И. М. Первушинъ для

$$2^{2^{12}} + 1 \text{ и } 2^{2^{23}} + 1 \text{ (Lucas).}$$

---

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik A. L. Crelle; 9, 1, 1832.

[2]) Gott. Nachr. 1894.

Остается вопросъ открытымъ, будетъ ли конечнымъ число простыхъ чиселъ въ рядѣ

$$2^{2^k}+1,$$

или нѣтъ.

§ 24

Ограничимся разсмотрѣніемъ случая n простого.

Итакъ, будемъ разсматривать рѣшеніе уравненія

(1) $$X_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=0.$$

Если обозначимъ черезъ r первообразный корень степени p изъ единицы, то всѣ корни уравненія (1) будутъ имѣть видъ

(2) $$r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots r^{p-1};$$

число p мы предполагаемъ простымъ, значитъ $p-1$ число составное.

Покажемъ теперь, что уравненіе (1) циклическое, т. е. что его группа Galois состоитъ изъ степеней одной и той же циклической подстановки.

Возьмемъ первообразный корень g простого числа p. Тогда, очевидно, что по модулю p всѣ числа

$$1,\ g,\ g^2,\ \ldots g^{p-2}$$

отличаются только порядкомъ отъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots(p-1).$$

Значитъ, рядъ чиселъ

(3) $$r,\ r^g,\ r^{g^2},\ \ldots r^{g^{p-2}}$$

отличается только порядкомъ отъ чиселъ (2). Значитъ, числа (3) даютъ также всѣ корни уравненія (1).

Обозначимъ $r^{g^h}=r_h$. Тогда числа (3) можно иначе записать такъ

(4) $$r,\ r_1,\ r_2,\ \ldots r_{p-2}.$$

Если мы обозначимъ черезъ $\theta(x)$ раціональную функцію x^g, т. е.

$$\theta(x)=x^g,$$

то, очевидно, что

$$r_i=\theta^i(r),$$

и, значитъ, корни (4) представляютъ собою такой рядъ

(5) $$r,\ \theta(r),\ \theta^2(r),\ \theta^3(r),\ \ldots\ \theta^{p-2}(r),$$

что показываетъ, что група Galois есть циклическая, образованная степенями подстановки

$$S = (r, \; r_1, \; r_2, \; \ldots r_{p-2}).$$

§ 25.

Разсмотримъ поле $\Omega(r)$, получаемое отъ присоединенія корня r къ полю Ω раціональныхъ чиселъ. Всякое число этой области будетъ, очевидно, представлять изъ себя раціональную функцію $\varphi(r)$ съ раціональными коэффиціентами.

Такъ какъ всякую раціональную функцію отъ корня уравненія можно представить въ цѣломъ видѣ, причемъ эта цѣлая функція будетъ въ степени на единицу меньше, чѣмъ степень уравненія, то мы получаемъ

(1) $$\varphi(r) = b_0 \cdot 1 + b_1 r + \ldots + b_{p-2} r^{p-2},$$

гдѣ b_0, b_1, b_2, ... суть раціональныя числа. Давая этимъ коэффиціентамъ всевозможныя раціональныя значенія, воспроизведемъ все поле $\Omega(r)$.

Такъ какъ мы имѣемъ изъ уравненія (1) § 24.

(2) $$1 = -r - r^2 - \ldots - r^{p-1},$$

то мы получаемъ

$$\varphi(r) = (b_1 - b_0) r + (b_2 - b_0) r^2 + \ldots + (b_{p-2} - b_0) r^{p-2} - b_0 r^{p-1}.$$

Но такъ какъ числа степеней отличаются только порядкомъ отъ чиселъ (4) предыдущаго §-фа, то можно представить всякое число въ такомъ видѣ

(3) $$\varphi(r) = a r + a_1 r_1 + \ldots + a_{p-2} r_{p-2}.$$

Не трудно убѣдиться, что всякое число разсматриваемаго поля представляется только однимъ способомъ въ видѣ (3). Для этой цѣли достаточно убѣдиться, что равенство

(4) $$\varphi(r) = 0$$

возможно только тогда, когда всѣ коэффиціенты a_i равны 0.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая выраженіе (1), мы замѣчаемъ, что равенство (4) влечетъ, какъ слѣдствіе, равенство нулю всѣхъ коэффиціентовъ

$$b_0, \; b_1, \; b_2, \; \ldots b_{p-2},$$

ибо намъ извѣстно, что уравненіе

$$X_p(x) = 0$$

неприводимое.

Если коэффиціенты b_i равняются нулю, то будутъ, очевидно, обращаться въ нуль и коэффиціенты a_i

§ 26.

Група разсматриваемаго уравненія есть

$$G(1, S, S^2, \ldots S^{p-2}),$$

образованная степенями круговой подстановки

$$S=(r, r_1, r_2, \ldots r_{p-2}).$$

Очевидно, что эта группа состоитъ изъ такихъ преобразованій чиселъ $\varphi(r)$, гдѣ корень r замѣняется корнями

$$r, r_1, r_2, \ldots r_{p-2},$$

такъ что элементы этой группы можно обозначить такъ

$$(r, r), (r, r_1) \ldots (r, r_{p-2}),$$

при этомъ мы видимъ, что подстановка (r, r_k) равносильна подстановкѣ (r_h, r_{h-k}).

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію дѣлителей группы G. Очевидно, что эти дѣлители получатся слѣдующимъ образомъ. Раскладывая число $p-1$ на множителей, пусть имѣемъ

$$p-1=e.f.$$

Тогда не трудно видѣть, что для всякаго дѣлителя e числа $(p-1)$ будетъ соотвѣтствовать подгрупа

(1) $$G_1(1, S^e, S^{2e}, \ldots S^{(f-1)e})$$

Эта подгрупа имѣетъ порядокъ f.

Не трудно составить функціи, принадлежащія этой подгрупѣ. Къ числу такихъ функцій принадлежатъ Gauss'овы періоды

(2) $$\begin{aligned} \eta &= r+r_e+r_{2e}+\ldots+r_{(f-1)e} \\ \eta_1 &= r_1+r_{e+1}+r_{2e+1}+\ldots+r_{(f-1)e+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{e-1} &= r_{e-1}+r_{2e-1}+\ldots+r_{p-2} \end{aligned}$$

Очевидно, что каждая изъ этихъ функцій не мѣняется отъ подстановокъ подгруппы (1).

Что касается подстановокъ, переводящихъ Gauss'овы періоды одни въ другіе, то придется разсмотрѣть сопряженныя системы

$$G_1, \ G_1(r, r_1), \ G_1(r, r_2), \ \ldots \ G_1(r, r_{e-1}).$$

Подстановки этихъ сопряженныхъ системъ переводятъ періодъ первый η въ періоды

$$\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}.$$

§ 27.

Всѣ функціи η_i различны между собою, потому что равенство

$$\eta_k = \eta_i$$

влекло бы за собой линейное соотношеніе между r_i, что не возможно.

Примѣняя соображенія общей теоріи (см. главу XVI), мы приходимъ къ такому выводу: Gauss'овы періоды $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$ суть корни нѣкотораго уравненія степени e, съ раціональными коэффиціентами.

Если присоединить одинъ изъ періодовъ, напримѣръ, η къ полю Ω, то корень r первоначальнаго уравненія будетъ въ новомъ полѣ корнемъ уравненія степени

$$\frac{p-1}{e} = f.$$

§ 28.

Теорема. *Всякая функція отъ корня r первоначальнаго поля, не мѣняющаяся отъ подстановки (r, r_e), будетъ принадлежать къ полю $\Omega(\eta)$ и будетъ выражаться линейно черезъ періоды*

$$\eta, \eta_1, \ldots \eta_{e-1}$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что всякая функція $\varphi(r)$ можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

(1) $$\varphi(r) = \sum_h a_h r_h.$$

Производя въ равенствѣ (1) подстановку (r, r_e), мы получаемъ

$$\varphi(r_e) = \sum_h a_h r_{h+e} = \sum_h a_{h-e} r_h.$$

Равенство

$$\varphi(r_e) = \varphi(r)$$

влечетъ, какъ слѣдствіе, равенство

$$a_h = a_{h+e},$$

имѣющее мѣсто при всякомъ h.

Значитъ, мы получаемъ

$$a_h = a_{h+e} = a_{h+2e} = \ldots;$$

слѣдовательно, мы получаемъ

$$\varphi(r) = a.\{r + r_e + \ldots\} + a_1\{r_1 + r_{e+1} + \ldots\} + \ldots =$$
$$= a\eta + a_1\eta_1 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1},$$

гдѣ коэффиціенты a_i суть раціональныя числа.

Очевидно, что если коэффиціенты выраженій $\varphi(r)$ будутъ цѣлыми числами, то и коэффиціенты a_i должны быть цѣлыми числами.

§ 29.

Разсмотримъ теперь уравненіе

(1) $$F_e(x) = (x - \eta)(x - \eta_1)\ldots(x - \eta_{e-1}),$$

которому удовлетворяютъ Gauss'овы періоды.

Изъ общей теоріи мы знаемъ, что коэффиціенты этого уравненія должны быть всѣ раціональные.

Не трудно убѣдиться, что коэффиціенты этого уравненія будутъ числа цѣлыя (и раціональныя), такъ что періодъ Gauss'а η есть то, что называется *цѣлымъ алгебраическимъ числомъ*.—Цѣлымъ алгебраическимъ числомъ называется корень уравненія, коэффиціенты котораго цѣлыя числа, а старшій коэффиціентъ равенъ единицѣ.

Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, составимъ произведеніе

$$\eta_k\eta_h.$$

Такъ какъ оба множителя принадлежатъ къ подгруппѣ G_1, то и все произведеніе принадлежитъ къ той же подгруппѣ, а, слѣдовательно, на основаніи теоремы § 28, это произведеніе должно выражаться линейно черезъ періоды, такъ что будетъ

$$\eta_k\eta_h = \alpha\eta + \alpha_1\eta_1 + \ldots + \alpha_{e-1}\eta_{e-1}.$$

Такъ какъ множители η_k и η_h суть суммы корней r_i, то имѣемъ коэффиціенты равные единицѣ. Значитъ, въ произведеніи коэффиціенты бу-

дутъ цѣлые, а, значитъ, и числа

$$\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{e-1}$$

будутъ цѣлыми.

Предположимъ, что мы имѣемъ удобные пріемы для вычисленія коэффиціентовъ

$$\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{e-1}.$$

Тогда получаемъ рядъ равенствъ

$$\begin{aligned}
\eta\eta &= a_0^{(0)}\eta + a_1^{(0)}\eta_1 + \ldots + a_{e-1}^{(0)}\eta_{e-1} \\
\eta\eta_1 &= a_0^{(1)}\eta + a_1^{(1)}\eta_1 + \ldots + a_{e-1}^{(1)}\eta_{e-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta\eta_{e-1} &= a_0^{(e-1)}\eta + a_1^{(e-1)}\eta_1 + \ldots + a_{e-1}^{(e-1)}\eta_{e-1}.
\end{aligned}$$

Исключая изъ этихъ e однородныхъ уравненій буквы

$$\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1},$$

получимъ

$$(1) \qquad \begin{vmatrix}
a_0^{(0)} - \eta, & a_1^{(0)}, & \ldots & a_{e-1}^{(0)} \\
a_0^{(1)}, & a_1^{(1)} - \eta, & \ldots & a_{e-1}^{(1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_0^{(e-1)}, & a_1^{(e-1)}, & \ldots & a_{e-1}^{(e-1)} - \eta
\end{vmatrix} = 0.$$

Получимъ уравненіе $F_e(\eta) = 0$, обладающее всѣми сказанными свойствами.

Посмотримъ, какъ, считая извѣстными корни

$$\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$$

уравненія (1) вычислить окончательно корень r заданнаго уравненія.

Составимъ для этой цѣли уравненіе степени F, имѣющее корни

$$r, r_e, r_{2e}, \ldots r_{(f-1)e},$$

а именно уравненіе

$$(2) \qquad \Phi_e(x) = (x - r)(x - r_e)(x - r_{2e}) \ldots (x - r_{(f-1)e}) = 0$$

Чтобы показать, что коэффиценты уравненія (2) выражаются черезъ періоды, разсмотримъ сумму степеней съ показателемъ g^h [1]) корней уравненія (2), а именно

$$r^{g^h} + r_e^{g^h} + r_{2e}^{g^h} + \ldots + r_{(f-1)e}^{g^h} = r_h + r_{e+h} + r_{2e+h} + \ldots + r_{(f-1)e+h} = \eta_h.$$

[1]) Числа g^h сравнимы по модулю p съ рядомъ чиселъ $1, 2, \ldots p-1$.

Значитъ, всѣ суммы степеней корней, къ вычисленію которыхъ по формуламъ Newton'а приводится вычисленіе коэффиціентовъ, суть не что иное, какъ періоды, и, значитъ, по формуламъ Newton'а по этимъ періодамъ мы вычислимъ коэффиціенты уравненія (2).

§ 30.

Итакъ, задача привелась къ рѣшенію уравненія (2). Для разсмотрѣнія этого уравненія, разложимъ показатель его степени на множители

$$f = e'f'$$

и возьмемъ новаго дѣлителя G_2 подгруппы G_1, имѣющаго порядокъ f', а индексъ e'.

Этотъ дѣлитель будетъ состоять изъ подстановокъ

$$(1\,,\ S^{ee'},\ S^{2ee'},\ \ldots S^{(f'-1)ee'})\,.$$

Тогда придется взять такіе новые періоды

$$\eta' = r + r_{ee'} + r_{2ee'} + \ldots + r_{(f'-1)ee'}.$$

Можно показать, что въ полѣ $\Omega(\eta)$ період η' удовлетворяетъ уравненію

$$F'_{e'}(\eta') = 0$$

степени e'

Когда это уравненіе уже рѣшено, то корни

$$r\,,\ r^{ee'},\ r^{2ee'},\ \ldots$$

получаются уже изъ уравненія

$$\Phi_e'(x) = 0$$

степени f'.

Относительно всѣхъ этихъ новыхъ уравненій имѣютъ мѣсто соображенія, аналогичныя съ предыдущими, съ тою лишь разницею, что абсолютное поле раціональныхъ чиселъ Ω замѣняется полемъ $\Omega(\eta)$.

§ 31.

На основаніи сказаннаго можно привести задачу дѣленія окружности на простое число p равныхъ частей на рѣшеніе ряда Abel'евыхъ уравненій простой степени, ибо раскладывая число $(p - 1)$ на простые множители

$$p - 1 = ee'e'' \ldots,$$

приведемъ задачу къ послѣдовательному вычисленію періодовъ

$$\eta,\ \eta',\ \eta'',\ \ldots,$$

удовлетворяющихъ Abel'евымъ уравненіямъ простыхъ степеней.

$$e,\ e',\ e'',\ e''',\ \ldots$$

Abel'евы уравненія простыхъ степеней e, e', e''; требуютъ для своего рѣшенія, какъ это мы видѣли въ §§ 14, 15, 16 присоединенія первообразныхъ корней изъ единицъ степеней e, e', e'', ... Итакъ, мы видимъ, что выраженіе въ радикалахъ первообразнаго корня степени p привелось къ выраженію корней изъ единицъ меньшихъ степеней, которыя суть дѣлители числа $p-1$. Такое постепенное пониженіе приведетъ къ полному выраженію въ радикалахъ корня степени p.

Метода Gauss'а вычисленія резольвентъ.

§ 32.

Пусть будетъ имѣть мѣсто сравненіе

$$\lambda \equiv g^h (mod\ p),$$

такъ что $h = ind\lambda$. Тогда

$$r^\lambda = r^{g^h} = r_h = r_{ind\lambda}.$$

Будемъ разсматривать періоды η_h при произвольныхъ цѣлыхъ значеніяхъ числа h. Причемъ мы будемъ замѣнять значки больше $p-1$ вычетами по модулю $p-1$.

Введемъ, слѣдуя Gauss'у, новое обозначеніе

$$\eta^{(\lambda)} = \eta_h = \eta_{ind\lambda};$$

причемъ, конечно, будетъ имѣть мѣсто при всякихъ цѣлыхъ значеніяхъ h равенство

(1) $$\eta_h = r_h + r_{h+e} + r_{h+2e} + \ldots + r_{h+(f-1)e}.$$

Введемъ для всякаго цѣлаго числа λ рядъ новыхъ чиселъ

$$\lambda' \equiv \lambda g^e,\ \lambda'' \equiv \lambda g^{2e},\ \lambda''' \equiv \lambda g^{3e},\ \ldots (mod\ p).$$

Тогда будутъ имѣть мѣсто такія сравненія

$$ind\lambda' \equiv ind\lambda + e$$

$$ind\lambda'' \equiv ind\lambda + 2e \qquad (mod\ p-1)$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Значитъ, формула (1) перепишется такъ

$$\eta_{\text{ind}\lambda} = r_{\text{ind}\lambda} + r_{\text{ind}\lambda'} + r_{\text{ind}\lambda''} + \ldots$$

т. е., другими словами,

(2) $$\eta^{(\lambda)} = r^{\lambda} + r^{\lambda'} + r^{\lambda''} + \ldots$$

§ 33.

Разсмотримъ два періода

(1) $$\eta^{(\lambda)} = r^{\lambda} + r^{\lambda'} + r^{\lambda''} + \ldots$$

(2) $$\eta^{(\mu)} = r^{\mu} + r^{\mu'} + r^{\mu''} + \ldots,$$

гдѣ числа μ', μ'', ... также опредѣляются по числу μ, какъ въ прошломъ §-фѣ опредѣлялись λ', λ'', ... по числу λ, т е.

$$\mu' \equiv \mu g^{e}, \; \mu'' = \mu g^{2e}, \ldots$$

Можно будетъ формулы (1) и (2) переписать такъ

$$\eta^{(\lambda)} = \sum_{s=0}^{s=f-1} r^{\lambda g^{se}}$$

$$\eta^{(\mu)} = \sum_{t=0}^{t=f-1} r^{\mu g^{te}}.$$

Разсмотримъ теперь произведеніе

(3) $$\eta^{(\lambda)}\eta^{(\mu)} = \sum_{s}\sum_{t} r^{\lambda g^{se} + \mu g^{te}}.$$

Будемъ сначала суммировать по t, считая s постояннымъ.

Очевидно, что когда t пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю f, то $s+t$ при всякомъ s пройдетъ туже самую систему вычетовъ, значитъ, подъ знакомъ суммы можно замѣнить t на $s+t$, и мы имѣемъ

$$\eta^{(\lambda)}\eta^{(\mu)} = \sum_{s}\sum_{t} r^{(\lambda + \mu g^{te}) g^{se}}.$$

Перемѣняя порядокъ суммированія, получимъ

$$\eta^{(\lambda)}\eta^{(\mu)} = \sum_{t}\sum_{s} r^{(\lambda + \mu g^{te}) g^{se}} = \sum_{t} \eta^{(\lambda + \mu g^{te})}.$$

Итакъ, мы получаемъ

$$(4) \qquad \eta^{(\lambda)}\eta^{(\mu)} = \eta^{(\lambda+\mu)} + \eta^{(\lambda+\mu')} + \eta^{(\lambda+\mu'')} + \ldots$$

Помѣнявъ ролями λ и μ, можно написать туже самую формулу иначе

$$(5) \qquad \eta^{(\lambda)}\eta^{(\mu)} = \eta^{(\lambda+\mu)} + \eta^{(\lambda'+\mu)} + \eta^{(\lambda''+\mu)} + \ldots$$

Символъ $\eta^{(\lambda)}$, опредѣленный формулой (2) § 32, будетъ давать постоянное число, если $\lambda = 0$, или, вообще,

$$\lambda \equiv 0 \ (mod\, p),$$

потому что при $\lambda = 0$ и $\lambda \equiv 0 \ (mod\, p)$, $\lambda' \equiv 0$, $\lambda'' \equiv 0, \ldots$, и, слѣдовательно,

$$\eta^{(0)} = r^0 + r^0 + \ldots = f.$$

Такъ что формулы, въ которыя входятъ символы $\eta^{(\lambda)}$ — *неоднородныя* относительно періодовъ η. Но во всякой такой неоднородной формулѣ можно будетъ возстановить однородность изъ того соображенія, что

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{e-1} = -1.$$

Послѣдняя формула есть не что иное, какъ формула (2) § 25.

И, значитъ, всякій постоянный членъ a, не заключающій періодовъ, можно замѣнить черезъ

$$-a(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{e-1}).$$

§ 34.

Примѣръ. Разсмотримъ случай $p=13$, $g=2$; слѣдовательно $p-1=12$. Пусть $e=3$, $f=4$. Тогда имѣемъ таблицу

$ind\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
λ	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1

По опредѣленію Gauss'овыхъ періодовъ (см. § 26) имѣемъ

$$\eta = r + r_3 + r_6 + r_9$$

$$\eta_1 = r_1 + r_4 + r_7 + r_{10}$$

$$\eta_2 = r_2 + r_5 + r_8 + r_{11}.$$

По таблицѣ находимъ

$$\eta = r + r^8 + r^{12} + r^5 = r^1 + r^{1\cdot 2^3} + r^{1\cdot 2^6} + r^{1\cdot 2^9} = \eta^{(1)}$$

$$\eta_1 = r^2 + r^3 + r^{11} + r^{10} = r^2 + r^{2\cdot 2^3} + r^{2\cdot 2^6} + r^{2\cdot 2^9} = \eta^{(2)}$$

$$\eta_2 = r^4 + r^6 + r^9 + r^7 = r^4 + r^{4\cdot 2^3} + r^{4\cdot 2^6} + r^{4\cdot 2^9} = \eta^{(4)}.$$

Очевидно, что будутъ имѣть мѣсто слѣдующія равенства

$$\eta^{(1)} = \eta^{(8)} = \eta^{(12)} = \eta^{(5)}$$

$$\eta^{(2)} = \eta^{(3)} = \eta^{(11)} = \eta^{(10)}$$

$$\eta^{(4)} = \eta^{(6)} = \eta^{(9)} = \eta^{(7)}.$$

Значитъ, числа λ, λ', λ'', λ''' суть или

1, 8, 12, 5.

или

2, 3, 11, 10,

или

4, 6, 9, 7.

Для нахожденія кубическаго уравненія, которому удовлетворяютъ періоды η, вычислимъ три произведенія

$$\eta\eta,\ \eta\eta_1 \text{ и } \eta\eta_2.$$

Получаемъ

$$\eta\eta = \eta^{(1)}\eta^{(1)},$$

или по формуламъ (4) предыдущаго параграфа получаемъ

$$\eta\eta = \eta^{(1)}\eta^{(1)} = \eta^{(1+1)} + \eta^{(1+8)} + \eta^{(1+12)} + \eta^{(1+5)} = \eta^{(2)} + \eta^{(9)} + \eta^{(0)} + \eta^{(6)} =$$

$$= \eta^{(2)} + \eta^{(4)} + 4 + \eta^{(4)} = 4 + \eta_1 + 2\eta_2,$$

но $\eta + \eta_1 + \eta_2 = -1$, слѣдовательно,

$$\eta\eta = -4(\eta + \eta_1 + \eta_2) + \eta_1 + 2\eta_2 = -4\eta - 3\eta_1 - 2\eta_2,$$

т. е.

$$(1) \qquad \eta\eta = -4\eta - 3\eta_1 - 2\eta_2.$$

Далѣе имѣемъ

$$\eta\eta_1 = \eta^{(1)}\eta^{(2)} = \eta^{(1+2)} + \eta^{(1+3)} + \eta^{(1+11)} + \eta^{(1+10)} = \eta^{(3)} + \eta^{(4)} + \eta^{(12)} + \eta^{(11)} =$$

$$= 2\eta^{(2)} + \eta^{(4)} + \eta^{(1)} = 2\eta_1 + \eta_2 + \eta.$$

Мы могли бы вычислить иначе произведеніе $\eta\eta_1$, а именно

$$\eta\eta_1 = \eta^{(1)}\eta^{(2)} = \eta^{(2+1)} + \eta^{(2+3)} + \eta^{(2+12)} + \eta^{(2+5)} = \eta^{(3)} + \eta^{(10)} + \eta^{(1)} + \eta^{(7)} =$$

$$= 2\eta^{(2)} + \eta^{(1)} + \eta^{(4)} = 2\eta_1 + \eta + \eta_2 .$$

Итакъ, имѣемъ

(2) $$\eta\eta_1 = \eta + 2\eta_1 + \eta_2 .$$

Наконецъ, найдемъ произведеніе $\eta\eta_2$

$$\eta\eta_2 = \eta^{(1)}\eta^{(4)} = \eta^{(1+4)} + \eta^{(1+6)} + \eta^{(1+9)} + \eta^{(1+7)} = \eta^{(5)} + \eta^{(7)} + \eta^{(10)} + \eta^{(8)} =$$

$$= 2\eta^{(1)} + \eta^{(4)} + \eta^{(2)} = 2\eta + \eta_2 + \eta_1 .$$

Итакъ,

(3) $$\eta\eta_2 = 2\eta + \eta_1 + \eta_2 .$$

Изъ уравненій (1), (2) и (3) получается такое кубическое уравненіе

$$\begin{vmatrix} 4-\eta, & -3, & -2 \\ 1, & 2-\eta, & 1 \\ 2, & 1, & 1-\eta \end{vmatrix} = 0 .$$

Итакъ, находимъ

$$\eta^3 + \eta^2 - 4\eta + 1 = 0 .$$

Остается получить уравненіе 4-й степени, которому удовлетворяютъ числа

$$r,\ r^{12} = r^{-1},\ r^5,\ r^8 = r^{-5}.$$

Мы могли бы составить новые періоды, соотвѣтствующіе $e' = 2$, а именно

$$\xi = r + r^{12} = r + r^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{13}$$

$$\xi_1 = r^8 + r^5 = r^5 + r^{-5} = 2\cos\frac{10\pi}{13} .$$

Не трудно составить квадратное уравненіе, которому удовлетворяетъ періодъ ξ. Получаемъ

$$\xi + \xi_1 = \eta ,$$

$$\xi\xi_1 = \eta_2 .$$

Итакъ, получаемъ квадратное уравненіе

$$\xi^2 - \eta\xi + \eta_2 = 0 .$$

Это квадратное уравненіе заключаетъ раньше вычисленные періоды въ своемъ основномъ полѣ.

И, наконецъ, зная ξ, мы вычислимъ окончательно корень r заданнаго уравненія при помощи квадратнаго уравненія

$$r + r^{-1} = \xi,$$

или

$$r^2 - \xi r + 1 = 0.$$

Если бы мы не хотѣли разсматривать промежуточнаго періода ξ, то получили бы прямо изъ уравненія четвертой степени

$$(r + r^{-1})^2 - \eta(r + r^{-1}) + \eta_2 = 0.$$

Рѣшеніе имѣло бы нѣсколько другой видъ, если бы мы за первый простой множитель числа $p-1$ взяли не число 3, а число 2.

Будемъ производить рѣшенія иначе. Пусть $e = 2$, а тогда $f = 6$.

Тогда имѣемъ

$$\eta = r + r_2 + r_4 + r_6 + r_8 + r_{10} = r + r^4 + r^3 + r^{12} + r^9 + r^{10} = \eta^{(1)},$$

$$\eta_1 = r_1 + r_3 + r_5 + r_7 + r_9 + r_{11} = r^2 + r^8 + r^6 + r^{11} + r^5 + r^7 = \eta^{(2)}.$$

Очевидно $\eta + \eta_1 = -1$.

Для нахожденія квадратнаго уравненія, которому удовлетворяютъ періоды η и η_1, достаточно вычислить произведеніе корней $\eta\eta_1$.

Имѣемъ

$$\eta\eta_1 = \eta^{(1)}\eta^{(2)} = \eta^{(3)} + \eta^{(0)} + \eta^{(7)} + \eta^{(12)} + \eta^{(6)} + \eta^{(8)} =$$

$$= \eta^{(1)} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(2)} = 3\eta^{(1)} + 3\eta^{(2)} = \quad 3.$$

Итакъ, квадратное уравненіе будетъ

$$\eta^2 + \eta - 3 = 0$$

Остается получить уравненіе 6-ой степени, которому удовлетворяютъ числа

$$r,\ r^{12} = r^{-1},\ r^3,\ r^{10} = r^{-3},\ r^4,\ r^9 = r^{-4}.$$

Мы могли бы составить новые періоды соотвѣтствующіе числу $e' = 3$, а именно,

$$\xi = r + r^{12} = r + r^{-1}$$

$$\xi_1 = r^3 + r^{10} = r^3 + r^{-3}$$

$$\xi_2 = r^4 + r^9 = r^4 + r^{-4}.$$

Не трудно составить кубическое уравненіе которому удовлетворяютъ періодъ ξ.

Имѣемъ

$$\xi + \xi_1 + \xi_2 = \eta .$$

Составимъ произведенія

$$\xi\xi_1 = r^4 + r^2 + r^{11} + r^9$$

$$\xi\xi_2 = r^5 + r^3 + r^{10} + r^8$$

$$\xi_1\xi_2 = r^7 + r + r^{12} + r^6$$

Теперь находимъ

$$\xi\xi_1 + \xi\xi_2 + \xi_1\xi_2 = \eta + \eta_1 = -1 .$$

Наконецъ, находимъ произведеніе

$$\xi\xi_1\xi_2 = \eta_1 + 2 .$$

Итакъ, искомое кубическое уравненіе будетъ

$$\xi^3 - \eta\xi^2 - \xi - (\eta_1 + 2) = 0 .$$

Опредѣливъ ξ, мы вычислимъ окончательно корень r заданнаго уравненія при помощи квадратнаго

$$r + r^{-1} = \xi ,$$

или

$$r^2 - \xi . r + 1 = 0 .$$

§ 35.

Вернемся теперь къ вычисленію резольвентъ и разсмотримъ выраженіе

(1) $$(\varepsilon^\lambda, r) = \sum \varepsilon^{\lambda h} r_h = \sum_{h=0}^{h=p-2} \varepsilon^{\lambda h} r^{g^h} ,$$

гдѣ ε — примитивный корень степени $p-1$ изъ единицы. Или, обозначая

$$g^h \equiv s \,(mod\, p)$$

такъ что

$$h \equiv ind s \,(mod\, p-1) ,$$

получаемъ

(2) $$(\varepsilon^\lambda, r) = \sum_{s=1}^{s=p-1} \varepsilon^{\lambda ind s} r^s .$$

Разсмотримъ выраженіе

$$(3)\qquad (\varepsilon^{\lambda},\ r)(\varepsilon^{\mu},\ r) = \sum_{s}\sum_{t} r^{s+t}\varepsilon^{\lambda\, ind s + \mu\, ind t}.$$

Если вмѣсто t мы подставимъ st, ибо s принимаетъ значенія, несравнимыя съ нулемъ по модулю p, то при данномъ s выраженія t и st пробѣгаютъ одну и туже полную систему классовъ по модулю p за исключеніемъ класса $s = 0$.

Тогда формула (3) даетъ

$$(4)\qquad (\varepsilon^{\lambda},\ r)(\varepsilon^{\mu},\ r) = \sum_{s}\sum_{t} r^{s(1+t)}\varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind s + \mu\, ind t}.$$

§ 36.

Разсмотримъ сначала случай I, $\mu + \lambda \equiv 0\ (mod\, p - 1)$, т. е., другими словами, можно будетъ въ формулахъ (4) предыдущаго §-фа положить $\mu = -\lambda$. Тогда имѣемъ

$$(\varepsilon^{\lambda},\ r)(\varepsilon^{-\lambda},\ r) = \sum_{s}\sum_{t} r^{s(1+t)}\varepsilon^{-\lambda\, ind t}.$$

Будемъ разсматривать значеніе λ, не удовлетворяющее сравненію $\lambda \equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p - 1)$. Тогда получаемъ

$$(\varepsilon^{\lambda},\ r)(\varepsilon^{-\lambda},\ r) = \sum_{t}\varepsilon^{-\lambda\, ind t}\sum r^{s(1+t)}.$$

Что касается суммы $\sum r^{s(1+t)}$, то, какъ извѣстно изъ элементовъ, будемъ имѣть

$$\sum_{s} r^{s(1+t)} = \sum_{s}(r^{1+t})^{s} = -1,$$

если $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-2$.

А если $t = p - 1$, то

$$\sum_{s}(r^{1+t})^{s} = \sum_{s} 1^{s} = p - 1.$$

Итакъ, мы можемъ написать

$$(\varepsilon^{\lambda},\ r)(\varepsilon^{-\lambda},\ r) = -\sum_{t=1}^{t=p-2}\varepsilon^{-\lambda\, ind t} + (p - 1)\,.\,\varepsilon^{-\lambda\, ind(p-1)}.$$

Но извѣстно, что

$$ind(p - 1) = \frac{p-1}{2};$$

слѣдовательно

$$(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{-\lambda}, r) = -\sum_{t=1}^{t=p-1} \varepsilon^{-\lambda\, ind\, t} + p\varepsilon^{-\lambda\frac{p-1}{2}}.$$

Такъ какъ *indt* подъ знакомъ послѣдней суммы пробѣгаетъ всѣ значенія

$$0, 1, 2, \ldots p-2,$$

то

$$\sum_t \varepsilon^{-\lambda\, ind\, t} = 0.$$

Кромѣ того

$$\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} = -1,$$

потому что ε есть первообразный корень степени $p-1$.

Итакъ, мы получаемъ такую основную формулу

(I) $$(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{-\lambda}, r) = p\,.(-1)^{\lambda}.$$

Если же λ дѣлится на $p-1$, то

$$(\varepsilon^{\lambda}, r) = (\varepsilon^{-\lambda}, r) = (1, r) = -1.$$

§ 37.

Обращаемся теперь къ случаю II, $\lambda + \mu$ не $\equiv 0 \ (mod\, p-1)$.

Тогда имѣемъ

$$(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{\mu}, r) = \sum_s \sum_t r^{s(t+1)} \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, s} \cdot \varepsilon^{\mu\, ind\, t} =$$

$$= \sum_{t=1}^{t=p-2} \sum_{s=1}^{s=p-1} r^{s(t+1)} \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, s} \varepsilon^{\mu\, ind\, t} + (-1)^{\mu} \sum_{s=1}^{s=p-1} \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, s}.$$

Такъ какъ $\lambda+\mu$ не дѣлится на $p-1$, то

$$\sum_s \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, s} = 0,$$

и получаемъ

$$(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{\mu}, r) = \sum_{t=1}^{t=p-2} \varepsilon^{\mu\, ind\, t} \sum_s r^{s(t+1)} \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, s} =$$

$$= \sum_{t=1}^{t=p-2} \varepsilon^{\mu\, ind\, t - (\lambda+\mu)\, ind\, (t+1)} \sum_s r^{s(t+1)} \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, s(t+1)}.$$

Произведеніе $s(t+1)$ пробѣгаетъ полную приведенную систему вычетовъ, когда s пробѣгаетъ таковую по модулю p. Итакъ, имѣемъ

$$\sum_s r^{s(t+1)} \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, (t+1)s} = \sum_s \varepsilon^{(\lambda+\mu)\, ind\, s} r^{s} = (\varepsilon^{\lambda+\mu}, r).$$

Значитъ, мы получаемъ слѣдующую формулу

(II) $$\frac{(\varepsilon^\lambda, r)(\varepsilon^\mu, r)}{(\varepsilon^{\lambda+\mu}, r)} = \psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon),$$

гдѣ

(1) $$\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon) = \sum_{t=1}^{t=p-2} \varepsilon^{\mu\, \mathrm{ind}\, t - (\lambda+\mu)\, \mathrm{ind}(t+1)}$$

Не надо забывать, что при выводѣ формулы (II) мы не предполагали сравнимости съ нулемъ по модулю $p-1$ ни одного изъ чиселъ λ, μ, $\lambda+\mu$.

§ 38.

Jacobi въ своихъ лекціяхъ по теоріи чиселъ показалъ, что рѣшеніе двучленныхъ уравненій сводится къ разсмотрѣнію функцій $\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)$.

При этомъ онъ вывелъ основныя свойства этихъ функцій. Слѣдуя методѣ Jacobi, одинъ изъ его слушателей, Rosenhain, показалъ подробный ходъ вычисленія при рѣшеніи двучленныхъ уравненій простой степени для простыхъ чиселъ до 103 включительно.

Мы ограничимся здѣсь самыми основными соображеніями теоріи Jacobi.

Прежде всего мы видимъ, что всякая функція $\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)$ есть линейная функція отъ корней уравненія

$$\varepsilon^{p-1} - 1 = 0,$$

съ цѣлыми коэффиціентами, которые вычисляются очень просто при помощи таблицы индексовъ.

§ 39.

Методъ Jacobi состоитъ въ томъ, что если мы будемъ считать двучленныя уравненія степеней ниже p рѣшенными, то можемъ считать ε величиной извѣстной, уже выраженной въ радикалахъ, и тогда всѣ резольвенты Lagrange'а

$$(\varepsilon^\lambda, r) = \sum \varepsilon^{\lambda h} r_h,$$

которыя необходимы для нахожденія искомаго корня r уравненія $x^p - 1 = 0$, выражаются въ радикалахъ черезъ функціи $\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)$,

§ 40.

Итакъ, разсмотримъ нѣкоторыя свойства функціи $\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)$.

Прежде всего мы видимъ на основаніи уравненія (II) § 37, что

$$\psi_{\lambda,\mu} = \psi_{\mu,\lambda}.$$

Это можно провѣрить и непосредственно.

Разсмотримъ корень t' сравненія

$$tt' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Не трудно убѣдиться, что когда t пробѣгаетъ приведенную систему вычетовъ по модулю p, то t' пробѣгаетъ ту же систему. Тогда имѣемъ

$$ind(t+1) \equiv ind(t+tt') \equiv ind\, t(1+t') \equiv ind\, t + ind(1+t').$$

Кромѣ того, очевидно, что

$$ind\, t \equiv -ind\, t'$$

Умножая первое изъ написанныхъ сравненій на $(\lambda+\mu)$, а второе на μ и складывая, получаемъ

$$\mu ind t - (\lambda+\mu) ind(t+1) \equiv \mu(-ind t') - (\lambda+\mu)(-ind t')$$
$$-(\lambda+\mu) ind(1+t') \equiv \lambda ind t' - (\lambda+\mu) ind(1+t'),$$

т. е. мы имѣемъ

$$\sum_t \varepsilon^{\mu ind t - (\lambda+\mu) ind(t+1)} = \sum_{t'} \varepsilon^{\lambda ind t' - (\lambda+\mu) ind(t'+1)},$$

т. е., другими словами,

$$\psi_{\lambda,\mu} = \psi_{\mu,\lambda}.$$

§ 41.

Чтобы вернуться къ Gauss'овымъ періодамъ, предположимъ по прежнему, что

$$p-1=ef.$$

Положимъ

$$\mu = f,$$

а въ формулахъ для функціи $\psi_{\lambda,\mu}$ вмѣсто λ подставимъ $\mu.\lambda$.

Тогда, если обозначимъ

$$\alpha = \varepsilon^{\mu} = \varepsilon^{f},$$

то

$$\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon) = \sum_1^{p-2} \alpha^{ind t - (\lambda+1) ind(t+1)};$$

α будетъ, конечно, корнемъ уравненія

$$\alpha^e - 1 = 0.$$

Будемъ во всемъ дальнѣйшемъ обозначать

$$\psi_\lambda(\alpha) = \sum^{p-2} \alpha^{ind t - (\lambda+1) ind(t+1)}.$$

Будемъ λ разсматривать, конечно, по модулю e. Формула (II) § 37. перепишется такъ

(III) $$(\alpha^{\lambda}, r)(\alpha, r) = (\alpha^{\lambda+1}, r)\ \psi_{\lambda}(\alpha).$$

Эта формула имѣетъ мѣсто при всякомъ λ, такъ что, если въ ней будемъ считать $\alpha = \varepsilon^{\mu}$, то, если μ взаимно простое съ $p-1$, то въ формулѣ (III) можно придавать λ значенія

$$1, 2, 3, \ldots p-3.$$

Если же $\mu = f$ есть дѣлитель числа $p-1$, то тогда λ принимаетъ одно изъ слѣдующихъ значеній

$$1, 2, 3, \ldots e-2,$$

ибо ни λ, ни $\lambda+1$ не должно дѣлиться на e.

§ 42

Формула (I) подлежитъ слѣдующему видоизмѣненію

(IV) $$(\alpha^{\lambda}, r)(\alpha^{-\lambda}, r) = (-1)^{\mu\lambda} p.$$

Формулы (III) и (IV) достаточны для выраженія въ радикалахъ не только корня r, но и всѣхъ періодовъ η, такъ какъ вычисленіе r это есть частный случай вычисленія періода η, когда число его членовъ $f = 1$. Ограничимся поэтому вычисленіемъ періода η.

Итакъ $\mu = f$, и мы имѣемъ

$$(\alpha^{\lambda}, r) = r + \alpha^{\lambda} r_1 + \alpha^{2\lambda} r_2 + \ldots + \alpha^{(p-2)\lambda} r_{p-2}.$$

Получаемъ

$$(\alpha^{\lambda}, r) = (r + r_e + r_{2e} + \ldots) + \alpha^{\lambda}(r_1 + r_{e+1} + \ldots) + \ldots =$$
$$= \eta + \alpha^{\lambda}\eta_1 + \alpha^{2\lambda}\eta_2 + \ldots + \alpha^{(e-1)\lambda}\eta_{e-1} = (\alpha^{\lambda}, \eta).$$

Теперь формулы (III) и (IV) перепишутся такъ

$$(\alpha^{\lambda}, \eta)(\alpha, \eta) = (\alpha^{\lambda+1}, \eta)\psi_{\lambda}(\alpha), \quad (\alpha^{\lambda}, \eta)(\alpha^{-\lambda}, \eta) = (-1)^{f\lambda} p.$$

Получаемъ слѣдующій рядъ равенствъ

$$(\alpha\ , \eta)(\alpha, \eta) = (\alpha^2\ \ \eta)\psi_1(\alpha)$$
$$(\alpha^2\ , \eta)(\alpha, \eta) = (\alpha^3\ , \eta) . \psi_2(\alpha)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha^{e-2}, \eta)(\alpha, \eta) = (\alpha^{e-1}, \eta)\psi_{e-2}(\alpha).$$

Перемножая и замѣчая, что $\alpha^{e-1} = \alpha^{-1}$, находимъ

$$(\alpha, \eta)^{e-1} = (\alpha^{-1}, \eta) \cdot \psi_1(\alpha) \cdot \psi_2(\alpha) \ldots \psi_{e-2}(\alpha) .$$

Умножая обѣ части послѣдняго равенства на (α, η), получаемъ

$$(\alpha, \eta)^e = (-1)^f p \cdot \psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) \ldots \psi_{e-2}(\alpha) ;$$

откуда находимъ резольвенту

$$(\alpha, \eta) = \sqrt[e]{(-1)^f p \psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) \ldots \psi_{e-2}(\alpha)} .$$

Отсюда радикальное выраженіе для періодовъ η получается по обыкновенной методѣ Lagrange'a (см. § 18), если мы въ послѣдней резольвентѣ будемъ давать буквѣ α значенія, равныя всѣмъ корнямъ уравненія

$$x^e - 1 = 0 .$$

Въ случаѣ $\mu = f = 1$ получаемъ

$$(\varepsilon, r) = \sqrt[p-1]{-p\psi_1(\varepsilon)\psi_2(\varepsilon) \ldots \psi_{p-3}(\varepsilon)} .$$

Свойства функціи $\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)$.

§ 43.

Такъ какъ $\psi_{\lambda,\mu}$ не мѣняется отъ перестановки λ и μ, то получится та же самая функція $\psi_\lambda(\alpha)$, если мы вмѣсто (λ, μ) подставимъ $(\lambda f, f)$ и $(f, \lambda f)$

Такъ что

$$\psi_\lambda(\alpha) = \sum \alpha^{ind\,t - (\lambda+1) ind(t+1)} = \sum \alpha^{\lambda\, ind\,t - (\lambda+1) ind(t+1)} .$$

Обозначая черезъ λ' цѣлое число, удовлетворяющее сравненію

$$\lambda\lambda' \equiv 1 \;(mod\; e) ,$$

получаемъ

$$\psi_\lambda(\alpha^{\lambda'}) = \sum \alpha^{\lambda\lambda'\, ind\,t - (\lambda\lambda' + \lambda') ind(t+1)} = \sum \alpha^{ind\,t - (\lambda'+1) ind(t+1)} ,$$

откуда

(1) $$\psi_\lambda(\alpha^{\lambda'}) = \psi_{\lambda'}(\alpha) .$$

Замѣняя λ на $(-\lambda \quad \mu)$, находимъ

$$\frac{(\varepsilon^{-\lambda-\mu}, r)(\varepsilon^{\mu}, r)}{(\varepsilon^{-\lambda}, r)} = \psi_{-\lambda-\mu,\mu}(\varepsilon),$$

или, умножая лѣвую часть на

$$\frac{(\varepsilon^{\lambda+\mu}, r)(\varepsilon^{\lambda}, r)}{(\varepsilon^{\lambda+\mu}, r)(\varepsilon^{\lambda}, r)},$$

получаемъ

$$\psi_{-\lambda-\mu,\mu}(\varepsilon) = \frac{(\quad 1)^{\lambda+\mu}p(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{\mu}, r)}{(\quad 1)^{\lambda}p(\varepsilon^{\lambda+\mu}, r)},$$

откуда

(2) $$\psi_{-\lambda-\mu,\mu}(\varepsilon) = (\ -1)^{\mu}.\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon).$$

Изъ этой формулы выводится сразу соотвѣтственная формула для $\psi_{\lambda}(\alpha)$.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣнимъ числа (λ, μ) на $(\lambda f, f)$ и, кромѣ того, возьмемъ корень λ'' сравненія

$$\lambda + \lambda'' + 1 \equiv 0 \ (mod\ e).$$

Тогда получаемъ

(3) $$\psi_{\lambda}(\alpha) = (-1)^{f}\psi_{\lambda''}(\alpha).$$

Формулы (1), (2) и (3) сводятъ вычисленіе всѣхъ функцій ψ_{λ} на вычисленіе приблизительно $^1/_6$ части.

Далѣе, имѣемъ

$$\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon) \cdot \psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon^{-1}) = \frac{(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{\mu}\ r)(\varepsilon^{\ \lambda}, r)(\varepsilon^{-\mu}, r)}{(\varepsilon^{\mu+\lambda}, r)(\varepsilon^{-\lambda-\mu}, r)} = \frac{(-1)^{\lambda}p \,.\, (-1)^{\mu}p}{(-1)^{\lambda+\mu}p} = p.$$

Итакъ получаемъ

(4) $$\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon) \cdot \psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon^{-1}) = p.$$

Отсюда, замѣняя (λ, μ) на $(\lambda f, f)$, получаемъ

(5) $$\psi_{\lambda}(\alpha) \cdot \psi_{\lambda}(\alpha^{-1}) = p.$$

Введемъ три, недѣлящихся на $p-1$, числа λ, μ и ν такія, что суммы $\lambda+\mu$ и $\lambda+\mu+\nu$ не дѣлятся на $p-1$. Тогда

$$\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)\psi_{\lambda+\mu,\nu}(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{\mu}, r)(\varepsilon^{\lambda+\mu}, r)(\varepsilon^{\nu}, r)}{(\varepsilon^{\lambda+\mu}, r)(\varepsilon^{\lambda+\mu+\nu}, r)} = \frac{(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{\mu}, r)(\varepsilon^{\nu}, r)}{(\varepsilon^{\lambda+\mu+\nu}, r)},$$

т е

$$\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)\psi_{\lambda+\mu,\nu}(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon^{\lambda}, r)(\varepsilon^{\mu}, r)(\varepsilon^{\nu}, r)}{(\varepsilon^{\lambda+\mu+\nu}, r)}.$$

Итакъ, мы видимъ, что произведеніе $\psi_{\lambda,\mu}\psi_{\lambda+\mu,\nu}$ симметрично относительно трехъ буквъ λ, μ и ν и не мѣняется, если эти числа какъ угодно переставлять.

Такъ, напр., получаемъ

$$\psi_{\lambda,\mu}(\varepsilon)\,.\,\psi_{\lambda+\mu,\nu}(\varepsilon)=\psi_{\mu,\nu}(\varepsilon)\,.\,\psi_{\mu+\nu,\lambda}(\varepsilon)\,.$$

Отсюда, замѣняя $(\lambda\,,\,\mu\,,\,\nu)$ на $(2\lambda f\,,\,f\,,\,f)$ и принимая во вниманіе, что

$$\psi_{2f,2\lambda f}(\varepsilon)=\psi_{\lambda}(\alpha^2),$$

получаемъ

(6) $$\psi_{2\lambda}(\alpha)\,.\,\psi_{2\lambda+1}(\alpha)=\psi_1(\alpha)\psi_{\lambda}(\alpha^2)\,.$$

Приведенными 6-ю формулами исчерпываются формулы, позволяющія сводить вычисленіе ψ_λ при однихъ значеніяхъ λ на вычисленіе тѣхъ же функцій при другихъ.

Jacobi сдѣлалъ попытку при помощи этихъ формулъ для всякаго заданнаго простого числа l выразить всѣ $(l-2)$ функціи $\psi_\lambda(\alpha)$ черезъ сопряженныя величины одной изъ нихъ, т. е. черезъ $\psi_1(\alpha)$, $\psi_1(\alpha^2)$, $\psi_1(\alpha^3)$, ... Его попытка оказалась удачной для всѣхъ простыхъ чиселъ до $l=23$. Jacobi поэтому высказалъ предположеніе, что это обстоятельство всегда имѣетъ мѣсто.

Однако Kronecker высказалъ предположеніе, что общая теорема Jacobi, вѣроятно, несправедлива.

Теорема Jacobi.

§ 44.

Разсмотримъ теперь выраженіе

$$\psi_{\lambda,\mu}(g)\,,$$

гдѣ g — первообразный корень, представляющій основаніе таблицы индексовъ, при помощи которой вычисляется сама функція ψ_λ.

Получаемъ

$$\psi_{\lambda,\mu}(g)=\sum_{t=1}^{t=p-2}g^{\mu\,\mathrm{ind}\,t+\nu\,\mathrm{ind}(t+1)}\,;$$

здѣсь λ и μ мы будемъ считать положительными числами, не превосходящими $p-1$, а ν есть число удовлетворяющее сравненію

$$\lambda+\mu+\nu\equiv 0\;(mod\,p-1)$$

и меньшее, чѣмъ $p-1$.

Итакъ, имѣемъ

$$\psi_{\lambda,\mu}(g) \equiv \sum_{1}^{p-2} t^{\mu}(t+1)^{\nu} \pmod p.$$

Не трудно видѣть, что сумму въ правой части сравненія можно распространить на всѣ числа

$$1, 2, 3, \ldots p-1,$$

ибо при $t=p-1$, $t+1=p$.

Такъ что получаемъ окончательно

(1)
$$\psi_{\lambda,\mu}(g) \equiv \sum_{1}^{p-1} t^{\mu}(t+1)^{\nu} \pmod p,$$

или, примѣняя формулу бинома Nevton'a, находимъ

(2)
$$\psi_{\lambda,\mu}(g) \equiv \sum_{h=0}^{h=\nu} C_{\nu}^{h} \sum_{t=1}^{t=p-1} t^{\mu+h} \pmod p.$$

Изъ теоріи чиселъ извѣстно, что

(3)
$$\sum t^{\mu+h} \equiv 0 \pmod p,$$

если $\mu+h$ не дѣлится на $p-1$ и

(4)
$$\sum t^{\mu+h} \equiv -1 \pmod p,$$

если $\mu+h$ дѣлится на $(p-1)$.

Покажемъ теперь, что если $\lambda+\mu<p-1$, то случай (4) не встрѣтится, а, если $\lambda+\mu>p-1$, то этотъ случай встрѣтится только одинъ разъ.

Итакъ, разсмотримъ $\lambda+\mu<p-1$; число ν будетъ $p-1-\lambda-\mu$.

Показатель $\mu+h$ пробѣгаетъ слѣдующія значенія

$$\mu, \mu+1, \ldots p-1-\lambda=\mu+\nu.$$

Всѣ эти значенія суть цѣлыя положительныя числа и меньшія $p-1$. Значитъ, ни одно изъ чиселъ не дѣлится на $p-1$.

Во второмъ случаѣ $\lambda+\mu>p-1$ и $\nu=2(p-1)-\lambda-\mu$. Тогда показатель $\mu+h$ пробѣгаетъ рядъ значеній

$$\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots 2(p-1)-\lambda.$$

Въ этомъ случаѣ будетъ существовать одно число h, а именно $h=p-1-\mu$, при которомъ $\mu+h$ дѣлится на $(p-1)$, и мы получаемъ слѣдующую теорему Jacobi.

Функція $\psi_{\lambda,\mu}(g) \equiv 0 \pmod p$, *если* $\lambda+\mu<p-1$, *а* $\psi_{\lambda,\mu}(g) \equiv$ $\equiv -C_{2(p-1)-\lambda-\mu}^{p-1-\mu} \pmod p$ *при* $\lambda+\mu>p-1$.

Gauss'овы суммы.

§ 45.

Разсмотримъ одинъ изъ самыхъ важныхъ частныхъ случаевъ вышеприведенной теоріи, а именно $e = 2$.

Тогда мы имѣемъ два періода

$$\eta = 1 + r_2 + r_4 + \ldots + r_{p-3}$$

$$\eta_1 = r_1 + r_3 + r_5 + \ldots + r_{p-2}.$$

Эти два періода носятъ названіе Gauss'овыхъ суммъ.

Разсмотримъ резольвенту

$$(-1, r) = \eta - \eta_1.$$

Не трудно видѣть, что

$$\eta = \sum r^a \text{ и } \eta_1 = \sum r^b,$$

гдѣ показатели: a пробѣгаетъ совокупность квадратичныхъ вычетовъ; b - совокупность невычетовъ; ибо, какъ извѣстно, index'ы квадратичныхъ вычетовъ суть числа четныя, а index'ы квадратичныхъ невычетовъ суть числа нечетныя.

Итакъ, имѣемъ

$$(-1, r) = \sum r^a - \sum r^b = \sum_{s=1}^{s=p-1} \left(\frac{s}{p}\right) r^s.$$

Будемъ разсматривать болѣе общую сумму

$$S_k = \sum_{s=1}^{s=p-1} \left(\frac{s}{p}\right) r^{ks}.$$

Тогда $S_k = (-1, r^k)$. На основаніи формулы (I) § 36 мы получаемъ

$$(-1, r)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p,$$

откуда

$$S_1 = (-1, r) = \pm \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}.$$

Указаніе знака въ послѣдней формулѣ представило Gauss'у, по его соб-

ственному признанію, большія затрудненія. Оказывается, что этотъ знакъ зависитъ отъ корня r. Gauss публиковалъ свое рѣшеніе вопроса о знакѣ въ послѣдней формулѣ въ мемуарѣ: Summatio quarundam serierum singularium.

Мы не будемъ здѣсь заниматься этой задачей и отошлемъ читателя къ книгѣ: проф. Д. А. Граве „Ариѳметическая теорія алгебраическихъ величинъ" т. 1, въ которой вопросъ о знакѣ разобранъ со всей подробностью.

Примѣнимъ Gauss'овы суммы къ доказательству закона взаимности. Итакъ, возьмемъ формулу

$$S_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.p.$$

Пусть q будетъ другое простое (нечетное) число. Возвысимъ обѣ части послѣдняго равенства въ степень $\frac{q-1}{2}$.

Получимъ

$$S_1^{q-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.p^{\frac{q-1}{2}},$$

или

(1) $$S_1^q = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}.S_1.$$

Разсмотримъ выраженіе [1])

$$S_k\left(\frac{k}{p}\right),$$

гдѣ k не дѣлится на p.

Получаемъ

$$S_k\left(\frac{k}{p}\right) = \sum\left(\frac{ks}{p}\right).r^{ks},$$

Если s пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю p, то число $s' = sk$ будетъ пробѣгать ту же систему вычетовъ, и мы имѣемъ

$$S_k\left(\frac{k}{p}\right) = \sum\left(\frac{s'}{p}\right)r^{s'} = S_1,$$

или иначе

(2) $$S_k = \left(\frac{k}{p}\right).S_1,$$

Теперь на основаніи равенствъ (1) и (2) имѣемъ

(3) $$S_1^q - S_q = \left[(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right)\right] S_1.$$

---

[1]) Свойства символа Legendre'а можно найти въ книгѣ Д. Граве. Элементарный курсъ теоріи чиселъ. 1913 г.

Лѣвая часть послѣдняго равенства представляетъ изъ себя формулу

$$\left(\sum\left(\frac{s}{p}\right)r^s\right)^q - \sum\left(\frac{s}{p}\right)r^{qs}.$$

Но, такъ какъ q нечетное простое число, то

$$\left(\frac{s}{p}\right)^q = \left(\frac{s}{p}\right).$$

Значитъ, въ послѣдней разности при вычитаніи степени q отдѣльныхъ членовъ пропадаютъ. Значитъ, остаются только такіе члены, у которыхъ биноміальные коэффиціенты имѣютъ видъ

$$\frac{q(q-1)\ldots 2.1}{1.2.3\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots 1.2\ldots\gamma},$$

гдѣ

$$\alpha+\beta+\ldots+\gamma=q.$$

Эти коэффиціенты суть цѣлыя числа, дѣлящіяся на q, ибо простой множитель q въ знаменателя совсѣмъ не входитъ, такъ какъ всѣ числа α, β, .. γ меньше q.

Значитъ, всѣ коэффиціенты при разныхъ степеняхъ r въ правой части (3) дѣлятся на q и мы получаемъ

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{q}{p}\right) (mod\ q).$$

Но

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{p}{q}\right) (mod\ q);$$

слѣдовательно, имѣемъ

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right) \equiv \left(\frac{q}{p}\right) (mod\ q).$$

Такъ какъ обѣ части послѣдняго сравненія суть единицы взятыя съ тѣмъ или другимъ знакомъ, а модуль $q \neq 2$, то сравненіе обращается въ равенство, и мы получаемъ законъ взаимности

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

§ 46.

Что касается двухъ дополненій къ закону взаимности, то первое дополненіе состоящее въ томъ, что

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

слѣдуетъ изъ самого опредѣленія (изъ такъ-называемаго эйлеровскаго критеріума).

Второе дополненіе будетъ состоять въ формулѣ

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

т. е. число 2 есть квадратичный вычетъ простыхъ чиселъ вида $8n\pm 1$ и невычетъ чиселъ вида $8n\pm 3$.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$\sum r^{ka}+\sum r^{kb}=-1$$

и

$$\sum r^{ka}-\sum r^{kb}=S_k=\left(\frac{k}{p}\right)S_1,$$

то отсюда находимъ сумму

$$\sum r^{ka}=\frac{1}{2}\left[-1+\left(\frac{k}{p}\right).S_1\right],$$

что при $k=2$ даетъ

$$\sum r^{2a}=\frac{1}{2}\left[-1+\left(\frac{2}{p}\right)S_1\right].$$

Разсмотримъ теперь разность

(1) $$(\sum r^a)^2-\sum r^{2a}.$$

Найдемъ сначала

$$(\sum r^a)^2.$$

Такъ какъ

$$\eta+\eta_1=-1 \text{ и } \eta-\eta_1=S_1,$$

то

$$\eta=\frac{1}{2}(-1+S_1).$$

Слѣдовательно,

$$\left(\sum r^a\right)^2 = \eta^2 = \left[\frac{1}{2}(-1+S_1)\right]^2.$$

Теперь разность (1) перепишется такъ:

$$\left(\sum r^a\right)^2 - \sum r^{2a} = \left[\frac{1}{2}(-1+S_1)\right]^2 - \frac{1}{2}\left[-1+\left(\frac{2}{p}\right)S_1\right],$$

или

$$\left(\sum r^a\right)^2 - \sum r^{2a} = \frac{1}{4} - \frac{S_1}{2} + \frac{S_1^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{p}\right)S_1.$$

Но

$$S_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.p;$$

слѣдовательно,

$$\left(\sum r^a\right)^2 - \sum r^{2a} = \frac{3+(-1)^{\frac{p-1}{2}}.p}{4} - \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{2}{p}\right)\right]S_1,$$

или, полагая $S_1 = \sum r^a - \sum r^b$, получимъ

$$\left(\sum r^a\right)^2 - \sum r^{2a} = \left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{2}{p}\right)\right] - \frac{3+(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{4}\right\}.\sum r^b -$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{2}{p}\right)\right] + \frac{3+(-1)^{\frac{p-1}{2}}.p}{4}\right\}.\sum r^a,$$

ибо $\sum r^b + \sum r^a = -1$.

Замѣтимъ, что въ разности (1) всѣ коэффиціенты должны быть числа цѣлыя и четныя.

Поэтому изъ послѣдней формулы слѣдуетъ

$$2\left[1+\left(\frac{2}{p}\right)\right] \equiv 3 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}.p \pmod{8}.$$

Изъ этого сравненія видимъ, что для простыхъ чиселъ p формы $8n \pm 1$ должно быть $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$; а для чиселъ вида $8n \pm 3$, $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$. Отсюда имѣемъ

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Разложеніе простыхъ чиселъ вида $4n+1$ на сумму двухъ квадратовъ.

§ 47.

Euler доказалъ очень важную теорему относительно простыхъ чиселъ вида $4n+1$, а именно онъ показалъ, что простыя числа этого вида раскладываются на сумму двухъ квадратовъ, причемъ это разложеніе совершается однимъ только способомъ.

Изъ этой теоремы получается дальнѣйшее слѣдствіе, состоящее въ томъ, что если нѣкоторое число вида $4n+1$ раскладывается двумя способами на сумму квадратовъ, то оно не можетъ быть простымъ. Такъ напримѣръ, $65 = 1^2 + 8^2$ и $65 = 7^2 + 4^2$, и, слѣдовательно, это число не можетъ быть простымъ.

Въ единственности разложенія простого числа p на сумму двухъ квадратовъ можно будетъ убѣдиться такъ. Пусть число p раскладывается двумя способами на сумму квадратовъ, т. е.

$$p = x^2 + y^2$$

и

$$p = \xi^2 + \eta^2.$$

Тогда изъ тождества

$$(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2) = (x\xi+y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2$$

имѣемъ

(1) $$p^2 = (x\xi + y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2.$$

Переставляя буквы ξ и η, получимъ

(2) $$p^2 = (x\xi - y\eta)^2 + (x\eta + y\xi)^2.$$

Кромѣ того

$$(x\eta + y\xi)(x\eta - y\xi) = x^2\eta^2 - y^2\xi^2 = (p - y^2)\eta^2 - y^2(p - \eta^2) = p(\eta^2 - y^2);$$

такъ что окончательно имѣемъ

(3) $$p(\eta^2 - y^2) = (x\eta + y\xi)(x\eta - y\xi).$$

Изъ формулы (3) мы замѣчаемъ, что одно изъ цѣлыхъ чиселъ

(4) $$x\eta + y\xi,\quad x\eta - y\xi$$

должно дѣлится на p.

Но по формуламъ (1) и (2) мы замѣчаемъ, что эти числа не превосходятъ числа p. Оба они не могутъ равняться p потому что тогда первая

часть равенства (3) дѣлилась бы на p^2, что не возможно, ибо $\eta^2 - y^2$ по численной величинѣ меньше p, такъ какъ оба числа η^2 и y^2 меньше p.

Значитъ, одно изъ чиселъ (4) должно равняться нулю, и мы получаемъ

$$x\eta = \pm y\xi,$$

$$x^2\eta^2 = y^2\xi^2,$$

$$(p - y^2)\eta^2 = (p - \eta^2)y^2,$$

откуда

$$\eta^2 = y^2 \text{ и } \xi^2 = x^2,$$

и значитъ два разложенія оказываются тождественными.

Теорія функцій ψ_λ даетъ общее рѣшеніе задачи разложенія простого числа вида $4n + 1$ на квадраты. Въ самомъ дѣлѣ; по формулѣ

$$\psi_2(i)\psi_2(i^{-1}) = p$$

получаемъ

$$\psi_2(i) = A + Bi = \sum i^{\operatorname{ind} t - 3\operatorname{ind}(t+1)} = \sum i^{\operatorname{ind}(t^2+t)},$$

гдѣ A и B числа цѣлыя, и

$$\psi_2(i^{-1}) = A - Bi,$$

отсюда

$$p = A^2 + B^2.$$

Построеніе правильнаго 17-угольника.

§ 48.

Построеніе правильнаго 17-угольника, равносильное дѣленію окружности на 17 равныхъ частей, сводится аналитически на рѣшеніе уравненія

$$\xi^{16} + \xi^{15} + \ldots + \xi^2 + \xi + 1 = 0.$$

Рѣшая его, какъ возвратное, получимъ равенство

$$\xi + \frac{1}{\xi} = x$$

и уравнение

(1) $$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Полагая

$$a = \frac{2\pi}{17},$$

получимъ

$$\xi = \operatorname{Cos} ka + i \operatorname{Sin} ka, \quad \frac{1}{\xi} = \operatorname{Cos} ka - i \operatorname{Sin} ka,$$

такъ что

(2) $$x = 2 \, Cos \, ka \,.$$

При подстановкѣ въ выраженіе (2) значеній

$$k = 1 \,, \, 2 \,, \, 3 \,, \, .. \;\; 16$$

получимъ только восемь различныхъ значеній

$$2 \, Cos \, a \,, \; 2 \, Cos \, 2a \,, \; ... \; 2 \, Cos \, 8a \,;$$

остальныя выраженія при $k > 8$ не даютъ новыхъ корней, ибо

$$Cos \, ka = Cos \, (17\text{-}k)a \,.$$

Формула

$$2 \, Cos \, \alpha \, Cos \, \beta = Cos \, (\alpha + \beta) + Cos \, (\alpha - \beta)$$

показываетъ, что произведеніе двухъ изъ корней (2) § 47 даетъ сумму другихъ двухъ изъ нихъ

$$[2 \, Cos \, ka][2 \, Cos \, la] = 2 \, Cos \, (k + l)a + 2 \, Cos \, (k - l)a \,.$$

§ 49.

Покажемъ теперь, что абсолютныя значенія корней $2 \, Cos \, ka$ уравненія (1) § 47 будутъ равны различнымъ значеніямъ сторонъ правильнаго вписаннаго 34-угольника.

Раздѣлимъ полуокружность на 17 равныхъ частей и поставимъ у точекъ дѣленія числа

$$0 \,, \, 1 \,, \, 2 \,, \, .. \;\; 17 \,.$$

Обозначимъ черезъ ρ_k длину прямой, соединяющей 0 съ k; число k будетъ взаимно простое съ 34 тогда, когда оно будетъ нечетнымъ и неравнымъ 17; мы получимъ слѣдующія восемь длинъ

$$\rho_1 \,, \; \rho_3 \,, \; \rho_5 \,, \; \rho_7 \,, \; \rho_9 \,, \; \rho_{11} \,, \; \rho_{13} \,, \; \rho_{15} \,,$$

которыя будутъ сторонами различныхъ (звѣдчатыхъ) правильныхъ вписанныхъ 34-угольниковъ.

Мы замѣчаемъ, что

$$\rho_k = 2 \, Sin \, \frac{k\pi}{34} \,.$$

Тогда получается слѣдующее выраженіе для корня уравненія (1) § 47.

$$2\,Cos\,ka = 2\,Sin\left(\frac{\pi}{2} - ka\right) = 2\,Sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k\pi}{17}\right) = 2\,Sin\,\frac{17-4k}{34}\,\pi = \pm\rho_{17-4k}.$$

Мы получаемъ

$$2\,Cos\,a = \rho_{13}\,,\quad 2\,Cos\,5a = -\rho_3$$

$$2\,Cos\,2a = \rho_9\,,\quad 2\,Cos\,6a = -\rho_7$$

$$2\,Cos\,3a = \rho_5\,,\quad 2\,Cos\,7a = -\rho_{11}$$

$$2\,Cos\,4a = \rho_1\,,\quad 2\,Cos\,8a = -\rho_{15}\,.$$

Полагая [1])

$$y = \rho_{13} - \rho_{15} + \rho_1 + \rho_9 = 2\,Cos\,a + 2\,Cos\,3^2a + 2\,Cos\,3^4a + 2\,Cos\,3^6a$$

$$y_1 = \rho_5 - \rho_{11} - \rho_3 - \rho_7 = 2\,Cos\,3a + 2\,Cos\,3^3a + 2\,Cos\,3^5a + 2\,Cos\,3^7a\,,$$

получимъ

$$y + y_1 = 1\,,\quad yy_1 = -4\,.$$

Но y_1 число отрицательное, потому что $\rho_{11} > \rho_5$, слѣдовательно, полагая $y_1 = -y'$, получимъ

(1) $$y - y' = 1\,,\quad yy' = 4\,.$$

Далѣе положимъ

$$z = \rho_{13} + \rho_1 = 2\,Cos\,a + 2\,Cos\,3^4a$$

$$z_1 = -\rho_{15} + \rho_9 = 2\,Cos\,3^2a + 2\,Cos\,3^6a\,.$$

Очевидно, что z_1 отрицательно, ибо $\rho_{15} > \rho_9$, слѣдовательно, полагая $z_1 = -z'$, получимъ

(2) $$z - z' = y\,,\quad zz' = 1\,.$$

Продѣлаемъ тоже самое для y_1.

$$u = \rho_5 - \rho_3 = 2\,Cos\,3a + 2\,Cos\,3^5a$$

$$u_1 = -\rho_{11} - \rho_7 = 2\,Cos\,3^3a + 2\,Cos\,3^7a\,.$$

Число u положительное, а число u_1 отрицательное. Полагая $u_1 = -u'$, получимъ

(3) $$u' - u = y'\,,\quad uu' = 1\,.$$

Наконецъ, имѣемъ

$$x = \rho_{13}\,,\quad x_1 = \rho_1$$

откуда получаемъ

(4) $$x + x_1 = z\,,\quad xx_1 = u$$

---

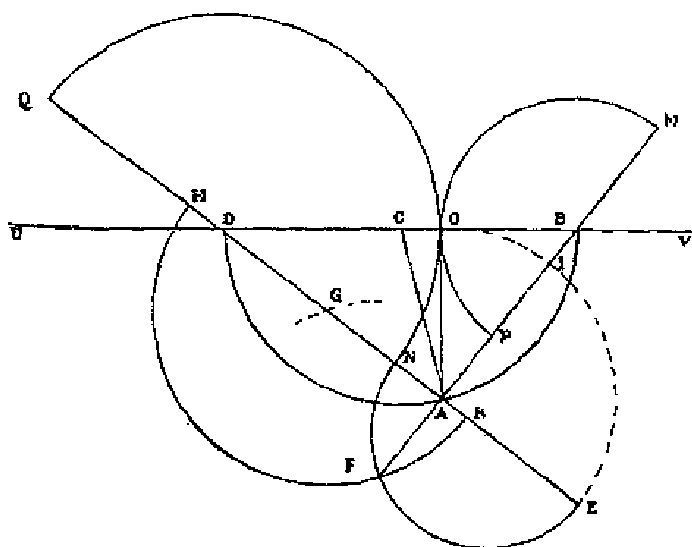
[1]) Число 3 есть первообразный корень числа 17

Построивъ x и x_1, получимъ ρ_1, сторону правильнаго 34-угольника, а, значитъ, и сторону правильнаго 17-угольника.

§ 50.

Получаемъ слѣдующее построеніе формулы (1), (2), (3), (4) предыдущаго параграфа.

Отъ точки C, взятой на произвольной прямой VU, откладываемъ отрѣзокъ CO, равный по величинѣ $\frac{1}{4}$ произвольно выбранной единицы. Изъ точки O возставляемъ къ прямой VU перпендикуляръ и откладываемъ на немъ единицу длины до точки A. Изъ точки C, какъ изъ центра,



Черт. 16.

описываемъ окружность радіусомъ равнымъ CA; обозначимъ его точки встрѣчи съ прямою VU буквами B и D. Нетрудно видѣть, что

$$OB = \frac{y}{2}, \quad OD = \frac{y'}{2},$$

въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2OD - 2OB &= 4OC = 1, \\ 2OD \,.\, 2OB &= 4OA^2 = 4. \end{aligned}$$

Соединимъ точку A съ точками B и D прямыми AB и AD и продолжимъ каждую въ обѣ стороны; изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ длинѣ OB опишемъ окружность, которая встрѣтитъ прямую AB въ точкахъ P и M.

Нетрудно видѣть, что

$$AM = z\,,\ AP = z'\,;$$

въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$AM - AP = PM = 2OB = y\,,$$

(2)

$$AM\,.\,AP = OA^2 = 1\,,$$

значитъ, равенства (2) § 49 имѣютъ мѣсто.

Подобнымъ же образомъ изъ точки D, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ длинѣ OD опишемъ окружность, которая встрѣтитъ прямую DA въ точкахъ N и Q; нетрудно видѣть, что

$$AN = u\,,\ AQ = u'\,;$$

въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$AQ - AN = NQ = 2DO = y',$$

а

$$AN\,.\,AQ = OA^2 = 1\,,$$

слѣдовательно, наши равенства (3) § 49 имѣютъ мѣсто.

Далѣе изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ $OA = 1$, опишемъ окружность пересѣкающуюся въ точкѣ E съ прямою AD; на прямой EN, какъ на діаметрѣ, построимъ кругъ, который пересѣчетъ продолженіе прямой AB въ точкѣ F; изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ половинѣ отрѣзка AM, дѣлаемъ на прямой AD засѣчку въ точкѣ G; изъ точки G, какъ изъ центра, тѣмъ же радіусомъ описываемъ окружность; эта окружность проходитъ, очевидно, черезъ точку F и встрѣчаетъ въ точкахъ K и H прямую AD.

Нетрудно видѣть, что

$$AK = x_1\,,\ AH = x\,;$$

въ самомъ дѣлѣ,

$$AK + AH = 2KG = 2\,.\,\frac{MA}{2} = AM = z$$

$$AK\,.\,AH = FA^2 = AN\,.\,AE = u\,.\,1 = u\,,$$

и, слѣдовательно, AK есть сторона вписаннаго въ кругъ тридцатичетыреугольника.

Полученная сторона AK соотвѣтствуетъ тридцатичетыреугольнику, вписанному въ кругъ радіуса равнаго единицѣ, т. е. AO на нашемъ чертежѣ

ГЛАВА XIX.

Рѣшеніе уравненій въ радикалахъ.

§ 1.

Обращаемся теперь къ задачѣ *алгебраическаго рѣшенія* уравненій, въ которой требуется выразить корни заданнаго уравненія при помощи ряда радикаловъ. Теорія группъ дѣлаетъ замѣчательно простыми всѣ относящіяся къ этой задачѣ соображенія.

§ 2.

Если мы пожелаемъ ясно представить себѣ задачу, то придется разсуждать такъ, надо расширить основное поле Ω черезъ послѣдовательное присоединеніе ряда радикаловъ такимъ образомъ, чтобы въ окончательно полученномъ полѣ заключались или всѣ корни заданнаго уравненія, или, по крайней мѣрѣ, нѣкоторая часть этихъ корней

Здѣсь являются два вопроса: 1) возможно ли такое расширеніе поля, 2) если оно возможно, то какъ осуществить это расширеніе.

Всякій новый присоединяемый радикалъ Z есть корень уравненія вида

(1) $$Z^m = A ,$$

гдѣ m натуральное число, а A величина изъ того поля, къ которому радикалъ Z присоединяется.

Итакъ, указанное расширеніе поля совершается при помощи корней *двучленныхъ* уравненій (1).

§ 3

Если неприводимое уравненіе рѣшается въ радикалахъ, то его группа послѣ присоединенія всѣхъ этихъ радикаловъ должна приводиться къ единицѣ.

Если выражается въ радикалахъ только часть корней, то послѣ присоединенія этихъ радикаловъ уравненіе должно сдѣлаться приводимымъ, слѣдовательно, его группа должна перестать быть транзитивною.

Мы знаемъ уже, что измѣненіе группы отъ присоединеній можетъ состоять только въ пониженіи ея порядка, поэтому въ обоихъ случаяхъ, рѣшается ли уравненіе вполнѣ или получаются только нѣкоторые корни, должно происходить пониженіе порядка группы.

§ 4.

Присоединимся къ способу разсужденія, предложенному Jordan'омъ [1]. Такъ какъ всякое двучленное уравненіе есть Abel'ево, то его рѣшеніе сводится къ рѣшенію ряда циклическихъ уравненій простой степени. Надо напомнить, что при рѣшеніи циклическихъ уравненій вводятся корни изъ единицы, но эти корни суть сами корни Abel'евыхъ уравненій и, слѣдовательно, ихъ выраженіе черезъ радикалы сводится къ ряду новыхъ циклическихъ уравненій простой степени.

Итакъ, можно сказать, что если корень заданнаго уравненія можетъ быть выраженъ въ радикалахъ, то онъ находится въ полѣ, получаемомъ отъ присоединенія къ основному Ω ряда корней *циклическихъ уравненій простой степени.*

§ 5.

Итакъ, предположимъ, что мы произвели всѣ, необходимыя для алгебраическаго вычисленія корня заданнаго уравненія, присоединенія корней циклическихъ уравненій. Группа понизилась. Пусть первое пониженіе порядка группы G заданнаго уравненія совершилось при присоединеніи нѣкотораго опредѣленнаго изъ ряда присоединенныхъ корней. Такимъ образомъ мы приходимъ къ задачѣ:

Найти условія, при которыхъ возможно пониженіе порядка группы G даннаго уравненія при присоединеніи корня циклическаго уравненія простой степени p.

[1] C. Jordan. Traité des substitution. P 386

Для общности можно заданное уравненіе не предполагать неприводимымъ, достаточно требованіе лишь неравенства корней

Итакъ, пусть пониженіе группы G совершается отъ присоединенія корня ξ циклическаго уравненія $\varphi(x) = 0$ простой степени p. Мы будемъ предполагать, что поле Ω, къ которому мы присоединяемъ ξ, получено изъ основного черезъ всѣ предшествовавшія присоединенія

Пусть корни уравненія $\varphi(x) = 0$ будутъ

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{p-1}$$

Такъ какъ циклическое уравненіе есть Abel'ево, то мы имѣемъ

$$\xi_1 = \mathfrak{D}_1(\xi), \ \xi_2 = \mathfrak{D}_2(\xi), \ \ldots \ \xi_{p-1} = \mathfrak{D}_{p-1}(\xi).$$

Итакъ, пусть присоединеніе ξ сводитъ группу G на ея дѣлителя G_1 съ индексомъ j; значитъ, въ полѣ $\Omega(\xi)$ группа Galois для заданнаго уравненія будетъ G_1.

Въ § 26 главы XVII мы видѣли, что индексъ j долженъ быть дѣлителемъ p, но p число простое, слѣдовательно, $j = p$. Въ томъ же параграфѣ мы видѣли, что корень ξ долженъ быть натуральною ирраціональностью

$$\xi = \omega(x_0, x_1, \ldots x_{p-1}).$$

Функція ω принадлежитъ къ группѣ G_1. Если мы разложимъ группу G на сопряженныя системы по подгруппѣ G_1, то получимъ

$$G = G_1 + G_1 S_1 + G_1 S_2 + \ldots + G_1 S_{p-1},$$

гдѣ подстановка S_i переводитъ корень ξ въ ξ_i.

Группа, къ которой принадлежитъ корень ξ_i есть

$$S_i^{-1} G_1 S_i.$$

Такъ какъ корни ξ и ξ_i на основаніи свойствъ Abel'евыхъ уравненій выражаются раціонально одинъ черезъ другой, то, значитъ, они принадлежатъ къ одной и той же группѣ

$$G_1 = S_i^{-1} G_1 S_i$$

Такъ какъ послѣднее равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи i, то подгруппа G_1 есть нормальный дѣлитель группы G. Мы приходимъ къ слѣдующей основной теоремѣ:

Для возможности рѣшенія въ радикалахъ уравненія н е о б х о д и м о, *чтобы его группа G имѣла нормальнаго дѣлителя G_1 простого индекса.*

О разрѣшимыхъ группахъ.

§ 6.

Обращаемся теперь къ нахожденію *необходимаго и достаточнаго* условія для полной рѣшимости въ радикалахъ заданнаго уравненія. Если всѣ корни уравненія выражаются въ радикалахъ, то группа уравненія послѣ присоединенія всѣхъ этихъ радикаловъ должна свестись къ единицѣ.

Мы видѣли уже, что группа G разрѣшимаго въ радикалахъ уравненія должна имѣть нормальнаго дѣлителя G_1 простого индекса p. Если $G_1 = 1$, то группа G есть циклическая простого порядка. Если же группа G_1 отлична отъ единицы, то мы можемъ примѣнить къ ней тѣ же самыя разсужденія и получить, что эта группа G_1 должна имѣть новаго нормальнаго дѣлителя G_2 простого индекса p_1 и т. д.

Опредѣленіе. Мы будемъ называть разрѣшимою всякую группу G, для которой можно составить рядъ подгруппъ

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \ldots G_{\mu-1},\ 1,$$

въ которомъ каждая слѣдующая группа G_{i+1} есть нормальный дѣлитель предыдущей G_i, имѣющій простой индексъ p_i $(G_0 = G,\ p_0 = p)$.

§ 7.

Теорема. *Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ возможности алгебраическаго рѣшенія уравненія является свойство разрѣшимости его группы.*

Свойство разрѣшимости группы надо понимать въ смыслѣ опредѣленія предыдущаго параграфа.

Необходимость теоремы слѣдуетъ непосредственно изъ соображеній §§ 5, 6. Обращаемся теперь къ доказательству ея достаточности.

Итакъ, пусть группа G даннаго уравненія *разрѣшимая*, докажемъ, что всѣ корни уравненія *выражаются* въ радикалахъ.

Мы имѣемъ рядъ подгруппъ

$$G,\ G_1,\ G_2 \ldots G_{\mu-1},\ 1$$

простыхъ индексовъ.

Пусть индексъ G_1 относительно G есть простое число p. Беремъ функцію $\omega(x_0,\ x_1,\ \ldots x_{n-1})$ корней заданнаго уравненія, принадлежащую *точно* подгруппѣ G_1, тогда, примѣняя къ функціи ω всѣ подстановки группы G, получимъ выраженія

$$(1) \qquad \omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots \omega_{p-1}.$$

которыя будутъ корнями нѣкотораго уравненія

$$\varphi(x) = 0 \quad (2)$$

степени p неприводимаго въ основномъ полѣ Ω.

Вслѣдствіе нормальности подгруппы G_1, всѣ величины (1) принадлежатъ одной и той же группѣ G_1, слѣдовательно, всѣ онѣ выражаются раціонально черезъ одну ω. Уравненіе (2) Abel'ево и въ тоже время, будучи простой степени, циклическое. Присоединеніе ω къ полю Ω сводитъ на основаніи § 15 главы XVII группу уравненія G къ подгруппѣ G_1. Но величина ω, какъ корень циклическаго уравненія выражается въ радикалахъ, слѣдовательно, пониженіе группы на подгруппу G_1 совершается черезъ присоединеніе радикаловъ Подобнымъ же образомъ можно будетъ далѣе понизить группу до подгруппы G_2 черезъ присоединеніе новыхъ радикаловъ и такъ далѣе до конца, когда группа обратится въ единицу и получится полное алгебраическое рѣшеніе заданнаго уравненія.

§ 8.

Остается сказать два слова относительно случая, когда нѣкоторые изъ корней заданнаго уравненія выражаются въ радикалахъ

Если не предполагать *неприводимости* уравненія, то ни какихъ заключеній сдѣлать нельзя, ибо возможны самыя разнообразныя явленія.

Перемножимъ два уравненія

$$f_1(x) = 0 \,, \; f_2(x) = 0$$

тогда получимъ новое

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) = 0 \,. \quad (1)$$

Если уравненіе $f_1(x) = 0$ рѣшается вполнѣ въ радикалахъ, то часть корней уравненія (1) выражается въ радикалахъ, причемъ, если $f_2(x) = 0$ рѣшается также въ радикалахъ, то имѣетъ мѣсто случай полнаго рѣшенія уравненія (1) Если же уравненіе $f_2(x) = 0$ не рѣшается въ радикалахъ, то не будетъ существовать полнаго рѣшенія въ радикалахъ уравненія (1).

Если мы будемъ разсматривать неприводимыя уравненія, то для нихъ существуетъ теорема, замѣченная Abel'емъ.

Если одинъ корень неприводимаго уравненія получается черезъ рѣшеніе ряда циклическихъ уравненій, то уравненіе допускаетъ полное алгебраическое рѣшеніе.

Не смотря на большую важность этой теоремы Abel'я, мы не будемъ останавливаться на ея доказательствѣ, отсылая читателя къ доказательству, данному профессоромъ Д. Ѳ. Селивановымъ [1]).

§ 9.

Примѣромъ разрѣшимой группы можетъ служить симметрическая группа G подстановокъ четырехъ буквъ. Если мы обозначимъ черезъ A ея знакопеременную группу, черезъ V — Vierergruppe и, наконецъ, черезъ Q — группу (4) § 22 главы XV.

Мы будемъ имѣть рядъ подгруппъ

$$G, A, V, Q, 1$$

съ индексами

$$2, 3, 2, 2$$

Такъ какъ эти индексы суть *простыя* числа, то группа G *разрѣшимая* и общее уравненіе 4-й степени рѣшается въ радикалахъ.

Приведенное нами въ § 23 главы XV полное рѣшеніе уравненія 4-ой степени есть не что иное, какъ осуществленіе на конкретномъ примѣрѣ соображеній доказательства, приведеннаго въ § 7.

§ 10.

Опредѣленіе *разрѣшимой* группы находится въ связи со слѣдующими весьма важными разсужденіями Jordan'a.

Пусть разсматривается произвольно взятая группа G. Если она простая и не имѣетъ нормальныхъ дѣлителей, то пишемъ только два знака

$$G, 1$$

Допустимъ, что группа G имѣетъ нормальнаго дѣлителя G_1, обладающаго свойствомъ не заключаться въ другомъ нормальномъ дѣлителѣ большаго порядка. Для группы G_1 составляемъ подобнаго же нормальнаго дѣлителя G_2 и продолжаемъ далѣе пока не дойдемъ до простой группы $G_{\nu-1}$, имѣющей, слѣдовательно, единицу единственнымъ нормальнымъ дѣлителемъ.

Полученный рядъ послѣдовательныхъ нормальныхъ дѣлителей

(1) $$G, G_1, G_2, \ldots G_{\nu-1}, 1$$

носитъ названіе *ряда Jordan'a для заданной группы* G.

[1]) D. Seliwanoff. Acta Mathematica t. 19, 1895.

Пусть будетъ соотвѣтствующій ряду (1) рядъ индексовъ

(2) $$p\,,\ p_1\,,\ p_2\,,\ \ldots p_{\mu-1}\,.$$

Опредѣленіе *разрѣшимости* состоитъ въ томъ, что числа ряда (2) всѣ простыя.

Jordan доказываетъ относительно ряда (1) слѣдующую весьма важную теорему:

Разложеніе группы G въ рядъ (1) по нормальнымъ дѣлителямъ можетъ быть произведено на нѣсколько способовъ, но при всѣхъ этихъ различныхъ разложеніяхъ рядъ (2) состоитъ всегда изъ тѣхъ же чиселъ, только, быть можетъ, расположенныхъ въ другомъ порядкѣ

Можно сказать, что, если группа G заданнаго уравненія имѣетъ рядъ (1) нормальныхъ дѣлителей, то рѣшеніе заданнаго уравненія сводится къ рѣшенію ряда нормальныхъ уравненій

(3) $$\varphi(x)=0\,,\ \varphi_1(x)=0\,,\ \ldots\ \varphi_{\mu-1}(x)=0\,,$$

степеней $p\,,\ p_1\,,\ p_2\,,\ \ldots p_{\mu-1}\,.$

Если числа (2) всѣ простыя, то уравненія (3) всѣ циклическія и происходитъ полное алгебраическое рѣшеніе заданнаго уравненія. Если степень p_i нѣкотораго уравненія $\varphi_i(x)=0$ число *не простое*, то это уравненіе *не рѣшается* въ радикалахъ. Въ самомъ дѣлѣ, Hölder'овская группа $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ уравненія $\varphi_i(x)=0$ простая, ибо G_{i+1} есть нормальный дѣлитель G_i, не заключающійся въ большемъ (см. § 23 главы XVII). Слѣдовательно, не имѣя другихъ нормальныхъ дѣлителей кромѣ единицы и будучи составного порядка, группа уравненія $\varphi_i(x)=0$ не можетъ быть разрѣшимою.

Теорема Jordan'а о неизмѣнности ряда индексовъ можетъ имѣть значеніе въ томъ смыслѣ, что трудность рѣшенія уравненія не мѣняется, какъ бы ни вести само рѣшеніе, ибо придется проходить черезъ нормальныя уравненія тѣхъ же степеней.

Я не буду останавливаться на доказательствѣ теоремы Jordan'а по слѣдующимъ соображеніямъ. Если уравненіе не рѣшается въ радикалахъ, то теорема Jordan'а имѣетъ мало практическаго значенія Если уравненіе алгебраически рѣшается, то теорема Jordan'а имѣетъ значеніе главнымъ образомъ при сравненіи разныхъ радикальныхъ выраженій одного и того же корня. Послѣдній вопросъ имѣетъ мало значенія для нашего элементарнаго изложенія

Теорема Abel'а.

§ 11.

Теорема. *Уравненія выше четвертой степени, не имѣющія аффекта, не рѣшаются въ радикалахъ.*

На основаніи доказаннаго въ § 51 главы V мы видимъ, что симметрическая группа G подстановокъ болѣе четырехъ элементовъ не имѣетъ другихъ нормальныхъ дѣлителей кромѣ знакоперемѣнной группы A. Въ § 50 главы V доказано, что при числѣ элементовъ болѣе четырехъ группа A простая, имѣющая, слѣдовательно, единственнымъ нормальнымъ дѣлителемъ единичную группу.

Итакъ, единственный возможный рядъ Jordan'а есть

$$G, A, 1$$

съ индексами

$$2, \frac{1.2.3\ldots n}{2}$$

такимъ образомъ мы замѣчаемъ, что группа G *не разрѣшимая* и теорема Abel'а доказана.

Доказанная нами теорема заключаетъ какъ частный случай теорему, относящуюся къ буквеннымъ уравненіямъ.

Буквенныя уравненія выше четвертой степени не рѣшаются въ радикалахъ.

Рѣшеніе численныхъ уравненій.

§ 12.

Теорема. *Разрѣшимая группа имѣетъ отличнаго отъ единицы коммутативнаго нормальнаго дѣлителя.*

Для группы простого порядка теорема, очевидно, имѣетъ мѣсто, ибо эта группа какъ циклическая есть сама коммутативная. Для доказательства общей теоремы употребимъ способъ индукціи: предположимъ, что теорема справедлива для группъ меньшаго порядка.

Если задана разрѣшимая группа G, то эта группа имѣетъ нормальнаго дѣлителя G_1, простого индекса. Предположимъ, что для группы G_1 теорема справедлива, т. е. что она имѣетъ коммутативнаго нормальнаго дѣли-

теля H_1 покажемъ, что подобнаго нормальнаго дѣлителя H будетъ имѣть и заданная группа G. Если H_1 есть въ тоже время нормальный дѣлитель группы G, то теорема доказана, ибо можно положить $H = H_1$

Если H_1 не есть нормальный дѣлитель группы G, то преобразовывая всѣми элементами G группу H_1 получимъ рядъ сопряженныхъ группъ

$$(1) \qquad H_1, H_2, \ldots H_k$$

Всѣ эти группы будутъ коммутативныя, какъ изоморфныя съ H_1. Кромѣ того всѣ эти группы будутъ нормальные дѣлители группы G_1, ибо группа $H_2 = S^{-1}H_1S$ должна быть нормальнымъ дѣлителемъ группы $S^{-1}G_1S$, а эта послѣдняя совпадаетъ съ G_1.

Если группы (1) имѣютъ общее пересѣченіе R, то группа R будетъ нормальнымъ дѣлителемъ G и теорема опять доказана, если только R отлично отъ единицы.

Остается разсмотрѣть лишь случай $R = 1$.

Предположимъ, что за H_1 выбранъ коммутативный нормальный дѣлитель группы G_1 *наименьшаго* порядка, тогда, очевидно, общимъ элементомъ каждыхъ двухъ группъ H_i и H_k можетъ быть только единица, ибо, иначе, общій дѣлитель H_i и H_k далъ бы коммутативнаго нормальнаго дѣлителя меньшаго порядка.

Возьмемъ произвольно элементъ A изъ группы H_i, а также произвольный элементъ B изъ группы H_k и разсмотримъ произведеніе

$$(2) \qquad A^{-1}B^{-1}AB.$$

Если это произведеніе перепишемъ такъ

$$(A^{-1}B^{-1}A)B,$$

то оно принадлежитъ къ группѣ H_k, ибо $A^{-1}B^{-1}A$ какъ преобразованіе элемента B^{-1} нормальнаго дѣлителя H_k при помощи элемента A группы G_1 должно давать новый элементъ того же нормальнаго дѣлителя. Подобнымъ же образомъ, переписывая произведеніе (2) такъ

$$A^{-1}(B^{-1}AB),$$

замѣчаемъ, что оно заключается въ группѣ H_i.

Итакъ, произведеніе (2) должно быть общимъ элементомъ двухъ группъ H_i, H_k, то есть

$$A^{-1}B^{-1}AB = 1,$$

или окончательно,

$$AB = BA.$$

Мы пришли къ теоремѣ, что элементы разныхъ группъ (1) перестановочны.

Пусть A_i пробѣгаетъ всю группу H_i, тогда элементы

$$A = A_1 A_2 \; .. \; A_i \; .. \; A_k$$

образуютъ нѣкоторую группу H

Докажемъ, что группа H будетъ искомымъ коммутативнымъ нормальнымъ дѣлителемъ группы G.

Коммутативность группы H слѣдуетъ изъ перестановочности элементовъ разныхъ группъ (1) и изъ коммутативности каждой изъ этихъ группъ въ отдѣльности. Чтобы убѣдиться въ томъ, что H нормальный дѣлитель G, достаточно написать формулу

$$S^{-1}AS = (S^{-1}A_1S)(S^{-1}A_2S) \; .. \; (S^{-1}A_kS).$$

§ 13.

Итакъ, мы пришли къ убѣжденію, что всякая разрѣшимая группа должна имѣть отличнаго отъ единицы коммутативнаго нормальнаго дѣлителя. Покажемъ, что единственное возможное предположеніе состоитъ въ томъ, что порядокъ этого нормальнаго дѣлителя долженъ равняться

$$p^{\omega},$$

т. е., степени простого числа p.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что порядокъ m коммутативнаго нормальнаго дѣлителя H есть

$$m = ab,$$

произведеніе двухъ взаимно простыхъ отличныхъ отъ единицы чиселъ a и b, тогда мы покажемъ, что *можно найти два другихъ коммутативныхъ нормальныхъ дѣлителя* $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ *порядковъ* a и b.

Существованіе двухъ дѣлителей $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ ведетъ къ противорѣчію, а именно; если мы будемъ предполагать заданное уравненіе примитивнымъ [1]), то оба дѣлителя (см. § 13 главы VII) должны быть транзитивными, слѣдовательно, степень n заданнаго уравненія должна дѣлить оба порядка a и b. что невозможно.

§ 14.

Итакъ, займемся доказательствомъ предложенія, что если разрѣшимая группа G имѣетъ Абелева нормальнаго дѣлителя H порядка $m=ab$,

---

[1]) Очевидно, что только такія уравненія и подлежатъ изслѣдованію.

то она имѣетъ подобнаго же дѣлителя $\mathfrak{H}$ порядка a. Для этой цѣли войдемъ въ нѣкоторыя подробности относительно абелевыхъ группъ вообще.

Пусть H будетъ абелева группа порядка m, а

(1) $$S_1 = 1 , S_2 , \ldots S_m$$

ея элементы, порядки которыхъ пусть будутъ

$$a_1 , a_2 , \ldots a_m$$

Пусть $\xi_1 , \xi_2 , \ldots \xi_m$ принимаютъ значенія полной системы вычетовъ по модулямъ $a_1 , a_2 , \ldots a_m$, тогда всякій элементъ группы (1) можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ

(2) $$S_1^{\xi_1} S_2^{\xi_2} \ldots S_m^{\xi_m}$$

и притомъ одинаковое число разъ Очевидно, что всякій элементъ S_i группы (1) получится, полагая въ (2)

$$\xi_1 = 0 , \ldots \xi_{i-1} = 0 , \xi_i = 1 , \xi_{i+1} = 0 , \ldots \xi_m = 0 .$$

Докажемъ теперь, что *при различныхъ значеніяхъ показателей* ξ_i *каждый элементъ будетъ повторяться одинаковое число разъ.*

Разсмотримъ равенство

(3) $$S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_m^{x_m} = 1 .$$

Положимъ, что мы нашли всѣ системы цѣлыхъ положительныхъ чиселъ $x_1 , x_2 , \ldots x_m$, удовлетворяющія равенству (3). Обозначимъ число такихъ системъ черезъ M, тогда нетрудно видѣть, что каждый элементъ S группы можетъ имѣть M представленій въ формѣ (2).

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что элементъ S получается при нѣкоторой системѣ

$$\xi_1 , \xi_2 , \ldots \xi_m$$

показателей; тогда тотъ же элементъ S получится и при системѣ

(4) $$\xi_1 + x_1 , \xi_2 + \xi_2 , \ldots \xi_m + x_m ,$$

ибо

$$S_1^{\xi_1 + x_1} S_2^{\xi_2 + x_2} \ldots S_m^{\xi_m + x_m} = S_1^{\xi_1} S_2^{\xi_2} \ldots S_m^{\xi_m} (S_1^{x_1} S_2^{x_2} \ldots S_m^{x_m}) = S_1^{\xi_1} S_2^{\xi_2} \ldots S_m^{\xi_m} .$$

Съ другой стороны, другихъ представленій этого элемента S, не получающихся при помощи показателей (4), не существуетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ какое нибудь другое представленіе того же элемента S

$$S_1^{\eta_1} S_2^{\eta_2} \ldots S_m^{\eta_m}.$$

Тогда получаемъ

$$S_1^{\eta_1} S_2^{\eta_2} \ldots S_m^{\eta_m} = S_1^{\xi_1} S_2^{\xi_2} \ldots S_m^{\xi_m}$$

или

$$S_1^{\eta_1 - \xi_1} S_2^{\eta_2 - \xi_2} \ldots S_m^{\eta_m - \xi_m} = 1.$$

Значитъ, разности

$$\eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2, \ldots \eta_m - \xi_m$$

должны представлять одну изъ системъ чиселъ

$$x_1, x_2, \ldots x_m$$

и мы получаемъ, слѣдовательно,

$$\eta_1 = \xi_1 + x_1, \eta_2 = \xi_2 + x_2, \ldots \eta_m = \xi_m + x_m,$$

т. е. показатели

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$$

выражаются по формуламъ (4).

Итакъ, мы видимъ, что число представленій всякаго элемента S равно M.

Будемъ давать въ формулѣ (2) показателямъ значенія, пробѣгающія полныя системы вычетовъ по модулямъ $a_1, \ldots a_m$. Число получаемыхъ такимъ образомъ выраженій будетъ равно произведенію $a_1 a_2 \ldots a_m$; при этомъ будутъ получаться всѣ m элементовъ группы, причемъ каждый M разъ, и мы получаемъ равенство

(5) $$a_1 a_2 \ldots a_m = mM.$$

Равенство (5) показываетъ, что всякое простое число p, входящее въ порядокъ m группы, должно входить множителемъ въ порядокъ a_i, по крайней мѣрѣ, одного изъ элементовъ S_i группы. Итакъ, $a_i = p\alpha$; тогда элементъ S_i^α группы будетъ имѣть порядокъ, равный простому числу p и мы получаемъ такое предложеніе: *всякому простому числу p, входящему въ порядокъ группы, соотвѣтствуетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ элементъ группы, имѣющій этотъ порядокъ.*

Нетрудно видѣть, что если A, B, C, ... суть элементы абелевой группы, порядки которыхъ суть α, β, γ, ..., то произведеніе $ABC\ldots$

имѣетъ порядокъ, равный дѣлителю наименьшаго кратнаго μ чиселъ α, β, γ, . . . Такое свойство слѣдуетъ прямо изъ формулы

$$(ABC\ldots)^{\mu}=A^{\mu}B^{\mu}C^{\mu}\ldots=1\,.$$

§ 15.

Покажемъ теперь, что въ *абелевой группѣ* H *порядка* $m=ab$, *гдѣ числа* a *и* b *взаимно простыя, существуетъ ровно* a *элементовъ* A, *порядки которыхъ суть дѣлители числа* a, *и ровно* b *элементовъ* B, *порядки которыхъ суть дѣлители числа* b.

Совокупность элементовъ A образуетъ, очевидно, нѣкоторую подгруппу $\mathfrak{A}$, а совокупность элементовъ B образуетъ подгруппу $\mathfrak{B}$. Пусть a' будетъ порядокъ подрупны $\mathfrak{A}$, а b' порядокъ подгруппы $\mathfrak{B}$.

Группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не могутъ имѣть кромѣ единицы другихъ общихъ элементовъ. Покажемъ, что число a' (порядокъ $\mathfrak{A}$) взаимно простое съ b.

Пусть p одно изъ простыхъ чиселъ, дѣлящихъ a'. На основанiи соображенiй предыдущаго параграфа существуетъ въ $\mathfrak{A}$ элементъ порядка p; значитъ, число p дѣлитъ число a, а не число b.

Подобнымъ же образомъ докажемъ, что число b' (порядокъ $\mathfrak{B}$) взаимно простое съ a.

Разсмотримъ символическое произведенiе

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,,$$

обозначающее совокупность элементовъ вида

$$AB\,,$$

гдѣ A пробѣгаетъ группу $\mathfrak{A}$, а B группу $\mathfrak{B}$.

Покажемъ, что

(1) $$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=H\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всякiй элементъ вида AB есть въ тоже самое время элементъ изъ H и обратно, можно показать, что всякiй элементъ S изъ H имѣетъ видъ AB. Для доказательства этого найдемъ два числа x и y, удовлетворяющiя равенству

$$ax+by=1\,,$$

тогда имѣемъ

(2) $$S=S^{ax}.S^{by}\,,$$

но очевидно, что

(3) $$(S^{ax})^{b}=1\,,\ (S^{by})^{a}=1\,,$$

ибо $ab=m$, а $S^{m}=1$ при всякомъ элементѣ S любой группы порядка m.

Формула (2) убѣждаетъ въ справедливости того, что надо доказать, ибо на основаніи (3) S^{by} есть элементъ изъ $\mathfrak{A}$, а S^{ax} элементъ изъ $\mathfrak{B}$

Для довершенія доказательства формулы (1) достаточно убѣдиться, что всякій элементъ S группы H только однимъ способомъ представляется въ видѣ AB

Допуская возможность двухъ подобнаго вида представленій, получимъ

$$AB = A_1B_1,$$

или, переписывая иначе,

$$AA_1^{-1} = BB_1^{-1} = C.$$

Элементъ C принадлежитъ къ $\mathfrak{A}$, если судить по его выраженію AA_1^{-1}, и принадлежитъ также къ группѣ $\mathfrak{B}$, если судить по выраженію BB_1^{-1}; слѣдовательно, $C = 1$, откуда $AA_1^{-1} = 1$, $BB_1^{-1} = 1$, или

$$A_1 = A, \; B_1 = B.$$

Итакъ, формула (1) справедлива.

Получаемъ, очевидно, $m = a'b'$ по числу различныхъ между собой произведеній AB.

Равенство

$$ab = a'b'$$

приводитъ, очевидно, къ двумъ слѣдующимъ

$$a' = a, \; b' = b$$

и теорема, поставленная въ началѣ параграфа, доказана вполнѣ.

§ 16.

Пусть H есть нормальный абелевскій дѣлитель разрѣшимой группы G. Покажемъ, что, если порядокъ H есть $m = ab$, гдѣ a и b два отличныхъ отъ единицы взаимно простыхъ числа, то можно найти другой абелевскій нормальный дѣлитель $\mathfrak{H}$ группы G, порядокъ котораго будетъ a.

Пусть группа H состоитъ изъ элементовъ

$$S_1, \; S_2, \; \ldots \; S_m.$$

Тогда возвысимъ эти элементы въ степень b, получаемъ

(1) $$S_1^b, \; S_2^b, \; \ldots \; S_m^b.$$

Нѣкоторые изъ этихъ элементовъ (1) будутъ одинаковые. Покажемъ, что различные изъ нихъ образуютъ искомую группу $\mathfrak{H}$.

Формула

$$\Sigma^{-1}S_i^b\Sigma = (\Sigma^{-1}S_i\Sigma)^b = S_k^b.$$

гдѣ Σ произвольный элементъ изъ G, показываетъ, что $\mathfrak{H}$ нормальный дѣлитель G. Покажемъ, что порядокъ $\mathfrak{H}$ какъ разъ равенъ числу a.

Очевидно, что порядокъ каждаго изъ элементовъ (1) есть дѣлитель числа a, ибо порядокъ каждаго элемента S_i группы H есть дѣлитель порядка $m = ab$ этой группы.

Съ другой стороны, среди элементовъ (1) заключается всякій элементъ S_s, порядокъ котораго есть дѣлитель числа a. Въ самомъ дѣлѣ, если $S_s^a = 1$; то, подбирая числа x и y такъ, чтобы было $ax + by = 1$, мы получимъ

$$S_s = S_s^{ax}S_s^{by} = (S_s^y)^b = S_\lambda^b,$$

т. е., элементъ S_s заключается между элементами (1).

Припоминая предыдущій параграфъ, мы приходимъ къ заключенію, что порядокъ группы $\mathfrak{H}$ есть a.

§ 18.

Сопоставляя послѣдніе результаты съ соображеніями § 13, мы приходимъ къ заключенію, что всякая примитивная разрѣшимая группа G должна имѣть отличнаго отъ нуля абелева нормальнаго дѣлителя $\mathfrak{H}$ порядка p^ω, гдѣ p простое число, а ω нѣкоторое натуральное число.

Группа $\mathfrak{H}$ должна быть транзитивна, иначе группа G будетъ импримитивной. Слѣдовательно, степень n уравненія, подлежащаго изученію, должна быть дѣлителемъ числа p^ω, то есть

$$n = p^\mu.$$

Мы пришли такимъ образомъ къ знаменитой теоремѣ Abel'a [1]).

Всякое рѣшаемое въ радикалахъ неприводимое уравненіе, степень котораго дѣлится по крайней мѣрѣ на два различныхъ простыхъ числа, должно быть импримитивнымъ.

Этой теоремѣ Galois [2]) даетъ иную формулировку.

Для разрѣшимости въ радикалахъ примитивнаго уравненія степени m должно быть $m = p^\nu$, гдѣ p простое число.

---

[1]) D. Gravé Comment on écrit les revues encyclopediques. Протоколы Кіевск. Физико-Матем. Общества.

[2]) E. Galois. Oeuvres complétes p. 11.

§ 18

Итакъ, пусть $\mathfrak{S}$ будетъ коммутативный нормальный дѣлитель группы G, имѣющій порядокъ p^k съ возможно малымъ показателемъ k, такъ что всякій отличный отъ единицы дѣлитель группы $\mathfrak{S}$ *не будетъ* уже нормальнымъ дѣлителемъ G.

Покажемъ, что всѣ элементы $\mathfrak{S}$ имѣютъ порядокъ p.

Допустимъ, что есть по крайней мѣрѣ одинъ элементъ порядка p^λ, гдѣ $\lambda > 1$. Разсмотримъ совокупность $\mathfrak{R}$ элементовъ изъ $\mathfrak{S}$ такихъ, порядки которыхъ не выше $p^{\lambda-1}$. Совокупность $\mathfrak{R}$ будетъ группа отличная, очевидно, отъ единицы. Нетрудно убѣдиться, что $\mathfrak{R}$ будетъ нормальнымъ дѣлителемъ группы G.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ одинъ элементъ K изъ $\mathfrak{R}$, то очевидно, что $S^{-1}KS$ будетъ имѣть тотъ же порядокъ, что и K, т. е. $S^{-1}KS$ будетъ принадлежать къ той же группѣ $\mathfrak{R}$. Мы пришли къ противорѣчію, ибо мы предположили, что группа $\mathfrak{S}$ не можетъ имѣть дѣлителя подобнаго $\mathfrak{R}$. Итакъ, $\lambda = 1$.

§ 19.

Чтобы разсмотрѣть ближе свойства группы $\mathfrak{S}$ воспользуемся ея свойствомъ, что порядокъ каждаго ея элемента, отличнаго отъ единицы, есть p.

Возьмемъ произвольный элементъ A_1 порядка p группы $\mathfrak{S}$.

Въ группу $\mathfrak{S}$ должны входить всѣ степени A_1, т. е.

$$(1) \qquad 1, A_1, A_1^2, \ldots A_1^{p-1}.$$

Другими словами группа G имѣетъ подгруппу $A_1^{x_1}$ гдѣ x_1 пробѣгаетъ всю систему вычетовъ $0, 1, 2, \ldots p-1$ по модулю p. Если $k = 1$, то группа (1) совпадетъ съ G. Если же $k > 1$, тогда въ группѣ G кромѣ элементовъ (1) долженъ заключаться по крайней мѣрѣ еще одинъ элементъ A_2, который тоже по предыдущему параграфу имѣетъ порядокъ p. Въ группѣ G будетъ заключаться подгруппа

$$(2) \qquad A_1^{x_1} A_2^{x_2},$$

въ которой x_1 и x_2 пробѣгаютъ полную систему вычетовъ по модулю p. Покажемъ, что порядокъ группы (2) есть p^2; для этой цѣли надо показать, что при двухъ системахъ показателей x_1, x_2 не могутъ получаться одинаковые элементы. Допустимъ обратное

$$A_1^{x_1} A_2^{x_2} = A_1^{x_1'} A_2^{x_2'};$$

если $x_2 = x_2'$, то, сокращая равенство на $A_2^{x_2}$, получимъ $A_1^{x_1} = A_1^{x_1'}$, которое даетъ $x_1 = x'$, ибо всѣ элементы (1) различны Если x_2 не $\equiv x_2' \pmod p$, то, обозначая $x_1 - x_1' = \xi_1$, $x_2' - x_2 = \xi_2$, получимъ

$$A_1^{\xi_1} = A_2^{\xi_2}; \tag{3}$$

подбирая же τ удовлетворяющее сравненію $\xi_2\tau \equiv 1 \pmod p$ и возвышая равенство (3) въ степень τ, получимъ

$$A_2 = A_1^{\xi_1\tau},$$

что невозможно, ибо мы предположили, что элементъ A_2 отличенъ отъ элементовъ (1).

Итакъ, элементы (2) всѣ различны между собой и образуютъ группу порядка p^2. Если $k = 2$, то группа (2) совпадаетъ съ G.

Если же $k > 2$, тогда въ группѣ G кромѣ элементовъ (2) долженъ заключаться по крайней мѣрѣ еще одинъ элементъ A_3.

Составляемъ подгруппу

$$A_1^{x_1} A_2^{x_2} A_3^{x_3}$$

порядка p^3. Продолжая разсужденіе далѣе, мы исчерпаемъ группу G порядка p^k послѣ k — кратнаго повторенія приведенныхъ разсужденій.

Итакъ, группа G имѣетъ элементы вида

$$A_1^{x_1} A_2^{x_2} \ldots A_k^{x_k}, \tag{4}$$

гдѣ всѣ показатели $x_1, x_2, \ldots x_k$ пробѣгаютъ (каждый въ отдѣльности) систему вычетовъ по модулю p.

Совокупность элементовъ $A_1, A_2, \ldots A_k$ носитъ названіе *базиса* группы G.

§ 20.

Если заданное уравненіе *примитивное*, то нормальный его дѣлитель

$$G = A_1^{x_1} A_2^{x_2} \ldots A_k^{x_k}$$

долженъ быть *транзитивнымъ*.

Присоединяя къ основному полю Ω функцію корней, принадлежащую группѣ G, мы сведемъ группу заданнаго уравненія на группу G Уравненіе останется послѣ такого расширенія группы неприводимымъ; но группа его G коммутативная, слѣдовательно, уравненіе окажется Abel'евымъ

Его степень должна равняться порядку группы G то есть p^k. Для ясности можно указывать корни различными подстановками группы G. Каждой подстановкѣ сопоставить корень. Можно будетъ поступить такъ, одинъ корень x_0 взять произвольно и затѣмъ всякой подстановкѣ $A_1^{z_1}A_2^{z_2} \ldots A_k^{z_k}$ сопоставить тотъ корень x_1 въ который переходитъ x_0 отъ этой подстановки.

Итакъ, корень, соотвѣтствующій подстановкѣ $A_2^{z_1}A_2^{z_2} \ldots A_k^{z_k}$ можно будетъ обозначить однимъ изъ двухъ символовъ

$$x_{z_1, z_2, \ldots z_k}, \ [z_1, z_2, \ldots z_k].$$

Очевидно, что если за начальный корень взять тотъ, который указанъ символомъ

$$[0, 0, \ldots 0],$$

то этотъ корень отъ примѣненія подстановки $A_1^{z_1}A_2^{z_2} \ldots A_k^{z_k}$ обращается въ $[z_1, z_2, \ldots z_k]$, ибо

$$(A_1^0 A_2^0 \ldots A_k^0)(A_1^{z_1}A_2^{z_2} \ldots A_k^{z_k}) = A_1^{z_1}A_2^{z_2} \ldots A_k^{z_k}.$$

Корень $[z_1, z_2 \ldots z_k]$ обращается черезъ подстановку

$$A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2} \ldots A_k^{\alpha_k} \text{ въ } [z_1 + \alpha_1, z_2 + \alpha_2, \ldots z_k + \alpha_k].$$

При заданныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ линейныя выраженія

$$z_1 + \alpha_1, z_2 + \alpha_2, \ \ldots z_k + \alpha_k$$

пробѣгають (каждое въ отдѣльности) полную систему вычетовъ по модулю p, если z_i пробѣгають туже систему вычетовъ.

Подстановкѣ корней

(1) $$A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2} \ldots A_k^{\alpha_k}$$

можно дать такое толкованіе, которое мы будемъ называть *аналитическимъ ея представленіемъ*.

Если мы будемъ разсматривать сравненія [1])

(2) $$z_1' \equiv z_1 + \alpha_1 (mod\, p), \ z_2' \equiv z_2 + \alpha_2 (mod\, p), \ \ldots z_k' \equiv z_k + \alpha_k (mod\, p),$$

---

[1]) Очевидно, что индексы z, сравнимые по модулю p, можно считать за равные и замѣнять положительными ихъ вычетами.

то подстановкѣ (1) соотвѣтствуетъ переходъ *всякаго* корня

$$[z_1, z_2, \ldots z_k]$$

въ *новый*

$$[z_1', z_2', \ldots z_k'].$$

Итакъ, всякой подстановкѣ (1) съ *опредѣленно-выбранными* показателями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ можно сопоставить систему сравненій (2).

Эта система сравненій (2) и есть аналитическое представленіе подстановки (1). Заставляя въ сравненіяхъ (2) числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ пробѣгать полныя системы вычетовъ по модулю p, мы получимъ всѣ p^k подстановокъ группы G. Будемъ для сокращенія рѣчи называть группу G *ариѳметической* [1]).

Аналитическое представленіе подстановокъ.

§ 21.

Обобщая сказанное въ предыдущемъ параграфѣ мы можемъ высказать теорему.

Если указана нѣкоторая, произвольно выбранная, подстановка корней, переводящая

$$[z_1, z_2, \ldots z_k] \text{ въ } [z_1', z_2', \ldots z_k']$$

то эту подстановку можно указать сравненіями

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} z_1' \equiv \varphi_1(z_1, z_2, \ldots z_k) \\ z_2' \equiv \varphi_2(z_1, z_2, \ldots z_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k' \equiv \varphi_k(z_1, z_2, \ldots z_k) \end{array}\right\} (mod\, p),$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ *цѣлыя раціональныя функціи отъ* $z_1, z_2, \ldots z_k$ *съ цѣлыми коэффиціентами.*

На основаніи теоремы Fermat'а можно предполагать функціи φ_i степени не выше $p-1$ относительно каждой изъ перемѣнныхъ z_i.

Для доказательства теоремы покажемъ, какъ найти на самомъ дѣлѣ функціи φ_i, если задана подстановка.

---

[1]) *О. Шмидтъ*. Объ уравненіяхъ, рѣшаемыхъ въ радикалахъ, степень которыхъ есть степень простого числа. Кіевъ, 1913 стр. 15.

Пусть заданная подстановка переводитъ систему индексовъ

(2) $$s_1 s_2 \dots s_k$$

въ систему

(3) $$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k,$$

причемъ мы будемъ предполагать, что *указаны правила*, по которымъ всякой системѣ чиселъ (2) мы можемъ сопоставить систему (3).

Введемъ въ разсмотрѣніе функцію

$$\omega(z) = z(z-1)(z-2)\dots(z-p+1) \equiv z^p - z \,(mod\; p).$$

Кромѣ того введемъ въ разсмотрѣніе p функцій

$$\omega_0(z) = z^{p-1} - 1,$$

$$\omega_l(z) = z\frac{z^{p-1} - l^{p-1}}{z-l} = z(z^{p-2} + lz^{p-3} + \dots);\ (l = 1, 2, \dots p-1).$$

Мы имѣемъ

$$\omega_s(z) \equiv \frac{\omega(z)}{z-s}\,(mod\; p),\ (s = 0, 1, 2, \dots p-1)$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} \omega_s(r) &\equiv 0 \\ \omega_s(s) &\equiv 1 \end{aligned}\right\} (mod\; p)\,(s \neq r).$$

Будемъ искать функціи φ_i въ видѣ суммъ

$$\varphi_i \equiv \sum A^{(i)}_{s_1 s_2 \dots s_k} \omega_{s_1}(z_1)\omega_{s_2}(z_2)\dots\omega_{s_k}(z_k),$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ p^k системъ (2) индексовъ s_i.

Полагая

$$z_1 = s_1,\ z_2 = s_2,\ \dots z_k = s_k;\ \varphi_i = \sigma_i$$

получимъ

$$\sigma_i = A^{(i)}_{s_1 s_2 \dots s_k} \omega_{s_1}(s_1)\omega_{s_2}(s_2)\dots\omega_{s_k}(s_k) \equiv (-1)^k A^{(i)}_{s_1 s_2 \dots s_k}.$$

Получаемъ выраженіе для коэффиціентовъ

$$A^{(i)}_{s_1 s_2 \dots s_k} \equiv (-1)^k \sigma_i.$$

Итакъ, окончательно,

$$\varphi_i \equiv (-1)^k \sum \sigma_i \omega_{s_1}(z_1)\omega_{s_2}(z_2)\dots\omega_{s_k}(z_k)$$

и возможность подбора функцій φ_i доказана.

§ 22.

Пояснимъ сказанное на примѣрѣ.
Пусть подстановка задана сравненіями

$$\left.\begin{array}{l} z_1' \equiv z_1 + z_2 \\ z_2' \equiv z_2 + 1 \end{array}\right\} (mod\ 2)\ .$$

ѣ каждый изъ знаковъ

$$[z_1\ ,\ z_2]\ ,\ [z_1',\ z_2]$$

четырехъ корней

$$]\ ,\ x_2 = [0\ ,\ 1]\ ,\ x_3 = [1\ ,\ 0]\ ,\ x_4 = [1\ ,\ 1]\ .$$

1) видимъ, что

[0, 0]	переходитъ	въ	[0, 1]
[0, 1]	„	„	[1, 0]
[1, 0]	„	„	[1, 1]
[1, 1]	„	„	[0, 0],

новка аналитически выраженная сравненіями (1) есть
клъ

$$(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4)\ .$$

§ 23.

емся нахожденіемъ аналитическаго вида подстановокъ
рѣшаемаго въ радикалахъ, на основаніи извѣстнаго
G имѣть нормальнымъ дѣлителемъ ариѳметическую

Линейныя группы.

§ 24.

цстановки, опредѣляемой аналитически сравненіями
знакъ

$$z_1\ ,\ z_2\ ,\ \ldots)\ ,\ \varphi_2(z_1\ ,\ z_2\ ,\ \ldots)\ ,\ \ldots\Big)$$
$$,\ z_2\qquad\qquad ,\ \ldots\Big)$$

или короче

$$\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ z \end{pmatrix}.$$

Въ этомъ символѣ можно вмѣсто индексовъ $z_1, z_2, \ldots z_k$ подставить новую ихъ комбинацію $z_1', z_2, \ldots z_k'$, которую можно на основаніи теоремы § 21 указать формулами

$$z_i' = \psi_i(z_1, z_2, \ldots)$$

и мы получаемъ

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots), & \varphi_2(\psi_1, \psi_2, \ldots), & \ldots \\ \psi_1(z_1, z_2, \ldots), & \psi_2(z_1, z_2, \ldots), & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi[\psi(z)] \\ \psi(z) \end{pmatrix}.$$

Перемноженіе подстановокъ можетъ быть выражено формулой

$$\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi(z) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi[\varphi(z)] \\ z \end{pmatrix}.$$

§ 25.

Пусть подстановка

$$T = \begin{pmatrix} \varphi(z) \\ z \end{pmatrix}$$

есть произвольная подстановка разрѣшимой группы G заданнаго уравненія

Если ариѳметическая группа есть нормальный дѣлитель группы G, то имѣетъ мѣсто равенство

(1) $$T^{-1}ST = S',$$

гдѣ S и S' суть элементы ариѳметической группы

$$S = \begin{pmatrix} z + \alpha \\ z \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} z + \alpha' \\ z \end{pmatrix}.$$

Переписывая равенство (1) въ видѣ $ST = TS'$, получимъ

$$ST = \begin{pmatrix} \varphi(z + \alpha) \\ z \end{pmatrix}, \quad TS' = \begin{pmatrix} \varphi(z) + \alpha' \\ z \end{pmatrix},$$

откуда

$$\varphi(z + \alpha) \equiv \varphi(z) + \alpha'.$$

Это сравненіе является сокращеннымъ символомъ для системы сравненій по модулю p

(2) $$\begin{array}{l} \varphi_1(z_1 + \alpha_1, z_2 + \alpha_2, \ldots) \equiv \varphi_1(z_1, z_2, \ldots) + \alpha_1' \\ \varphi_2(z_1 + \alpha_1, z_2 + \alpha_2, \ldots) \equiv \varphi_1(z_1, z_2, \ldots) + \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Примѣняя формулы (2) къ случаю, когда, могущія быть произвольно выбранными, числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ равны нулю кромѣ одного равнаго единицѣ, получимъ

$$\varphi_1(z_1 + 1, z_2, \dots) \equiv \varphi_1(z_1, z_2, \dots) + \alpha_{1,1}$$

$$\varphi_1(z_1, z_2 + 1, \dots) \equiv \varphi_1(z_1, z_2, \dots) + \alpha_{1,2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Если мы примѣнимъ первую изъ этихъ формулъ t_1 разъ, вторую t_2 раза и такъ далѣе, то получимъ

$$\varphi_1(z_1 + t_1, z_2, \dots) \equiv \varphi_1(z_1, z_2, \dots) + t_1\alpha_{1,1}$$

$$\varphi_1(z_1, z_2 + t_2, \dots) \equiv \varphi_1(z_1, z_2, \dots) + t_2\alpha_{1,1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Примѣнимъ теперь къ первой формулѣ подстановку, выражаемую второю, далѣе третьею и такъ далѣе; получимъ

$$\varphi_1(z_1 + t_1, z_2 + t_2, \dots) \equiv \varphi(z_1, z_2 \dots) + t_1\alpha_{1,1} + t_2\alpha_{2,2} + \dots$$

Полагая $z_1 = 0, z_2 = 0, \dots z_k = 0$ и обозначая черезъ β_1 цѣлое число $\varphi_1(0, 0, \dots)$ получимъ

$$\varphi_1(t_1, t_2, \dots) \equiv \alpha_{1,1}t_1 + \alpha_{1,2}t_2 + \dots + \alpha_{1k}t_k + \beta_1 .$$

Итакъ, мы видимъ, что функція φ_1 оказывается линейною. То же самое относится къ остальнымъ функціямъ и мы приходимъ къ теоремѣ.

Группа Galois примитивнаго неприводимаго уравненія степени p^k, рѣшаемаго алгебраически, состоитъ изъ подстановокъ

$$\begin{pmatrix} z_1', & z_2', & \dots & z_k' \\ z_1, & z_2, & \dots & z_k \end{pmatrix}$$

вида

$$(3) \qquad \left.\begin{aligned} z_1' &\equiv \alpha_{1,1}z_1 + \alpha_{1,2}z_2 + \dots + \alpha_{1,k}z_k + \beta_1 \\ z_2' &\equiv \alpha_{2,1}z_1 + \alpha_{2,2}z_2 + \dots + \alpha_{2,k}z_k + \beta_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_k' &\equiv \alpha_{k,1}z_1 + \alpha_{k,2}z_2 + \dots + \alpha_{k,k}z_k + \beta_k \end{aligned}\right\} \quad (mod\ p) .$$

Для того, чтобы сравненія (3) выражали подстановку необходимо, чтобы можно было обратно выразить z_i черезъ z_i'; для этой цѣли долженъ быть не сравнимъ съ нулемъ по модулю p опредѣлитель [1])

$$\sum \pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \dots \alpha_{k,k} .$$

[1]) Д. Граве Элементарный курсъ теоріи чиселъ. Вт. изд. 1913. Стр. 178.

Совокупность всѣхъ подстановокъ вида (3) образуетъ, очевидно, группу которая называется *общею линейной группой*.

§ 26.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что *необходимымъ* условіемъ возможности рѣшенія въ радикалахъ примитивнаго уравненія является *линейность* его группы Galois.

Не всякая однако, линейная группа будетъ разрѣшимою. Является основною задачей найти условія, при которыхъ линейная группа будетъ разрѣшимою. Эта задача не смотря на замѣчательныя изслѣдованія Jordan'a [1]) рѣшена въ настоящее время лишь для частныхъ случаевъ. Я отсылаю читателя къ сочиненію моего многоуважаемаго ученика О. Ю. Шмидта „Объ уравненіяхъ рѣшаемыхъ въ радикалахъ, степень которыхъ есть степень простого числа". Изъ этого сочиненія читатель познакомится съ современнымъ положеніемъ вопроса.

Объ уравненіяхъ простой степени.

§ 27.

Въ случаѣ $k = 1$, когда степень заданнаго уравненія $n = p$, т. е. равна простому числу, *линейность группы есть не только необходимое, но и достаточное условіе возможности алгебраическаго рѣшенія уравненія.*

Это замѣчаніе принадлежитъ Galois, хотя можно считать, что оно было извѣстно Lagrange'у. Въ этомъ случаѣ надо разсматривать только одинъ индексъ z и дѣло сводится къ одному только сравненію

$$z' \equiv az + b \,(mod\, p)\,.$$

Будемъ обозначать подстановки линейной группы символомъ

(1) $$[x\,,\; ax + b]\,.$$

Перемѣнная величина x принимаетъ значеніе $0, 1, 2 \dots n \quad 1$ всѣхъ классовъ по простому модулю n. Если a не дѣлится на n, то выраженіе $ax + b$ пробѣгаетъ ту же систему классовъ.

Давая числу a $n - 1$ значеній

$$1\,, 2\,, \dots, n \quad 1\,,$$

---

[1]) C. Jordan. Traité des substitutions. Paris 1870.

а числу b n значеній

$$0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

мы получимъ $n(n-1)$ подстановокъ.

Нетрудно видѣть, что эти подстановки образуютъ группу. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ произведеніе

$$[x, ax+b][x, a_1x+b_1].$$

Первая подстановка замѣняетъ x на $ax+b$; слѣдовательно, вторую подстановку можно будетъ представить въ видѣ

$$[ax+b, a_1(ax+b)+b_1].$$

Отсюда совокупность двухъ подстановокъ замѣняетъ x на

$$a_1(ax+b)+b_1$$

Итакъ, получаемъ

(1) $$[x, ax+b][x, a_1x+b_1]=[x, a_2x+b_2].$$

гдѣ

(2) $$a_2 \equiv a_1a \pmod n;$$
$$b_2 \equiv a_1b+b_1 \pmod n.$$

Эти равенства показываютъ, что *линейныя подстановки образуютъ группу*. Мы будемъ называть эту группу по примѣру Kronecker'а *метациклическою*.

§ 28.

Частный случай линейной группы представляетъ циклическая группа образуемая подстановкой $[x, x+1]$ или другой $[x, x+b]$.

Подобнымъ же образомъ существуетъ линейная группа порядка $n-1$, образуемая подстановкой $[x, ax]$, гдѣ a, по прежнему, есть число взаимно простое съ n.

§ 29.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію дѣлителей линейной группы.

Разсмотримъ степень линейной подстановки

$$S=[x, ax+b].$$

Примѣняя послѣдовательно формулу умноженія § 27, мы получимъ

$$S^k=[x, a^kx+b(1+a+a^2+\ldots+a^{k-1})].$$

Если $a=1$, то

$$S^k=[x,\ x+kb].$$

Итакъ, мы видимъ, что, *если въ линейную группу входитъ, по крайней мѣрѣ, одна подстановка, у которой* $a=1$, *а* b *отлично отъ нуля, то группа имѣетъ дѣлителемъ циклическую группу* $[z,\ z+b]$, *гдѣ* $b=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$

Разсмотримъ подстановку

$$S=[x,\ ax+b],$$

у которой a отлично отъ единицы

Покажемъ, что *подстановка* S *будетъ порядка* μ, *если число* a *принадлежитъ показателю* μ *по модулю* n.

Въ самомъ дѣлѣ, если a принадлежитъ показателю μ, то

(1) $$a^\mu-1\equiv 0\ (mod\ n),$$

и, притомъ, μ есть наименьшее число, при которомъ возможно сравненіе (1).

Переписываемъ послѣднее сравненіе такъ

$$(a-1)(1+a+a^2+\ldots+a^{\mu-1})\equiv 0\ (mod\ n),$$

или

$$1+a+a^2+\ldots+a^{\mu-1}\equiv 0\ (mod\ n).$$

Отсюда

$$S^\mu=[x,\ a^\mu x+b(1+a+\ldots+a^{\mu-1})]=[x,\ x]=1.$$

§ 30

Покажемъ теперь, что, *если* a *отлично отъ единицы, то періодъ*

$$1,\ S,\ S^2,\ \ldots,\ S^\mu$$

будетъ интранзитивной группой.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ будетъ существовать элементъ x, который оставляется безъ измѣненія подстановкой S, а слѣдовательно, и всѣми ея степенями.

Для нахожденія неизмѣняемаго элемента придется рѣшить сравненіе

$$x\equiv ax+b\ (mod\ n),$$

или иначе,

$$(a-1)x+b\equiv 0\ (mod\ n).$$

Если a отлично отъ единицы, то послѣднее сравненіе всегда имѣетъ одно рѣшеніе x_0, дающее единственный неизмѣняемый подстановкой S элементъ.

§ 31.

Выведемъ условіе, при которомъ двѣ линейныя подстановки

$$[x, ax+b], [x, a_1x+b_1]$$

оставляютъ безъ измѣненія одинъ и тотъ же элементъ x_0.

На основаніи соображеній предыдущаго §-а получимъ два условія

$$(a-1)x_0+b \equiv 0 \,(mod\, n)$$

$$(a_1-1)x_0+b_1 \equiv 0 \,(mod\, n),$$

откуда получимъ

$$b(a_1-1)-b_1(a-1) \equiv 0 \,(mod\, n).$$

§ 32.

Циклическая группа

$$[x, x+b]$$

порядка n, очевидно, транзитивна.

Докажемъ теперь, что *всякая транзитивная линейная группа должна имѣть своимъ дѣлителемъ циклическую.*

Разсмотримъ какую нибудь подстановку:

$$S=[x, ax+b]$$

линейной транзитивной группы. Пусть g будетъ первообразный корень числа n. Введемъ въ разсмотрѣніе индексъ α числа a, т. е. число, удовлетворяющее сравненію

$$g^\alpha \equiv a \,(mod\, n).$$

Для сокращенія рѣчи можемъ число α называть *индексомъ подстановки* S.

Мы имѣемъ право предположить, что индексъ α отличенъ отъ 0 и $n-1$, ибо въ обоихъ случаяхъ можно было бы предположить a равнымъ единицѣ, и слѣдовательно, подстановка S или была бы равна единицѣ, или принадлежала бы къ циклической группѣ.

На основаніи первой формулы (2) § 27 мы замѣчаемъ, что индексъ составной подстановки будетъ равенъ суммѣ индексовъ подстановокъ перемножаемыхъ. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ индексы подстановокъ линейной группы должны быть числами, кратными наименьшаго изъ индексовъ α_0, такъ что обозначая

$$g^{\alpha_0}=a_0,$$

можемъ написать всѣ подстановки линейной группы въ видѣ:

(1) $$S = [x,\ a_0^h x + b],$$

гдѣ числа h и b принимаютъ извѣстныя значенія.

Очевидно, что въ разсматриваемую группу входитъ подстановка:

$$S_0 = [x,\ a_0 x + b_0],$$

ибо, если бы для всѣхъ подстановокъ разсматриваемой группы показатель h былъ больше единицы, то число a_0 не могло бы быть индексомъ одной изъ подстановокъ.

Разсмотримъ подстановку

$$\Sigma = SS_0^{-h} = [x,\ a'x + b'].$$

Получаемъ

$$S = \Sigma S_0^h = [x,\ a'x + b'][x,\ a_0^h + b_0(1 + a_0 + \ldots + a_0^{h-1})].$$

Примѣняя формулы § 27, имѣемъ

(2) $$S = [x,\ a'a_0^h x + a_0^h b' + b_0(1 + a_0 + \ldots + a_0^{h-1})].$$

Сравнивая (1) и (2), получимъ

(3) $$a_0^h \equiv a'a_0^h \,(mod\, n)$$

и

(4) $$b \equiv a_0^h b' + b_0(1 + a + a_0 + \ldots + a_0^{h-1}) \,(mod\, n).$$

Рѣшая сравненіе (3), находимъ $a' = 1$, слѣдовательно,

(5) $$\Sigma = [x,\ x + b'].$$

Мы докажемъ, что въ разсматриваемой линейной группѣ будетъ заключаться циклическая группа, если покажемъ, что въ формулѣ (5) число b' получится отличнымъ отъ нуля, по крайней мѣрѣ, при одной какой либо изъ подстановокъ S.

Допустимъ обратное, а именно, что $b' = 0$, какова бы ни была подстановка S. Въ этомъ случаѣ сравненіе (4) даетъ

$$b - b_0(1 + a_0 + \ldots + a_0^{h-1}) \equiv 0 \,(mod\, n),$$

или иначе,

$$b(a_0 - 1) - b_0(a_0^h \quad 1) \equiv 0 \,(mod\, n).$$

Но такъ какъ послѣднее сравненіе есть выведенное въ § 31 условіе неизмѣняемости нѣкотораго элемента двумя линейными подстановками, то

отсюда слѣдуетъ, что подстановка S не мѣняетъ элемента, не измѣняемаго подстановкой S_0

Мѣняя числа h и b замѣтимъ, что всѣ подстановки S разсматриваемой группы не должны измѣнять одного и того же элемента, не измѣняемаго подстановкой S_0. Этотъ элементъ остается, слѣдовательно, безъ измѣненія при всѣхъ подстановкахъ группы, и значитъ, группа интранзитивна, что противорѣчитъ предположенію.

Итакъ, всякая транзитивная линейная группа должна имѣть дѣлителемъ циклическую группу порядка n.

§ 33.

Посмотримъ теперь, какъ образуется линейная группа G, у которой индексы подстановокъ суть кратныя одного изъ этихъ индексовъ a_0. Разсмотримъ степени подстановки $S_0 = [x, a_0x + b_0]$ Обозначимъ черезъ μ показателя, которому принадлежитъ число a_0. Тогда всякая подстановка разсматриваемой группы можетъ быть написана въ такомъ видѣ

$$[x, a_0^h x + b],$$

причемъ число h принимаетъ одно изъ слѣдующихъ значеній

$$0, 1, 2, \ldots, \mu - 1,$$

Если группа транзитивна, то въ ней существуетъ циклическая подстановка

$$[x, x + 1],$$

а, слѣдовательно, и подстановка

$$[x, a_0^h x + b][x, x + 1] = [x, a_0^h x + b + 1].$$

Мы видимъ отсюда, что въ данной группѣ коэффиціентъ b можетъ принимать всѣ значенія

$$0, 1, 2 \ldots, n - 1.$$

Итакъ, *всякая транзитивная линейная группа можетъ быть дана символомъ* $S = [x, a_0^h x + b]$, *причемъ* h *принимаетъ значенія*

$$0, 1, 2, \ldots, \mu - 1,$$

а b *значенія*

$$0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

§ 34.

Если a_0 есть первообразный корень числа n, то $\mu = n - 1$, и мы получаемъ всю метациклическую группу.

Покажемъ, что *метациклическая группа дважды транзитивна*, указавъ такую линейную подстановку, которая будетъ обращать два определенные элемента, напримѣръ 0, 1, въ произвольные новые i, k.

Въ самомъ дѣлѣ, такова будетъ подстановка

$$[x, (k-i)x + i].$$

§ 35.

Покажемъ, что *всякая линейная группа будетъ разрѣшимою*.

Если въ группѣ G, разобранной въ § 33, $\mu = 1$, то эта группа есть циклическая порядка n и имѣетъ нормальнымъ дѣлителемъ единицу. Покажемъ теперь, что если $\mu = p\mu'$, гдѣ p нѣкоторое простое число, то линейная группа G имѣетъ нормальнымъ дѣлителемъ новую линейную группу G' порядка $n\mu'$, составленную подстановками $S' = [x, a_0^{p^h}x + b]$, гдѣ $h = 0, 1, 2, \ldots, \mu' - 1$, а $b = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Эта новая группа G' есть, очевидно, дѣлитель группы G индекса p.

Нетрудно убѣдиться, что группа G' есть нормальный дѣлитель группы G. Въ самомъ дѣлѣ, придется показать, что подстановка $S^{-1}S'S$, гдѣ подстановка $S = [x, a_0^k x + b_1]$, есть одна изъ подстановокъ группы G, должна принадлежать группѣ G'.

На основанiи формулы (2) § 27 мы получаемъ

$$S^{-1}S'S = [x, a_0^{-k} a_0^{p^h} a_0^k x + b_2],$$

гдѣ a_0^{-k} обозначаетъ корень сравненiя $x a_0^k \equiv 1 \pmod{n}$.

Отсюда имѣемъ окончательно $S^{-1}S'S = [x, a_0^{p^h}x + b_2]$ и, слѣдовательно, подстановка $S^{-1}S'S$ дѣйствительно принадлежитъ группѣ G'.

Итакъ, группа G' есть *нормальный* дѣлитель группы G съ простымъ индексомъ.

Мы замѣчаемъ отсюда, что, разлагая μ на простыхъ множителей $p_1, p_2, p_3, \ldots$, мы получимъ рядъ группъ

(1) $$G, G', G'', G''', \ldots$$

порядковъ

$$n\mu, \frac{n\mu}{p_1}, \frac{n\mu}{p_1 p_2}, \frac{n\mu}{p_1 p_2 p_3}, \ldots,$$

Каждая изъ группъ (1) будетъ нормальнымъ дѣлителемъ предыдущей. Такъ какъ индексы будутъ простыя числа $p_1, p_2, p_3, \ldots$, то группа G будетъ разрѣшимая, что и требовалось доказать.

Полная линейная группа будетъ имѣть Jordan'овскимъ рядомъ индексовъ число n и всѣхъ простыхъ дѣлителей числа $n-1$.

§ 36

Покажемъ, что, *если линейная транзитивная группа G есть нормальный дѣлитель группы H, то сама группа H должна быть линейною.*

Пусть S будетъ нѣкоторая подстановка группы G, а T какая нибудь произвольно выбранная подстановка группы H. Тогда, по предположенію, должно имѣть мѣсто равенство

$$T^{-1}ST = S',$$

гдѣ S' новая подстановка линейной группы G. Пусть аналитическое выраженіе подстановки T будетъ

$$T = [x, \varphi(x)],$$

гдѣ черезъ $\varphi(x)$ обозначена нѣкоторая цѣлая функція.

Возьмемъ за подстановку S циклическую $\{x, x+1\}$.

Пусть, кромѣ того, $S' = [x, a'x + a]$.

Тогда равенство $ST = TS'$ можетъ быть написано такъ

$$[x, x+1][x, \varphi(x)] = [x, \varphi(x)][x, a'x + a].$$

Отсюда получаемъ сравненіе

$$\varphi(x+1) \equiv a'\varphi(x) + a \,(mod\, n).$$

Это сравненіе должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ цѣлыхъ значеніяхъ x. Но такъ какъ функція φ не достигаетъ степени n, то коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ въ обѣихъ частяхъ сравненія должны быть сравнимы по модулю n. Сравнивая коэффиціенты при старшей степени, получимъ, очевидно,

$$a' \equiv 1 \,(mod\, n),$$

откуда имѣемъ

$$\varphi(x+1) \equiv \varphi(x) + a \,(mod\, n).$$

Подставляя въ это сравненіе вмѣсто x числа

$$x+1, \quad x+2, \ldots, x+z-1$$

и складывая, получимъ

$$\varphi(x+z) \equiv \varphi(x) + za \pmod n.$$

Подставляя сюда $x=0$ и обозначая $\varphi(0)=b$, будемъ имѣть

$$\varphi(z) \equiv az + b \pmod n.$$

Такъ какъ послѣднее сравненіе справедливо при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ z, то подстановка T равносильна подстановкѣ

$$[x,\ ax+b],$$

т. е группа H линейна.

§ 37.

Нетрудно видѣть, что метациклическая группа можетъ быть получена отъ комбинированія двухъ основныхъ подстановокъ,

$$S=[x,\ x+1],\ T=[x,\ gx],$$

гдѣ g одинъ изъ первообразныхъ корней числа n.

Подобнымъ же образомъ всякій дѣлитель полной линейной группы можетъ быть образованъ подстановками S, $T^{a_0}=[x,\ g^{a_0}x]$. Такъ напримѣръ, подстановки S, $T^2=[x,\ g^2x]$ образуютъ линейную группу порядка $\frac{n(n-1)}{2}$, аналитическое выраженіе которой будетъ имѣть видъ $[x,\ ax+b]$, причемъ b проходитъ всѣ значенія $0, 1, 2, \ldots, n-1$, а a распространяется только на квадратичные вычеты числа n.

L. Kronecker называетъ эту группу *полуметациклической*.

Если n число простое, то подстановка S состоитъ изъ одного цикла

$$(0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

обнимающаго нечетное число элементовъ, и, слѣдовательно, эта подстановка принадлежитъ знакоперемѣнной группѣ.

Что же касается подстановки T, то она оставляетъ элементъ 0 безъ перемѣны; остальные же $n-1$ элементовъ она перемѣщаетъ по циклу

$$(1,\ g,\ g^2,\ \ldots,\ g^{n-2}).$$

Такъ какъ этотъ циклъ обнимаетъ четное число элементовъ, то подстановка T не принадлежитъ знакоперемѣнной группѣ, но T^2, а, слѣдовательно, и вся полуметациклическая группа входитъ въ составъ знако-

перемѣнной группы. Итакъ, мы видимъ, что метациклическая группа не представляетъ изъ себя дѣлителя знакоперемѣнной группы. Общій же наибольшій дѣлитель метациклической группы и знакоперемѣнной есть полуметациклическая группа.

§ 38.

Изъ соображеній предшествовавшихъ параграфовъ слѣдуетъ теорема.

Всякое неприводимое уравненіе простой степени, имѣющее линейную группу рѣшается въ радикалахъ

Для доказательства этой теоремы надо принять во вниманіе теорему § 25, показывающую, что группа всякаго разрѣшимаго уравненія *линейная* и обратно, если степень n уравненія есть простое число, то въ § 35 мы видѣли, что линейная группа будетъ разрѣшимою.

Теорема Galois.

§ 39.

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ рѣшимости въ радикалахъ неприводимаго уравненія простой степени является свойство всѣхъ корней выражаться раціонально черезъ произвольные два.

Необходимость теоремы доказывается такъ. Если уравненіе рѣшается въ радикалахъ, то его группа линейная. Мы видѣли въ § 30, что линейная подстановка, если она не приводится къ тождественной, можетъ оставить безъ измѣненія только одинъ корень; поэтому въ линейной группѣ только одна тождественная подстановка оставляетъ безъ перемѣны два корня. Въ самомъ дѣлѣ, сравненіе $x \equiv ax + b \,(mod\, n)$ можетъ имѣть два рѣшенія только въ случаѣ $a \equiv 1$, $b \equiv 0 \,(mod\, n)$.

Итакъ, если группа уравненія линейная, то присоединеніе къ основному полю Ω двухъ корней должно сводить группу уравненія на единицу. Тогда въ полученномъ полѣ должны заключаться всѣ остальные корни, которые, слѣдовательно, и будутъ выражаться раціонально черезъ два присоединенныхъ.

Обращаемся теперь къ предложенію обратному.

Пусть корни неприводимаго уравненія простой степени выражаются раціонально черезъ два изъ нихъ

$$x_k = \mathfrak{D}(x_0, x_1)\,. \tag{1}$$

Къ соотношенію (1) между корнями можно, очевидно, примѣнить любую подстановку группы G заданнаго уравненія. Если эта подстановка

не мѣняетъ двухъ корней x_0, x_1, то она, очевидно, не должна мѣнять и всякаго другого корня x_k, т. е. она должна быть тождественною.

Група G уравненія не содержитъ отличной отъ единицы подстановки, не мѣняющей двухъ корней.

Очевидно, что возможенъ только одинъ изъ двухъ случаевъ: 1) подстановка S группы G состоитъ изъ *одного* цикла, 2) подстановка S оставляетъ безъ перемѣны *одну* букву и, кромѣ того, относительно остальныхъ $n-1$ буквъ она заключаетъ *циклы съ одинаковымъ* числомъ буквъ. Въ самомъ дѣлѣ, если допустить въ S существованіе двухъ цикловъ C и C_1 порядковъ k и k_1, причемъ $1 < k < k_1$, то

$$S^k = C_1^k \ldots$$

будетъ подстановкой группы G, *оставляющей безъ перемѣны* k буквъ цикла C, и *нетождественною*, ибо буквы цикла C_1 будутъ перемѣщаться.

Итакъ, подстановки группы G состоятъ изъ *тождественной* подстановки, подстановокъ S, изъ которыхъ каждая состоитъ изъ одного цикла и подстановокъ Σ, не мѣняющихъ одной буквы.

Пусть число подстановокъ S будетъ ν Пусть въ группѣ G будутъ существовать подстановки Σ_0, не мѣняющія x_0, Σ_1, не мѣняющія x_1, $\ldots \Sigma_{n-1}$, не мѣняющія x_{n-1}.

Если группа G *транзитивная*, то можно показать, что, если обозначить черезъ μ число подстановокъ Σ_0, то такое же число μ будетъ подстановокъ Σ_1, подстановокъ Σ_2, и т. д. Въ самомъ дѣлѣ, если группа G транзитивная, то въ ней существуетъ подстановка T переводящая x_0 въ x_1, тогда всякая подстановка $T^{-1}\Sigma_0 T$ будетъ принадлежать къ числу Σ_1 и обратно $T\Sigma_1 T^{-1}$ къ числу Σ_0. Обозначая черезъ m порядокъ группы G мы получимъ

(2) $$m = \mu n + \nu + 1 .$$

Подстановки Σ_0 вмѣстѣ съ тождественною образуютъ подгруппу G_1, не мѣняющую x_0. Разлагаемъ группу G на сопряженныя системы по подгруппѣ G_1

$$G = G_1 + G_1 T_1 + G_1 T_2 + \ldots + G_1 T_{n-1},$$

гдѣ T_i переводитъ x_0 въ x_i,

Мы получаемъ

(3) $$m = n(\mu + 1) .$$

Сопоставляя (2) и (3), имѣемъ

$$\nu = n - 1 .$$

Итакъ, существуетъ только $n-1$ *и не болѣе* циклическихъ подстановокъ S, которые образуютъ вмѣстѣ съ единицей, очевидно, *циклическую* группу

$$\mathfrak{S}=(1\,,\ S\,,\ S^2,\ \ldots S^{n-1})\,.$$

Подстановка $T^{-1}ST$ состоитъ также изъ одного цикла, а потому, будучи элементомъ группы G, должна входить въ составъ G.

Итакъ, группа $\mathfrak{S}$ есть нормальный дѣлитель группы G, но $\mathfrak{S}$, будучи циклическою, представляетъ изъ себя частный случай линейной, слѣдовательно, группа G будетъ также линейная, и заданное уравненіе рѣшается въ радикалахъ

Точка зрѣнія Lagrange'a.

§ 40.

Lagrange далъ простой и замѣчательный примѣръ функціи принадлежащей къ метациклической группѣ; подобныя функціи мы будемъ называть метациклическими.

Не трудно видѣть, что, если мы обозначимъ

$$S_a=[z\,,\ az]\qquad \Sigma_b=[z\,,\ z+b]$$

$$a=1\,,\ 2\,,\ \ldots n-1\quad b=0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \ldots n-1\,,$$

то метациклическая группа будетъ состоять изъ подстановокъ вида

$$S_a\Sigma_b\,.$$

Приступимъ теперь къ изложенію соображеній Lagrange'a.

§ 41.

Пусть g первообразный корень простого числа n.

Возьмемъ резольвенту

$$\psi_h=x_0+\varepsilon^{g^h}x_1+\varepsilon^{2g^h}x_2+\ldots+\varepsilon^{(n-1)g^h}x_{n-1}\,.$$

Функціи

$$\varphi_1=\psi_1{}^n,\ \varphi_2=\psi_2{}^n,\ \ldots\varphi_{n-1}=\psi_{n-1}^n$$

будутъ, какъ мы уже видѣли въ главѣ XVIII, функціями циклическими, то есть не мѣняющимися отъ циклическихъ подстановокъ Σ_b.

Посмотримъ, что произойдетъ съ функціей φ_h отъ какой нибудь подстановки S_a. Обозначимъ черезъ φ_h' то выраженіе, которое получится послѣ подстановки; будемъ имѣть

$$\varphi_h' = (x_0 + \varepsilon^{g^h} x_a + \varepsilon^{2g^h} x_{2a} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)g^h} x_{(n-1)a})^n.$$

Обозначимъ черезъ a_1 корень сравненія $a_1 a \equiv 1 \,(mod\, n)$, тогда не трудно написать выраженіе φ_h' въ такомъ видѣ, чтобы индексы i у буквъ x_i шли въ натуральномъ возрастающемъ порядкѣ:

$$\varphi_h' = (x_0 + \varepsilon^{a_1 g^h} x_{aa_1} + \varepsilon^{2a_1 g^h} x_{2aa_1} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)a_1 g^h} x_{(n-1)aa_1})^n =$$

$$= (x_0 + \varepsilon^{a_1 g^h} x_1 + \varepsilon^{2a_1 g^h} x_2 + \ldots + \varepsilon^{(n-1)a_1 g^h} x_{n-1})^n.$$

Полагая

$$a_1 \equiv g^\alpha \,(mod\, n),$$

получимъ

$$\varphi_h' = (x_0 + \varepsilon^{g^{h+\alpha}} x_1 + \varepsilon^{2g^{h+\alpha}} x_2 + \ldots + \varepsilon^{(n-1)g^{h+\alpha}} x_{n-1})^n = \varphi_{h+\alpha}.$$

Итакъ, подстановка S_a производитъ циклическую подстановку $[z, z+\alpha]$ между функціями

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{n-1}.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что всякая циклическая функція отъ функцій (1) будетъ метациклическою, ибо она не мѣняется отъ подстановокъ S_a, Σ_b. Особенное значеніе имѣетъ функція

(2) $$\omega = (\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \alpha^2\varphi_3 + \ldots + \alpha^{n-2}\varphi_{n-1})^{n-1},$$

гдѣ α первообразный корень $n-1$ степени изъ 1.

§ 42

Въ случаѣ $n = 5$ имѣемъ $\alpha = i$, $g = 2$

$$\omega = (\varphi_1 + i\varphi_2 - \varphi_3 - i\varphi_4)^4,$$

гдѣ

$$\varphi_1 = (x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^4 x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^3 x_4)^5$$

$$\varphi_2 = (x_0 + \varepsilon^4 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \varepsilon x_4)^5$$

$$\varphi_3 = (x_0 + \varepsilon^3 x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^4 x_3 + \varepsilon^2 x_4)^5$$

$$\varphi_4 = (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4)^5,$$

гдѣ ε первообразный корень пятой степени изъ единицы.

§ 43.

На основаніи соображеній главы XV метациклическая функція (2) § 41 должна быть корнемъ уравненія степени $\nu = 1.2 \ldots (n-2)$, ибо число $1.2 \ldots (n-2)$ есть индексъ метациклической группы, имѣющей порядокъ $n(n-1)$ по отношенію ко всей симметрической группѣ. Пусть уравненіе степени ν, которому удовлетворяетъ метациклическая функція будетъ

$$\Phi(x) = 0 . \tag{1}$$

Уравненіе (1) я буду называть *уравненіемъ Lagrange'a*. Для $n = 5$ уравненіе Lagrange'a будетъ шестой степени, ибо $\nu = 1.2.3 = 6$.

§ 44.

Теорема. *Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ разрѣшимости въ радикалахъ неприводимаго уравненія простой степени является существованіе у уравненія Lagrange'a простого раціональнаго корня.*

Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе рѣшается въ радикалахъ, то его группа будетъ линейная. Но линейная группа есть дѣлитель метациклической, слѣдовательно, метациклическая функція не мѣняется отъ подстановокъ группы уравненія, слѣдовательно, эта функція принадлежитъ къ основному полю уравненія Lagrange'a, то есть уравненіе Lagrange'a имѣетъ раціональный корень.

Обратно, если всѣ корни уравненія Lagrange'a *различны* между собой, то одинъ изъ нихъ принадлежитъ *точно* къ метациклической группѣ; если этотъ корень ω равенъ раціональному числу a, то соотношеніе

$$\omega(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}) = a$$

между корнями заданнаго уравненія *нарушается* при всякой подстановкѣ, не входящей въ *метациклическую* группу. Слѣдовательно, группа G заданнаго уравненія должна быть дѣлителемъ метациклической.

Итакъ, мы видимъ, что группа G линейная, но кромѣ того намъ задана неприводимость уравненія, слѣдовательно, уравненіе рѣшается въ радикалахъ, и теорема доказана.

§ 45.

Формула (2) на основаніи извѣстныхъ намъ изъ главы XVIII свойствъ резольвентъ Lagrange'a даетъ возможность, когда задано раціональное [1])

---

[1]) Надо помнить, что при составленіи уравненія Lagrange'a мы присоединяли корни ε и α изъ единицы.

выраженіе ω вычислить въ радикалахъ величины $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{n-1}$, а далѣе по формуламъ

$$\varphi_1 = (x_0 + \varepsilon^g x_1 + \varepsilon^{2g} x_2 + \ldots)^n$$

$$\varphi_2 = (x_0 + \varepsilon^{g^2} x_1 + \quad)^n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

получить окончательныя радикальныя выраженія для корней $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ заданнаго уравненія.

§ 46.

Мы теперь приходимъ къ концу нашего изложенія. Поставивъ себѣ цѣлью простое и строгое изложеніе основныхъ принциповъ теоріи алгебраическаго рѣшенія уравненій, положенныхъ въ основу геніальными изслѣдованіями Lagrange'a, Gauss'a, Abel'a и Galois, мы должны предупредить читателя, что задача не исчерпывается изложенною теоріей.

Теперь только лишь слѣдовало бы приступить къ настоящей задачѣ рѣшенія уравненій въ радикалахъ, которая разбивается на двѣ: дать удобныя для практики пріемы узнать относительно всякаго заданнаго уравненія, рѣшается ли оно въ радикалахъ, и если рѣшается, то написать само радикальное выраженіе и подробно его изслѣдовать, подобно тому, напримѣръ, какъ мы это дѣлали въ §§ 8, 9 главы III для кубическихъ уравненій.

Abel поставилъ задачу найти способъ, по которому можно было бы найти всѣ уравненія, рѣшаемыя въ радикалахъ. Abel оставилъ, однако, лишь короткія указанія безъ доказательствъ. Kronecker рѣшилъ поставленную Abel'емъ задачу, причемъ онъ ищетъ не сами уравненія, а радикальныя выраженія ихъ корней. Для простой степени n Kronecker указывалъ выраженіе, составляемое изъ элементовъ поля Ω повторнымъ извлеченіемъ радикаловъ, и которое обладаетъ двойнымъ свойствомъ: 1) что всякій корень неприводимаго разрѣшимаго уравненія n-ой степени изъ поля Ω заключается въ этомъ выраженіи, 2) это выраженіе само удовлетворяетъ уравненію n-ой степени.

Формулы Kronecker'a доказаны H. Weber'омъ [1]). Для уравненій степени p^k задача рѣшена вполнѣ лишь въ немногихъ частныхъ случаяхъ.

---

[1]) H. Weber Lehrbuch der Algebra 1898 Bd. I Achtzehnter Abschnitt.

ГЛАВА XX.

Объ уравненіяхъ пятой степени.

Знакоперемѣнная группа подстановокъ пяти элементовъ.

§ 9.

Уравненія пятой степени заслуживаютъ особеннаго вниманія, потому что, съ одной стороны, они принадлежатъ къ числу не рѣшаемыхъ въ радикалахъ въ общемъ случаѣ; съ другой стороны, они обладаютъ свойствами, сближающими ихъ съ уравненіями низшихъ степеней. Эти свойства состоятъ въ ихъ связи съ группами многогранниковъ (см. стр. 208).

Симметрическая группа для уравненія четвертой степени имѣетъ порядокъ $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ и изоморфна съ группой *октаэдра*. *Знакоперемѣнная* группа для тѣхъ же уравненій имѣетъ порядокъ 12 и изоморфна съ группой *тетраэдра*.

Для уравненій *пятой степени* оказывается замѣчательный фактъ, что ихъ знакоперемѣнная группа, имѣющая порядокъ $60 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, изоморфна съ группой *икосаэдра*.

Для лицъ, желающихъ ближе изучить связь уравненій 5-ой степени съ икосаэдромъ, можно рекомендовать книгу проф. Klein'а „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ (1884).

Для нагляднаго поясненія изоморфизма группъ подстановокъ съ группами многогранниковъ мною сдѣланы модели, находящіяся въ Механическомъ Кабинетѣ Университета Св. Владиміра. Эти модели представляютъ изъ себя тетраэдръ, октаэдръ и икосаэдръ, на углахъ граней которыхъ написаны подстановки такимъ образомъ, что умноженіе подстановокъ производится простымъ поворотомъ фигуры.

§ 2.

Разсмотримъ всѣ перемѣщенія пяти элементовъ 1, 2, 3, 4, 5.

12345	21345	31245	41235	51234
12354	21354	31254	41253	51243
12435	21435	31425	41325	51324
12453	21453	31452	41352	51342
12534	21534	31524	41523	51423
12543	21543	31542	41532	51432
13245	23145	32145	42135	52134
13254	23154	32154	42153	52143
13425	23415	32415	42315	52314
13452	23451	32451	42351	52341
13524	23514	32514	42513	52413
13542	23541	32541	42531	52431
14235	24135	34125	43125	53124
14253	24153	34152	43152	53142
14325	24315	34215	43215	53214
14352	24351	34251	43251	53241
14523	24513	34512	43512	53412
14532	24531	34521	43521	53421
15234	25134	35124	45123	54123
15243	25143	35142	45132	54132
15324	25314	35214	45213	54213
15342	25341	35241	45231	54231
15423	25413	35412	45312	54312
15432	25431	35421	45321	54321

Этимъ перемѣщеніямъ соотвѣтствуютъ подстановки

1	(12)	(132)	(1432)	(15432)
(45)	(12)(45)	(132)(45)	(14532)	(1532)
(34)	(12)(34)	(1342)	(142)	(1542)
(345)	(12)(345)	(13452)	(1452)	(152)
(354)	(12)(354)	(13542)	(142)(35)	(15342)
(35)	(12)(35)	(1352)	(14352)	(152)(34)

(23)	(123)	(13)	(143)	(1543)
(23)(45)	(123)(45)	(13)(45)	(1453)	(153)
(234)	(1234)	(134)	(14)	(154)
(2345)	(12345)	(1345)	(145)	(15)
(2354)	(12354)	(1354)	(14)(35)	(1534)
(235)	(1235)	(135)	(1435)	(15)(34)

(243)	(1243)	(13)(24)	(1423)	(15423)
(2453)	(12453)	(13)(245)	(14523)	(1523)
(24)	(124)	(1324)	(14)(23)	(154)(23)
(245)	(1245)	(13245)	(145)(23)	(15)(23)
(24)(35)	(124)(35)	(13524)	(14)(235)	(15234)
(2435)	(12435)	(135)(24)	(14235)	(15)(234)

(2543)	(12543)	(13)(254)	(14253)	(153)(24)
(253)	(1253)	(13)(25)	(143)(25)	(15243)
(254)	(1254)	(13254)	(14)(253)	(15324)
(25)	(125)	(1325)	(14325)	(15)(243)
(2534)	(12534)	(134)(25)	(14)(25)	(1524)
(25)(34)	(125)(34)	(13425)	(1425)	(15)(24)

Знакоперемѣнную группу будутъ составлять подстановки четнаго числа транспозицій. Расположимъ эти подстановки по періодамъ. Сначала напишемъ періоды для пятизначныхъ цикловъ, они обнимаютъ 24 подстановки

$$S_1 = (12345), \quad S_1^2 = (13524), \quad S_1^3 = (14253), \quad S_1^4 = (15432)$$
$$S_2 = (12354), \quad S_2^2 = (13425), \quad S_2^3 = (15243), \quad S_2^4 = (14532)$$
$$S_3 = (12453), \quad S_3^2 = (14325), \quad S_3^3 = (15234), \quad S_3^4 = (13542)$$
$$S_4 = (12435), \quad S_4^2 = (14523), \quad S_4^3 = (13254), \quad S_4^4 = (15342)$$
$$S_5 = (12543), \quad S_5^2 = (15324), \quad S_5^3 = (24235), \quad S_5^4 = (13452)$$
$$S_6 = (12534), \quad S_6^2 = (15423), \quad S_6^3 = (13245), \quad S_6^4 = (14352)$$

Далѣе мы имѣемъ 20 тройныхъ цикловъ, которые можно расположить въ 10 періодовъ

$$T_1 = (123), \quad T_1^2 = (132) \qquad T_6 = (145), \quad T_6^2 = (154)$$
$$T_2 = (124), \quad T_2^2 = (142) \qquad T_7 = (234), \quad T_7^2 = (243)$$
$$T_3 = (125), \quad T_3^2 = (152) \qquad T_8 = (235), \quad T_8^2 = (253)$$
$$T_4 = (134), \quad T_4^2 = (143) \qquad T_9 = (245), \quad T_9^2 = (254)$$
$$T_5 = (135), \quad T_5^2 = (153) \qquad T_{10} = (345), \quad T_{10}^2 = (354)$$

Далѣе слѣдуетъ 15 паръ транспозицій

$U_1 = (12)(34)$	$U_6 = (13)(45)$	$U_{11} = (15)(24)$
$U_2 = (12)(35)$	$U_7 = (14)(23)$	$U_{12} = (15)(34)$
$U_3 = (12)(45)$	$U_8 = (14)(25)$	$U_{13} = (23)(45)$
$U_4 = (13)(24)$	$U_9 = (14)(35)$	$U_{14} = (24)(35)$
$U_5 = (13)(25)$	$U_{10} = (15)(23)$	$U_{15} = (25)(34)$

Всѣ S удовлетворяютъ уравненію $S^5 = 1$, всѣ T -уравненію $T^3 = 1$ и всѣ U уравненію $U^2 = 1$.

Единичная подстановка вмѣстѣ съ S, U, T образуетъ знакоперемѣнную группу порядка $1 + 24 + 15 + 20 = 60$

§ 3.

Покажемъ, что знакоперемѣнная группа 5 элементовъ изоморфна съ группой вращенія икосаэдра.

Икосаэдръ имѣетъ 12 вершинъ. Соединяя противуположныя вершины прямыми, получимъ 6 осей вращенія. Около каждой изъ вершинъ икосаэдра сходятся 5 граней. Слѣдовательно, около осей, проведенныхъ черезъ противоположныя вершины, можно сдѣлать пять различныхъ вращеній, на $\frac{360}{5} = 72$ градуса каждое. Послѣ пятикратнаго повторенія такого вращенія фигура приметъ первоначальное положеніе. Эти 6 осей пятикратныхъ вращеній соотвѣтствуютъ 6-ти періодамъ подстановокъ S

Можно вращать икосаэдръ около прямой, соединяющей центры противоположныхъ граней. Граней икосаэдръ имѣетъ двадцать, слѣдовательно, будетъ десять такихъ осей вращенія. Послѣ трехъ поворотовъ около этихъ осей, на $\frac{360}{3} = 120$ градусовъ каждый, фигура приметъ первоначальное положеніе. Эти оси вращенія соотвѣтствуютъ десяти періодамъ тройныхъ цикловъ T.

И, наконецъ, подстановки U соотвѣтствуютъ вращеніямъ на $\frac{360}{2} = 180$ градусовъ около прямыхъ, соединяющихъ средины противоположныхъ реберъ. Реберъ икосаэдръ имѣетъ 30, слѣдовательно, получается 15 осей вращенія.

Метациклическая функція.

§ 4.

Въ предыдущей главѣ мы указали способъ, при помощи котораго Lagrange привелъ рѣшеніе общаго уравненія пятой степени къ резольвентѣ шестой степени.

Lagrange пользовался побочной ирраціональностью

$$x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4 ,$$

гдѣ ε корень пятой степени изъ единицы.

Мы знаемъ уже изъ общей теоріи, что той же цѣли можно достигнуть при помощи натуральныхъ ирраціональностей.

Разсмотримъ метациклическую группу (см глава XIX) для случая $n = 5$. Порядокъ этой группы будетъ $n(n-1) = 5 . 4 = 20$. Полуметациклическая группа имѣетъ порядокъ 10.

Для общаго уравненія 5-ой степени метациклическая функція удовлетворяетъ, очевидно, уравненію $\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5}{20} = 6$-ой степени.

Полуметациклическая функція будетъ удовлетворять уравненію 12-ой степени, которое отъ присоединенія корня квадратнаго изъ дискриминанта разложится на два множителя 6-ой степени.

Равенство

$$(z , bz)(z , z + a) = (z , bz + a)$$

показываетъ, что метациклическую группу можно получить при помощи формулы

$$T^{\tau} S^{\sigma},$$

если[1]) $T = (z, 2z)$, $S = (z, z + 1)$, причемъ τ пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю 4, а σ по модулю 5.

Полуметациклическую группу получимъ, полагая

$$T_0^{\tau_0} S^{\sigma},$$

гдѣ $T_0 = T^2 = (z , 4z)$, а $\tau_0 = 0 , 1$

Обозначая индексы пяти корней

$$0 , 1 , 2 , 3 , 4$$

мы замѣтимъ, что *пять слѣдующихъ паръ индексовъ*

(1) $$(0 , 1) , (1 , 2) , (2 , 3) , (3 , 4) , (4 , 0)$$

[1]) Число 2 есть первообразный корень числа 5.

послѣ примѣненія къ нимъ подстановки T даютъ слѣдующія пары

(2) $$(0, 2), (2, 4), (4, 1), (1, 3), (3, 0).$$

Пары (1) и (2) исчерпываютъ всѣ 10 возможныхъ паръ составленныхъ изъ 5-ти предметовъ.

Покажемъ, что отъ примѣненія къ парамъ (1) подстановокъ полуметациклической группы эти пары остаются тѣми же самыми только мѣняется ихъ порядокъ.

Въ самомъ дѣлѣ, отъ примѣненія подстановки S получаемъ пары

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0), (0, 1),$$

а примѣняя T_0 приходимъ къ парамъ

$$(0, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 0).$$

Очевидно, что будетъ полуметациклическою всякая симметрическая функція отъ пяти произведеній корней

$$x_0x_1, \; x_1x_2, \; x_2x_3, \; x_3x_4, \; x_4x_0.$$

Самою простою изъ такихъ функцій является сумма

$$u = x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0;$$

примѣняя подстановку T, получаемъ

$$u' = x_0x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_3x_0.$$

Функція u' принадлежитъ также къ полуметациклической группѣ.

Пусть заданное уравненіе пятой степени имѣетъ видъ

(3) $$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Будемъ имѣть

$$u + u' = \frac{c}{a}.$$

Функція

(4) $$y = u - u'$$

есть также метациклическая, ея квадратъ y^2 будетъ полною метациклическою функціей и будетъ корнемъ уравненія 6-ой степени.

Будемъ разсматривать *полуметациклическую* функцію y, она удовлетворяетъ также уравненію 6-ой степени, если присоединить къ основному полю $\sqrt{\Delta}$, гдѣ Δ - дискриминантъ уравненія (3). Послѣ этого присоединенія группой уравненія будетъ знакоперемѣнная A.

Если мы обозначимъ черезъ M — полуметациклическую группу, то простая провѣрка убѣдитъ насъ въ томъ, что разложеніе группы A на

сопряженныя системы по подгруппѣ M будетъ имѣть видъ.

$$A = M + M(1,2)(3,4) + MT(0,1) + MT(0,2) + MT(0,3) + MT(0,4) =$$
$$= M + M(1,2)(3,4) + M(0,1,2,4,3) + M(0,2,4,3,1) +$$
$$+ M(0,3,1,2,4) + M(0,4,3,1,2).$$

Сопряженныя значенія функцій u и u' будутъ

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
u &= x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0 \\
u_1 &= x_0x_2 + x_2x_1 + x_1x_4 + x_4x_3 + x_3x_0 \\
u_2 &= x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_0 + x_0x_3 + x_3x_1 \\
u_3 &= x_2x_0 + x_0x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_3x_2 \\
u_4 &= x_3x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_0 + x_0x_3 \\
u_5 &= x_4x_2 + x_2x_0 + x_0x_1 + x_1x_3 + x_3v_4,
\end{aligned}
$$

подобнымъ образомъ,

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
u' &= x_0x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_3x_0 \\
u_1' &= x_0x_1 + x_1x_3 + x_3x_2 + x_2x_4 + x_4x_0 \\
u_2' &= x_1x_4 + x_4x_3 + x_3x_2 + x_2x_0 + x_0x_1 \\
x_3' &= x_2x_4 + x_4x_3 + x_3x_0 + x_0x_1 + x_1x_2 \\
u_4' &= x_3x_4 + x_4x_0 + x_0x_2 + x_2x_1 + x_1x_3 \\
u_5' &= x_4x_0 + x_0x_3 + x_3x_2 + x_2x_1 + x_1x_4.
\end{aligned}
$$

Резольвента Cayley.

§ 5.

Всѣ относящіяся къ нахожденію уравненія шестой степени, которому удовлетворяетъ функцію

$$y = u \quad u',$$

выкладки для самаго общаго буквеннаго уравненія пятой степени (3) § 4 были выполнены Cayley въ его знаменитомъ мемуарѣ „On a new auxiliary equation in the theorie of equations of the fifth order" Papers V. IV p. 309 № 268. Главнымъ результатомъ этого мемуара является блестящая, мастерски проведенная до конца, выкладка длиннаго вычисленія, устрашавшаго всѣхъ предшествовавшихъ авторовъ.

Мы выведемъ резольвенту Cayley, не слѣдуя буквенно методѣ указаннаго мемуара

Величины y, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 будутъ корнями уравненія 6-ой степени, коэффиціенты котораго будутъ раціонально выражаться черезъ величины

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ \sqrt{\Delta}$$

Такъ какъ y мѣняетъ знакъ съ измѣненіемъ знака

$$\sqrt{\Delta}=(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_1-x_2)(x_1-x_3).$$
$$.(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4),$$

то искомое уравненіе 6-ой степени будетъ имѣть видъ

$$y^6+A_2y^4+A_4y^2+A_6-\sqrt{\Delta}(A_1y^5+A_3y^3+A_5y)=0.$$

Коэффиціенты

$$A_2,\ A_4,\ A_6,\ \sqrt{\Delta}A_1,\ \sqrt{\Delta}A_3,\ \sqrt{\Delta}A_5,$$

должны быть цѣлыми функціями отъ корней x_i, кромѣ того при послѣднихъ коэффиціенты должны дѣлиться на $\sqrt{\Delta}$, слѣдовательно, коэффиціенты A_2, A_4, A_6, A_1, A_3, A_5 суть цѣлыя симметрическія функціи отъ корней x_i

Корни y_i суть цѣлыя функціи второй степени отъ x_i, слѣдовательно, величины

$$A_1\sqrt{\Delta},\ A_2,\ A_3\sqrt{\Delta},\ A_4,\ A_5\sqrt{\Delta},\ A_6$$

имѣютъ степени относительно x_i

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12.$$

Но $\sqrt{\Delta}$ есть функція 10-ой степени относительно x_i и мы получаемъ

$$A_1=0,\ A_3=0,$$

а коэффиціентъ A_5 есть число

Итакъ, искомое уравненіе имѣетъ видъ

(1) $$y^6+A_2y^4+A_4y^2+A_6-k\sqrt{\Delta}y=0,$$

гдѣ A_2, A_4, A_6 выражаются раціонально черезъ коэффиціенты a, b, c, d, e, f уравненія 5-ой степени, а k есть число независимое отъ этихъ коэффиціентовъ и, слѣдовательно, общее для всѣхъ уравненій пятой степени.

§ 6.

Начнемъ съ вычисленія коэффиціента k и покажемъ, что должно быть $k=32$.

Проще всего примѣнимъ выводъ уравненія (1) § 5 къ самому простому уравненію 5-ой степени

(1) $$x^5 - 1 = 0.$$

Мы имѣемъ $x^5 - 1 = (x-1)X_5$. По формулѣ для дискриминанта Δ_0 уравненія $X_5 = 0$, данной въ § 35 главы XIII, мы имѣемъ

$$\Delta_0 = 5^3.$$

Тогда дискриминантъ Δ уравненія (1) будетъ выражаться такъ

$$\Delta = (1-x_1)^2(1-x_2)^2(1-x_3)^2(1-x_4)^2\Delta_0,$$

гдѣ x_1, x_2, x_3, x_4 корни X_5.

Мы получаемъ

$$\Delta = [X_5(1)]^2\Delta_0 = 5^5$$

Очевидно, что этотъ результатъ можно получить сразу, какъ результантъ функціи $x^5 - 1$ и ея производной $5x^4$

$$\Delta = 5 \,.\, 1^4 . 5x_1^4 . 5x_2^4 . 5x_3^4 . 5x_4^4 = 5^5.$$

Резольвента Cayley должна имѣть видъ

(2) $$y^6 + A_2y^4 + A_4y^2 + A_6 - k5^{\frac{5}{2}}y = 0$$

Теперь составимъ эту резольвенту по ея опредѣленію.

Пусть корни уравненія (1) будутъ

$$x_0 = 1, \ x_1 = e^{\alpha}, \ x_2 = e^{2\alpha}, \ x_3 = e^{3\alpha}, \ x_4 = e^{4\alpha}, \text{ гдѣ } \alpha = \frac{2\pi i}{5}.$$

Послѣ простой выкладки получимъ по формуламъ (5) и (6) § 4

$$y = 0, \ y_1 = 2e^{\alpha}.\mathfrak{A}, \ y_2 = 2e^{2\alpha}.\mathfrak{A}, \ y_3 = 2e^{3\alpha}\mathfrak{A}, \ y_4 = 2e^{4\alpha}\mathfrak{A}, \ y_5 = 2\mathfrak{A},$$

$$\text{гдѣ } \mathfrak{A} = -(1-e^{\alpha})(1-e^{2\alpha}).$$

Получаемъ для y такое уравненіе

(3) $$y[y^5 - 2^5\mathfrak{A}^5] = 0.$$

Сравнивая (2) и (3), получимъ

$$A_2 = 0, \ A_4 = 0, \ A_6 = 0$$

$$k5^{\frac{5}{2}} = 32\mathfrak{A}^5.$$

Но мы имѣемъ (см. § 22 главы XIII)

$$(1-e^{\alpha})(1-e^{2\alpha})(1-e^{3\alpha})(1-e^{4\alpha}) = 5,$$

откуда

$$[(1-e^{\alpha})(1-e^{2\alpha})]^2 = 5e^{3\alpha};$$

далѣе, возвышая въ 5-ую степень,

$$\mathfrak{A}^{10} = 5^5$$

и, слѣдовательно, $k = 32$, что и требовалось показать.

§ 7.

Обращаясь къ вычисленію другихъ коэффиціентовъ резольвенты Cayley, замѣтимъ, что упрощеніе, которымъ Cayley пользуется, состоитъ въ томъ, что коэффиціенты A_2, A_4, A_6, а также и дискриминантъ Δ суть то, что мы назвали въ § 29 главы IX функціями критическими, ибо они суть функціи разностей корней, значитъ, для вычисленія такихъ функцій примѣнимъ простой способъ, приведенный въ § 30 главы IX.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(x_0 - x_4)(x_1 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_4)(x_3 - x_4) =$$
$$= x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 - x_4(x_0 + 2x_1 + 2x_2 + x_3) + x_4^2$$
$$(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) + (x_3 - x_4)(x_0 - x_4) + (x_0 - x_4)(x_2 - x_4) =$$
$$= x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_3 - x_4(x_1 + 2x_3 + 2x_0 + x_2) = x_4^2$$

Вычитая второе тождество изъ перваго, получимъ во второй части $y = u - u'$, слѣдовательно, будемъ имѣть

$$y = [(x_0 - x_4)(x_1 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_4)(x_3 - x_4)] -$$
$$- [(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) + (x_3 - x_4)(x_0 - x_4) + (x_0 - x_4)(x_2 - x_4)].$$

Итакъ, мы можемъ вычислять искомые коэффиціенты какъ функціи критическія, т. е. удовлетворяющія дифференціальному уравненію

$$(1) \qquad 5a\frac{\partial\varphi}{\partial b} + 4b\frac{\partial\varphi}{\partial c} + 3c\frac{\partial\varphi}{\partial d} + 2d\frac{\partial\varphi}{\partial e} + e\frac{\partial\varphi}{\partial f} = 0.$$

На основаніи теоремъ § 28 главы IX мы замѣчаемъ, что коэффиціентъ A_2 долженъ имѣть степень 2 и вѣсъ 4 относительно отношеній

$$(2) \qquad \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{e}{a}, \frac{f}{a},$$

вѣса которыхъ суть

1, 2, 3, 4, 5

мы будемъ умноженіемъ на извѣстную степень a писать коэффиціенты A_2, A_4, A_6 въ цѣломъ видѣ. Такъ какъ A_6 шестой степени относительно

дробей (2), то, умножая всю резольвенту Cayley на a^6, перепишем её такъ:

$$a^6y^6 + \mathfrak{A}a^4y^4 + \mathfrak{B}a^2y^2 - 32a^2\sqrt{\Delta}\,y + \mathfrak{C} = 0,$$

гдѣ коэффиціенты

(3) $$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}$$

однородныя функціи отъ a, b, c, d, e, f степеней

$$2,\ 4,\ 6.$$

Полагая вѣса коэффиціентовъ a, b, c, d, e, f равными 0, 1, 2, 3, 4, 5, получимъ для вѣсовъ коэффиціентовъ (3) значенія

$$4,\ 8,\ 12$$

Такимъ образомъ, мы найдемъ сразу буквенное выраженіе функцій $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ съ неопредѣленными коэффиціентами Дифференціальное уравненіе (2) поможетъ вычислить эти коэффиціенты съ точностью до постояннаго множителя. Чтобы опредѣлить далѣе этотъ множитель, достаточно будетъ указать одинъ изъ коэффиціентовъ.

Это можно сдѣлать проще всего слѣдующимъ образомъ.

Положимъ $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Тогда будемъ имѣть $\Delta = 0$ Уравненіе 5-ой степени принимаетъ видъ

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 = 0$$

и, значитъ, $d = 0$, $e = 0$, $f = 0$.

Получаемъ

$$\begin{array}{ll} u = x_0x_1 & u' = 0 \\ u_1 = 0 & u_1' = x_0x_1 \\ u_2 = 0 & u_2' = x_0x_1 \\ u_3 = 0 & u_3' = x_0x_1 \\ u_4 = x_0x_1 & u_4' = 0 \\ u_5 = x_0x_1 & u_5' = 0. \end{array}$$

Принимая во вниманіе, что $x_0x_1 = \frac{c}{a}$, получимъ

$$y = y_4 = y_5 = -y_1 = -y_2 = \quad y_3 = \frac{c}{a}.$$

Резольвента Cayley принимаетъ видъ

$$(a^2y^2 - c^2)^3 = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что въ общемъ случаѣ

$$\mathfrak{A} = -3c^2 + \ldots$$
$$\mathfrak{B} = 3c^4 + \ldots$$
$$\mathfrak{C} = -c^6 + \ldots$$

§ 8.

Обращаемся теперь къ вычисленію $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Функція $\mathfrak{A}$ второй степени и четвертаго вѣса, слѣдовательно, ея буквенное выраженіе должно быть

(1) $$Aae + Bdb + Cc^2,$$

причемъ мы знаемъ уже, что $C = -3$

Подставляя выраженіе (1) въ дифференціальное уравненіе, получимъ тождество

$$(5B + 2A)ad + (8C + 3B)cb = 0;$$

Приравнивая нулю коэффиціенты, получимъ

$$5B + 2A = 0, \quad 8C + 3B = 0,$$

откуда

$$A = -20, \quad B = 8, \quad C = -3.$$

Итакъ,

(2) $$\mathfrak{A} = -20ae + 8db - 3c^2.$$

Если заданное уравненіе 5-й степени написано такъ

(3) $$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0,$$

гдѣ къ коэффиціентамъ приписаны множителями биноміальные коэффиціенты, то такую форму (3) уравненія 5-й степени Cayley называетъ Standart form. Въ отличіе отъ этого онъ называетъ denumerate form обычную форму писавія уравненія 5-ой степени

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

Для Standart form мы получимъ, очевидно,

(4) $$\mathfrak{A} = 100(-ae + 4db - 3c^2).$$

Формы (2) и (4) можно указать при помощи такой таблички

d. f.	*s. f.* 100	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
−20	−1	1	0	0	0	1	0
+8	+4	0	1	0	1	0	0
−3	−3	0	0	2	0	0	0

Въ этой табличкѣ въ лѣвыхъ двухъ колоннахъ написаны коэффиціенты для обѣихъ формъ, въ шести слѣдующихъ колоннахъ, соотвѣтствующихъ буквенному выраженію члена, написаны показатели надъ соотвѣтственной буквой.

Подобнымъ же образомъ мы можемъ вычислить безъ особеннаго затрудненія величины 𝔅, ℭ и Δ.

Для 𝔅 получаемъ

d. f.	s. f. 2000	a	b	c	d	e	f
—400	— 2	2	0	0	1	0	1
+240	+ 3	2	0	0	0	2	0
+240	+ 6	1	1	1	0	0	1
—112	—14	1	1	0	1	1	0
— 8	— 2	1	0	2	0	1	0
+ 16	+ 8	1	0	1	2	0	0
- 64	— 4	0	3	0	0	0	1
+ 16	+10	0	2	1	0	1	0
+ 16	+20	0	2	0	2	0	0
— 16	-40	0	1	2	1	0	0
+ 3	+15	0	0	3	0	0	0

Для ℭ получаемъ

d. f.	s f 40000	a	b	c	d	e	f	d. f.	s. f 40000	a	b	c	d	e	f
+4000	+ 1	3	0	1	0	0	2	+224	+ 35	1	2	1	0	2	0
—1600	- 2	3	0	0	1	1	1	—128	- 40	1	2	0	2	1	0
+ 320	+ 1	3	0	0	0	3	0	+ 48	+ 6	1	1	3	0	0	1
—1600	— 1	2	2	0	0	0	2	—112	— 70	1	1	2	1	1	0
— 640	— 4	2	1	1	0	1	1	+ 64	+ 80	1	1	1	3	0	0
+ 640	+ 8	2	1	0	2	0	1	+ 28	+ 35	1	0	4	0	1	0
— 64	— 2	2	1	0	1	2	0	— 16	— 40	1	0	3	2	0	0
— 80	— 2	2	0	2	1	0	1	64	— 25	0	4	0	0	2	0
— 176	—11	2	0	2	0	2	0	+ 64	+100	0	3	1	1	1	0
+ 224	+28	2	0	1	2	1	0	— 16	— 50	0	2	3	0	1	0
— 64	—16	2	0	0	4	0	0	— 16	—100	0	2	2	2	0	0
+ 384	+ 6	1	3	0	0	1	1	+ 8	+100	0	1	4	1	0	0
— 192	—12	1	2	1	1	0	1	— 1	— 25	0	0	6	0	0	0

Для дискриминанта Δ получаемъ

d. f.	s. f. 3125	a	b	c	d	e	f	d. f.	s. f. 3125	a	b	c	d	e	f
+3125	+ 1	4	0	0	0	0	4	+ 24	+ 960	1	2	0	3	1	1
—2500	— 20	3	1	0	0	1	3	— 6	— 600	1	2	0	2	3	0
—3750	— 120	3	0	1	1	0	3	-630	—10080	1	1	3	1	0	2
+2000	+ 160	3	0	1	0	2	2	+ 24	+ 960	1	1	3	2	0	1
+2050	+ 360	3	0	0	2	1	2	+356	+28480	1	1	2	2	1	1
—1600	— 640	3	0	0	1	3	1	— 80	-16000	1	1	2	1	3	0
+ 256	+ 256	3	0	0	0	5	0	— 72	—11520	1	1	1	4	0	1
+2000	+ 160	2	2	0	1	0	3	+ 18	+ 7200	1	1	1	3	2	0
— 50	— 10	2	2	0	0	2	2	+108	+ 3456	1	0	5	0	0	2
+2250	+ 360	2	1	2	0	0	3	— 72	—11520	1	0	4	1	1	1
—2050	— 1640	2	1	1	1	1	2	+ 16	+ 6400	1	0	4	0	3	0
+ 160	+ 320	2	1	1	0	3	1	+ 16	+ 5120	1	0	3	3	0	1
— 900	— 1440	2	1	0	3	0	2	— 4	— 3200	1	0	3	2	2	0
+1020	+ 4080	2	1	0	2	2	1	+256	+ 256	0	[illegible]	0	0	0	3
— 192	— 1920	2	1	0	1	4	0	-192	— 1920	0	4	1	0	1	2
900	— 1440	2	0	3	0	1	2	—128	· 2560	0	4	0	2	0	2
+ 825	+ 2640	2	0	2	2	0	2	+144	+ 7200	0	4	0	1	2	1
+ 560	+ 4480	2	0	2	1	2	1	— 27	— 3375	0	4	0	0	4	0
— 128	— 2560	2	0	2	0	4	0	+144	+ 5760	0	3	2	1	0	2
— 630	—10080	2	0	1	3	1	1	— 6	— 600	0	3	2	0	2	1
+ 144	+ 5760	2	0	1	2	3	0	— 80	—16000	0	3	1	2	1	1
+ 108	+ 3456	2	0	0	5	0	1	+ 18	+ 9000	0	3	1	1	3	0
— 27	2160	2	0	0	4	2	0	+ 16	+ 6400	0	3	0	4	0	1
—1600	· 640	1	3	1	0	0	3	— 4	— 4000	0	3	0	3	2	0
+ 160	+ 320	1	3	0	1	1	2	— 27	— 2160	0	2	4	0	0	2
— 36	— 180	1	3	0	0	3	1	+ 18	+ 7200	0	2	3	1	1	1
+1020	+ 4080	1	2	2	0	1	2	— 4	4000	0	2	3	0	3	0
+ 560	+ 4480	1	2	1	2	0	2	— 4	3200	0	2	2	3	0	1
— 746	—14920	1	2	1	1	2	1	+ 1	+ 2000	0	2	2	2	2	0
+ 144	+ 7200	1	2	1	0	4	0								

§ 9.

Вычисленіе 𝔖 и Δ приводитъ къ довольно большимъ выкладкамъ, а потому заслуживаетъ вниманія остроумный способъ разсужденія, придуманный Cayley.

Онъ полагаетъ одинъ изъ корней равнымъ нулю

$$x_4 = 0\,,$$

тогда четыре другихъ корня x_0, x_1, x_2, x_3 удовлетворяють уравненію четвертой степени

(1) $$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\,,$$

причемъ $f = 0$.

Пусть искомый дискриминантъ раскладывается слѣдующимъ образомъ по степенямъ f

(2) $$\Delta = A + f\,.\,B + f^2 C + \ldots,$$

гдѣ A, B, C, суть цѣлыя функціи отъ коэффиціентовъ уравненія четвертой степени (1).

Обозначая операцію

$$5a\frac{\partial\varphi}{\partial b} + 4b\frac{\partial\varphi}{\partial c} + 3c\frac{\partial\varphi}{\partial d} + 2d\frac{\partial\varphi}{\partial e}$$

черезъ

$$\nabla\varphi\,,$$

мы замѣчаемъ, что дискриминантъ, какъ критическая функція, долженъ удовлетворять дифференціальному уравненію

(3) $$\nabla\varphi + e\frac{\partial\varphi}{\partial f} = 0$$

Подставляя выраженіе (2) въ уравненіе (3), должны придти къ тождеству

$$\nabla A + f\nabla B + f^2\nabla C + \ldots + eB + 2feC + \ldots = 0\,,$$

откуда, приравнивая нулю коэффиціенты при разныхъ степеняхъ f, получаемъ рядъ равенствъ

(4) $$eB = -\nabla A\,,\ 2eC = -\nabla B\,,\ \ldots$$

Мы видимъ, что, если у насъ извѣстна функція A, то по формуламъ (4) мы найдемъ послѣдовательно B, C, ...

Обозначая черезъ Δ_0 дискриминантъ уравненія четвертой степени (1), получимъ

$$\Delta = \Delta_0(x_0 - x_4)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_4)^2(x^3 - x_4)^2,$$

полагая $x_4 = 0$, получимъ

$$A = \Delta_0 x_0{}^2 x_1{}^2 x_2{}^2 x_3{}^2 = \Delta_0 e^2$$

Итакъ, методъ Cayley состоитъ въ томъ, что дискриминантъ уравненія 5-ой степени выводится изъ дискриминанта уравненія 4-ой степени. По идеѣ онъ аналогиченъ методу Cauchy, изложенному въ § 27 главы IX.

Подобнымъ же образомъ можно вычислить коэффиціентъ $\mathfrak{B}$ въ случаѣ $f=0$ и далѣе дополнить его членами, заключающими f, что и продѣлалъ Cayley.

Группа резольвенты.

§ 10.

Разсмотримъ резольвенту Cayley 6-ой степени, корни которой суть

$$v = (u-u')^2,\ v_1 = (u_1 - u_1')^2,\ v_2 = (u_2 - u_2')^2$$

$$v_3 = (u_3 - u_3')^2,\ v_4 = (u_4 - u_4')^2,\ v_5 = (u_5 - u_5')^2.$$

Корень v принадлежитъ къ полной метациклической группѣ $\mathfrak{M}$, всѣ сопряженныя группы

$$S^{-1}\mathfrak{M}S$$

въ случаѣ буквенныхъ уравненій не могутъ имѣть общаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы, ибо, иначе, этотъ дѣлитель, отличаясь отъ знакоперемѣнной группы, долженъ былъ бы быть нормальнымъ дѣлителемъ симметрической, что невозможно.

Итакъ, резольвента 6-ой степени есть полная резольвента, слѣдовательно, группа этой резольвенты должна совпадать съ группой заданнаго уравненія, то есть, имѣть порядокъ $120 = 1.2.3.4.5$.

Кромѣ того, въ общемъ случаѣ резольвента есть уравненіе неприводимое, слѣдовательно, группа резольвенты должна быть транзитивною.

Симметрическая группа перестановокъ шести буквъ имѣетъ порядокъ $1.2.3.4.5.6 = 6.120$.

Мы приходимъ къ заключенію, что симметрическая группа шести перемѣщаемыхъ элементовъ должна имѣть транзитивнаго дѣлителя индекса 6. Этотъ дѣлитель есть та группа, о которой сказано въ § 41 главы V.

Index nominum[1].

[1]) Порядокъ буквъ латинскаго алфавита.

Index rerum [1].

[1] Порядокъ буквъ русскаго алфавита.